

Novel Solitonic Evolutions in a Coupled Integrable, Dispersionless System

日大理工物理 紺野 公明 (Kimiaki Konno)

敦賀女子短大 角島 浩 (Hiroshi Kakuhata)

逆散乱形式を用いて非線形非分散可積分方程式

$$q_{xt} + (rs)_x = 0, \quad r_{xt} - 2q_x r = 0, \quad s_{xt} - 2q_x s = 0 \quad (1)$$

を境界条件

$$q_x \rightarrow q_0, \quad r \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0 \quad \text{for } |x| \rightarrow \infty \quad (2)$$

のもとで解き, 1 ソリトン解と 2 ソリトン解の振舞いを調べた. ここで q_0 は一定である. r と s が特別な関係 $r = s[2]$ または $r = s^*[3]$ の時はすでに解かれている.

方程式 (1) は保存量

$$q_x^2 + r_x s_x = q_0^2 \quad (3)$$

を持つ. もし $r = s$ ならば, (3) は

$$q_x^2 + r_x^2 = q_0^2, \quad (4)$$

と書け 2 次元 Euclidian group E_2 と関係し, (1) は sine-Gordon 方程式 [4][5] と同等である. もし $r = s^*$ の関係を仮定すると, (3) は

$$q_x^2 + \text{Re}(r_x)^2 + \text{Im}(r_x)^2 = q_0^2 \quad (5)$$

と書け $O(3) \sim SU(2)$ と関係しする. (1) は Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式と同等である [6]. 変数変換 $r = \rho + \eta, s = \rho - \eta$ を行うと, (3) は

$$q_x^2 + \rho_x^2 - \eta_x^2 = q_0^2, \quad (6)$$

と書かれ $O(2,1) \sim SL(2,R)$ と関係づく. (6) は r 又は s が漸近的に発散する解を許す. 事実, そのような解を持つことが示される.

この報告では解 q_x , r 及び s をそれぞれ Q_x ソリトン, R ソリトン及び S ソリトンと呼ぶ. R ソリトンと S ソリトンは bright 形の波形を Q_x は dark 形の波形を示す. 通常、ソリトンの個数は散乱データの複素固有値空間の上半面の零点の数で決る. 我々の系 (1) は, 複素平面の上半面と下半面に依存関係がないので, R ソリトンの個数は S ソリトンの個数を制限せず、独立に取ることが出来る. そのため、2 R ソリトンと 1 S ソリトンの解を構成出来る. Q_x ソリトンは R ソリトンと S ソリトンから決められる.

(1) の逆問題は

$$V_x = UV, \quad V_t = WV \quad (7)$$

で与えられる. ここで U と W は

$$U = -i\lambda \begin{pmatrix} q_x & r_x \\ s_x & -q_x \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ s & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

で与えられる.

実 λ に対して Jost 関数を

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\lambda q_0 x), \quad \bar{\phi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i\lambda q_0 x) \quad \text{for } x \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\lambda q_0 x), \quad \bar{\psi} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\lambda q_0 x) \quad \text{for } x \rightarrow -\infty \quad (10)$$

で定義し, 散乱データを

$$\phi = a\bar{\psi} + b\psi, \quad \bar{\phi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi} \quad (11)$$

で与える. ただし,

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \quad (12)$$

Jost 関数の解析性を調べるため

$$\phi_1 = \exp \left\{ -i\lambda q_0 x + \int_{-\infty}^x \sigma(y) dy \right\} \quad (13)$$

を導入する. (13) を (7) に代入すると

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{r(q_x - q_0)}{r_x} - \frac{ir\sigma}{\lambda r_x} + \frac{i}{2\lambda} \right] \quad (14)$$

を得る. σ を λ 級数展開

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{(i\lambda)^n} \quad (15)$$

すると, (15) を (14) に代入して無限個の保存量が求まる. 同様にして,

$$\bar{\psi}_2 = \exp \left\{ i\lambda q_0 x + \int_{-\infty}^x \hat{\sigma}(y) dy \right\}, \quad (16)$$

を導入すれば

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{s(q_x - q_0)}{s_x} + \frac{is\hat{\sigma}}{\lambda s_x} - \frac{i}{2\lambda} \right] \quad (17)$$

が得られ, $\hat{\sigma}$ を級数展開

$$\hat{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\sigma}_n}{(i\lambda)^n} \quad (18)$$

すると保存量が求まる. 保存量の始のいくつかは

$$\sigma_{-1} = q_x^2 + r_x s_x = q_0^2, \quad (19a)$$

$$\sigma_0 = \frac{r_x}{2q_0} \left(\frac{q_x - q_0}{r_x} \right)_x, \quad \hat{\sigma}_0 = \frac{s_x}{2q_0} \left(\frac{q_x - q_0}{s_x} \right)_x, \quad (19b)$$

$$\sigma_1 = \frac{r_x}{2q_0} \left[\frac{\sigma_0^2}{r_x} + \left(\frac{\sigma_0}{r_x} \right)_x \right], \quad \hat{\sigma}_1 = \frac{s_x}{2q_0} \left[\frac{\hat{\sigma}_0^2}{s_x} + \left(\frac{\hat{\sigma}_0}{s_x} \right)_x \right] \quad (19c)$$

で与えられる.

r と s は独立であるから (9) と (10) から, 次の関係式

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(\lambda) &= \phi_2^*(\lambda^*), & \bar{\phi}_2(\lambda) &= -\phi_1^*(\lambda^*), \\ \bar{\psi}_1(\lambda) &= \psi_2^*(\lambda^*), & \bar{\psi}_2(\lambda) &= -\psi_1^*(\lambda^*), \\ \bar{a}(\lambda) &= a^*(\lambda^*), & \bar{b}(\lambda) &= b^*(\lambda^*), \end{aligned} \quad (20)$$

が成り立たないことが分かる. そこで我々は, Gel'fand-Levitan 方程式を求めるために複素固有値平面で上半面と下半面を同時に考えなければならない。

μ_+ , μ_- , μ_0 , $\hat{\mu}_+$, $\hat{\mu}_-$ と $\hat{\mu}_0$ を (19b) を用いて次のように定義する:

$$\begin{aligned}\mu_+(x) &= \int_x^\infty \sigma_0 dy, & \mu_-(x) &= \int_{-\infty}^x \sigma_0 dy, \\ \mu_0(x) &= \mu_-(x) + \mu_+(x), \\ \hat{\mu}_+(x) &= \int_x^\infty \hat{\sigma}_0 dy, & \hat{\mu}_-(x) &= \int_{-\infty}^x \hat{\sigma}_0 dy, \\ \hat{\mu}_0(x) &= \hat{\mu}_-(x) + \hat{\mu}_+(x).\end{aligned}\tag{21}$$

2組の核 $K_1(x, z)$, $K_2(x, z)$ と $\widehat{K}_1(x, z)$, $\widehat{K}_2(x, z)$ を

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\lambda q_0 x - \hat{\mu}_+(x)) + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_1(x, z) \\ i\lambda K_2(x, z) \end{pmatrix} \exp(i\lambda q_0 z - \hat{\mu}_+(x)) dz, \\ \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\lambda q_0 x - \mu_+(x)) + \int_x^\infty \begin{pmatrix} i\lambda \widehat{K}_1(x, z) \\ \widehat{K}_2(x, z) \end{pmatrix} \exp(-i\lambda q_0 z - \mu_+(x)) dz\end{aligned}\tag{22}$$

を導入すると Gel'fand-Levitan 方程式は

$$\begin{aligned}G_1(x, y) + q_0^2 \widehat{F}(x + y) + q_0^2 \int_x^\infty \widehat{G}_1(x, z) \widehat{F}(x + z) dz &= 0, \\ G_2(x, y) + \int_x^\infty \widehat{G}_2(x, z) \widehat{F}''(x + z) dz &= 0, \\ \widehat{G}_1(x, y) + \int_x^\infty G_1(x, z) F''(x + z) dz &= 0, \\ \widehat{G}_2(x, y) + q_0^2 F(x + y) + q_0^2 \int_x^\infty G_2(x, z) F(x + z) dz &= 0\end{aligned}\tag{23}$$

で与えられる. ここで, G_1, G_2, \widehat{G}_1 と \widehat{G}_2 は

$$\begin{aligned}G_1(x, z) &= K_1(x, z) \exp(\mu_+(x) - \hat{\mu}_+(x)), & G_2(x, z) &= K_2(x, z), \\ \widehat{G}_1(x, z) &= \widehat{K}_1(x, z), & \widehat{G}_2(x, z) &= \widehat{K}_2(x, z) \exp(\hat{\mu}_+(x) - \mu_+(x))\end{aligned}\tag{24}$$

で定義され, $F(z)$ と $\hat{F}(z)$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d\lambda}{i\lambda q_0} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \exp(i\lambda q_0 z), \\
 F''(z) &= \frac{d^2 F(z)}{dz^2} = \frac{q_0}{2\pi} \int_C i\lambda d\lambda \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \exp(i\lambda q_0 z), \\
 \hat{F}(z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C'} \frac{d\lambda}{i\lambda q_0} \frac{\bar{b}(\lambda)}{\bar{a}(\lambda)} \exp(-i\lambda q_0 z), \\
 \hat{F}''(z) &= \frac{d^2 \hat{F}(z)}{dz^2} = -\frac{q_0}{2\pi} \int_C i\lambda d\lambda \frac{\bar{b}(\lambda)}{\bar{a}(\lambda)} \exp(-i\lambda q_0 z).
 \end{aligned} \tag{25}$$

散乱データの時間依存性は (7) から

$$\begin{aligned}
 a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) \exp\left(-\frac{i}{\lambda} t\right), \\
 \bar{a}(\lambda, t) &= \bar{a}(\lambda, 0), \quad \bar{b}(\lambda, t) = \bar{b}(\lambda, 0) \exp\left(\frac{i}{\lambda} t\right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

で与えられる.

解は

$$q_x = q_0 \frac{q_0^2 - K_1(x, x) \widehat{K}_2(x, x)}{q_0^2 + K_1(x, x) \widehat{K}_2(x, x)}, \tag{27a}$$

$$r_x = \frac{2q_0^2 K_1(x, x)}{q_0^2 + K_1(x, x) \widehat{K}_2(x, x)}, \quad s_x = \frac{2q_0^2 \widehat{K}_2(x, x)}{q_0^2 + K_1(x, x) \widehat{K}_2(x, x)}. \tag{27b}$$

と表される.

複素固有値空間の上半面での $a(\lambda)$ の零点の個数と, 下半面での $\bar{a}(\lambda)$ での零点の個数は独立に取れるので $F(z)$ と $\hat{F}(z)$ は

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{iC_k(t)}{\lambda_k q_0} \exp(\lambda_k q_0 z) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\lambda, t)}{\lambda q_0} \exp(i\lambda q_0 z) d\lambda, \\
 \hat{F}(z) &= \sum_{l=1}^M -\frac{i\hat{C}_l(t)}{\lambda_l q_0} \exp(-\lambda_l q_0 z) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\rho}(\lambda, t)}{\lambda q_0} \exp(-i\lambda q_0 z) d\lambda
 \end{aligned} \tag{28}$$

で与えられる。ここで,

$$\begin{aligned} C_k(t) &= C_k(0) \exp\left(-\frac{i}{\lambda_k}t\right), & \widehat{C}_l(t) &= \widehat{C}_l(0) \exp\left(\frac{i}{\lambda_l}t\right), \\ \rho(\lambda, t) &= \rho(\lambda, 0) \exp\left(-\frac{i}{\lambda}t\right), & \widehat{\rho}(\lambda, t) &= \widehat{\rho}(\lambda, 0) \exp\left(\frac{i}{\lambda}t\right). \end{aligned} \quad (29)$$

である。 $G_1(x, x)$ と $\widehat{G}_2(x, x)$ を用いて $K_1(x, x)$ と $\widehat{K}_2(x, x)$ は

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \exp\left\{-\int_x^\infty \left(\frac{q_0^2 G_{1y} - G_1^2 \widehat{G}_{2y}}{G_1(q_0^2 - G_1 \widehat{G}_2)}\right) dy\right\}, \\ \widehat{K}_2 &= \widehat{K}_0 \exp\left\{-\int_x^\infty \left(\frac{q_0^2 \widehat{G}_{2y} - G_{1y} \widehat{G}_2^2}{\widehat{G}_2(q_0^2 - G_1 \widehat{G}_2)}\right) dy\right\} \end{aligned} \quad (30)$$

で与えられる。ただし, $K_0 \widehat{K}_0 = q_0^2$.

1ソリトン解は, $a(\lambda)$ の零点を $\lambda = i\eta$ に, また $\bar{a}(\lambda)$ の零点を $\lambda = -i\xi$ にとる。 $F(z)$ と $\widehat{F}(z)$ は

$$F(z) = \frac{C(t)}{\eta q_0} \exp(-\eta q_0 z), \quad \widehat{F}(z) = \frac{\widehat{C}(t)}{\xi q_0} \exp(-\xi q_0 z) \quad (31)$$

と与えられる。Gel'fand-Levitan 方程式を解くと $K_1(x, x)$ と $\widehat{K}_2(x, x)$ は次のように得られる:

$$\begin{aligned} K_1(x, x) &= \frac{K_0}{\xi} \frac{\widehat{C}(t) \exp(-2\xi q_0 x)}{1 - \frac{\xi C(t) \widehat{C}(t)}{\eta(\eta + \xi)^2} \exp(-2(\eta + \xi)q_0 x)}, \\ \widehat{K}_2(x, x) &= \frac{\widehat{K}_0}{\eta} \frac{\widehat{C}(t) \exp(-2\eta q_0 x)}{1 - \frac{\eta C(t) \widehat{C}(t)}{\xi(\eta + \xi)^2} \exp(-2(\eta + \xi)q_0 x)}. \end{aligned} \quad (32)$$

1 ソリトン解は

$$\begin{aligned}
 q_x &= q_0 \left(1 - 2 \frac{\frac{C(t)\widehat{C}(t)}{\eta\xi} \exp(-2(\eta+\xi)q_0x)}{T^2} \right), \\
 r &= -\frac{K_0}{q_0} \frac{\widehat{C}(t)}{\xi^2} \frac{\exp(-2\xi q_0x)}{T}, \quad s = -\frac{\widehat{K}_0}{q_0} \frac{C(t)}{\eta^2} \frac{\exp(-2\eta q_0x)}{T}, \\
 T &= 1 + \frac{C(t)\widehat{C}(t)}{(\eta+\xi)^2} \exp(-2(\eta+\xi)q_0x)
 \end{aligned} \tag{33}$$

で与えられる.

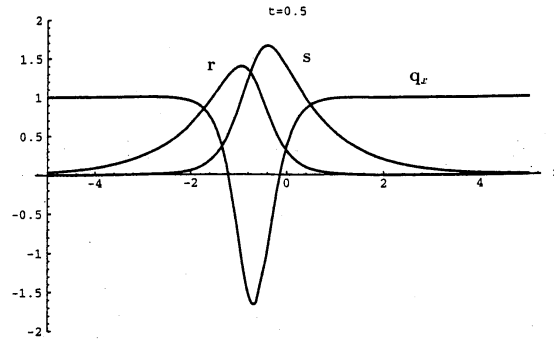


Figure 1: Profile of Q_x , R and S solitons with $\eta = 0.5$, $\xi = 1.5$, $K_0 = -1$, $\widehat{K}_0 = -1$ and $q_0 = 1$ at $t = 0.5$.

図 1 に示すように R ソリトンと S ソリトンの波形は、それらの頂点に対して非対称である。 Q_x ソリトンは対称である。速度は同じ値

$$V = -\frac{1}{2\eta\xi q_0} \tag{34}$$

を持つが、頂点の位置は Q_x を中心に等間隔離れている。軌道は

$$\begin{aligned}
 Q_x \text{ soliton} \quad & 2(\eta + \xi)q_0 x + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) t + \ln(\eta + \xi)^2 = 0, \\
 R \text{ soliton} \quad & 2(\eta + \xi)q_0 x + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) t + \ln \frac{\xi}{\eta}(\eta + \xi)^2 = 0, \\
 S \text{ soliton} \quad & 2(\eta + \xi)q_0 x + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) t + \ln \frac{\eta}{\xi}(\eta + \xi)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

で与えられる。振幅は時間的に一定でなく、(35) を用いて

$$\begin{aligned}
 Q_x \text{ soliton} \quad & -\frac{\eta^2 + \xi^2}{2\eta\xi}, \\
 R \text{ soliton} \quad & -\frac{\widehat{K}_0}{2\xi^2} \left[\frac{\xi}{\eta}(\eta + \xi)^2\right]^{\frac{\eta}{\eta+\xi}} \exp\{-2(\xi - \eta)q_0 x_0\}, \\
 S \text{ soliton} \quad & -\frac{K_0}{2\eta^2} \left[\frac{\eta}{\xi}(\eta + \xi)^2\right]^{\frac{\xi}{\eta+\xi}} \exp\{2(\xi - \eta)q_0 x_0\}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

で与えられる。図 2, 3 に振幅の時間的変化を示す。

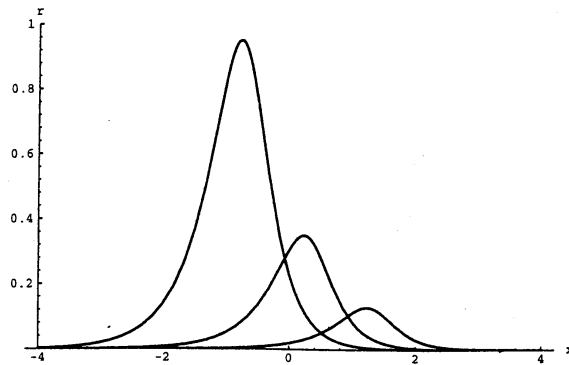


Figure 2: Time evolution of R soliton propagating negative direction with $\eta = 1$, $\xi = 1.5$, $K_0 = -1$ and $q_0 = 1$ at $t = -5$, -2 and 1 .

もし、 $\widehat{C}_0 = 0$ に取れば、1R ソリトンの波形は指数形となり、S ソリトンは 0 ソリトン解となる。 Q_x ソリトンは一定値となる。

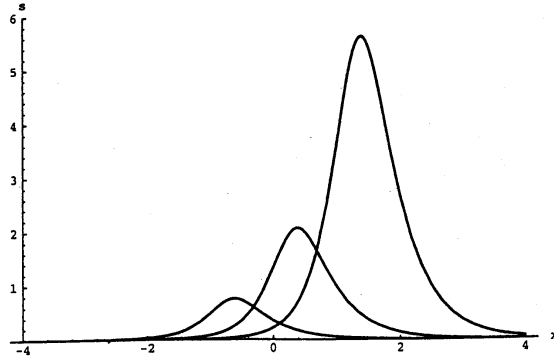


Figure 3: Time evolution of S soliton propagating negative direction with $\eta = 1$, $\xi = 1.5$, $\widehat{K}_0 = -1$ and $q_0 = 1$ at $t = -5$, -2 and 1 .

また, $\eta = \xi$ と取ると $r = s[2]$ の結果を再現し, その時は R ソリトンは Q_x ソリトンと同様対称な定常解となる.

2 ソリトン解は, $a(\lambda)$ の零点を $i\eta_1$ と $i\eta_2$ に, $\widehat{a}(\lambda)$ の零点を $-i\xi_1$ と $-i\xi_2$ に取ることにより次のように与えられる:

$$q_x = q_0 \left(1 - 2 \frac{U_1 U_2}{T^2} \right), \quad r = -\frac{K_0 W_1}{q_0 T}, \quad s = -\frac{\widehat{K}_0 W_2}{q_0 T}. \quad (37)$$

ただし,

$$T = 1 + \frac{X_1 Y_1}{(\eta_1 + \xi_1)^2} + \frac{X_1 Y_2}{(\eta_1 + \xi_2)^2} + \frac{X_2 Y_1}{(\eta_2 + \xi_1)^2} + \frac{X_2 Y_2}{(\eta_2 + \xi_2)^2} + \left[\frac{(\eta_1 - \eta_2)(\xi_1 - \xi_2)}{(\eta_1 + \xi_1)(\eta_1 + \xi_2)(\eta_2 + \xi_1)(\eta_2 + \xi_2)} \right]^2 X_1 X_2 Y_1 Y_2, \quad (38)$$

$$U_1 = \frac{Y_1}{\xi_1} + \frac{Y_2}{\xi_2} - \frac{\eta_1(\xi_1 - \xi_2)^2}{\xi_1 \xi_2 (\eta_1 + \xi_1)^2 (\eta_1 + \xi_2)^2} X_1 Y_1 Y_2 - \frac{\eta_2(\xi_1 - \xi_2)^2}{\xi_1 \xi_2 (\eta_2 + \xi_1)^2 (\eta_2 + \xi_2)^2} X_2 Y_1 Y_2, \\ U_2 = \frac{X_1}{\eta_1} + \frac{X_2}{\eta_2} - \frac{\xi_1(\eta_1 - \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \xi_1)^2 (\eta_2 + \xi_1)^2} X_1 X_2 Y_1 - \frac{\xi_2(\eta_1 - \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \xi_2)^2 (\eta_2 + \xi_2)^2} X_1 X_2 Y_2, \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{Y_1}{\xi_1^2} + \frac{Y_2}{\xi_2^2} + \frac{\eta_1^2(\xi_1 - \xi_2)^2}{\xi_1^2 \xi_2^2 (\eta_1 + \xi_1)^2 (\eta_1 + \xi_2)^2} X_1 Y_1 Y_2 + \frac{\eta_2^2(\xi_1 - \xi_2)^2}{\xi_1^2 \xi_2^2 (\eta_2 + \xi_1)^2 (\eta_2 + \xi_2)^2} X_2 Y_1 Y_2, \\
W_2 &= \frac{X_1}{\eta_1^2} + \frac{X_2}{\eta_2^2} + \frac{\xi_1^2(\eta_1 - \eta_2)^2}{\eta_1^2 \eta_2^2 (\eta_1 + \xi_1)^2 (\eta_2 + \xi_1)^2} X_1 X_2 Y_1 + \frac{\xi_2^2(\eta_1 - \eta_2)^2}{\eta_1^2 \eta_2^2 (\eta_1 + \xi_2)^2 (\eta_2 + \xi_2)^2} X_1 X_2 Y_2,
\end{aligned} \tag{40}$$

及び

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= C_1(t) \exp(-2\eta_1 q_0 x), & X_2(t) &= C_2(t) \exp(-2\eta_2 q_0 x), \\
Y_1(t) &= \hat{C}_1(t) \exp(-2\xi_1 q_0 x), & Y_2(t) &= \hat{C}_2(t) \exp(-2\xi_2 q_0 x)
\end{aligned} \tag{41}$$

2 ソリトンの振舞の詳細は文献 [7] を参照下さい。

方程式 (1) の Lagrange 形式及び Hamilton 形式の議論は文献 [8] でされている。始に述べたようにその群論的考察は興味ある。一般化が出来る事が分かり文献 [9] で議論されている。

(1) の物理学的応用については今まで成されていない。これからの課題である。

References

- 1) K. Konno and H. Kakuata: J. Phys. Soc. Jpn **64** (1995) 2707.
- 2) K. Konno and H. Oono: J. Phys. Soc. Jpn **63** (1994) 377.
- 3) K. Konno: Applicable Analysis, **57** (1995) 209.
- 4) R. Hirota and S. Tsujimoto: J. Phys. Soc. Jpn **63** (1994) 3533.
- 5) K. Konno and H. Oono: J. Phys. Soc. Jpn **63** (1994) 3534.
- 6) V.P.Kotlyarov: J. Phys. Soc. Jpn **63** (1994) 3535.
- 7) K.Konno and H.Kakuata: J. Phys. Soc. Jpn. **65** No.3.
- 8) K.Konno and H.Kakuata: J. Phys. Soc. Jpn. **65** No.1.
- 9) K.Konno and H.Kakuata: J. Phys. Soc. Jpn. **65** No.2.