数理解析研究所講究録
949巻 1996年 264-273

Eady modelにおける孤立波--温帯低気圧発達のメカニズム

海洋科学技術センター　三寺　史夫　(Humio Mitsudera)

1. はじめに

温帯低気圧の研究はCharney(1947), Eady(1949)以来膨大な数のものがなされてきている。その中心となるのは傾圧不安定の理論で、地表付近のロスビー波と対流圏界面付近のロスビー波が共鳴を起こし振幅を互いに増大しあうことによって、低気圧が発達するというものである。多くの場合、固有値問題として正弦波型をした初期の微小擾乱が時間とともにいかなる成長をするのか、ということを問題とする。この時、波は構造を変えず振幅のみが増大するということが暗に仮定されている。

現実の大気では、微小擾乱から低気圧が発達することは滅多にない。むしろ対流圏界面付近で最も強い振幅を持つロスビー波が地上付近のフロント域に遭遇したために、地上付近の低気圧が急激に発達する、というケースが頻繁にある。したがって、鉛直方向の構造は時間とともに変化する。また、

対流圏界面のロスビー波は、東西方向には正弦波と言うよりは局在化した構造を持った渦と考える方が現実に近い。従来の固有値を求める方法ではこのような特徴を捉えることはできない。

ここでは、弱非線形性を考慮に入れ、地上付近と圏界面に捕捉された孤立ロスビー波の共鳴という見方で温帯低気圧発達のメカニズムを考察する。

式の導出など詳細は、Mitsudera(1994)を参照して頂きたい。

2. 定式化

Eady(1949)のモデルに弱非線形性を考慮に入れて定式化する。図1にモデルの概要を示す。xは水路に沿う方向、y

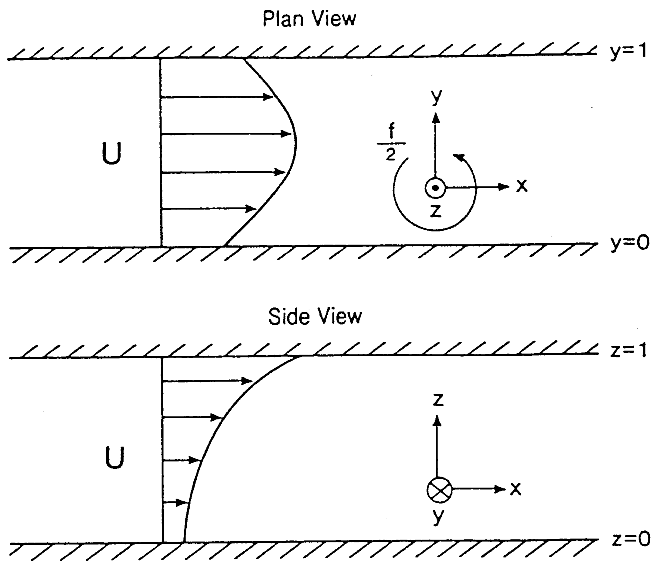

図1. モデルの座標系

は横切る方向、zは鉛直方向の座標を表す。準地衡流方程式を考え、水平及び鉛直シアーのある流れ$U(y,z)$があるものとする。ただし、内部での背景渦位の勾配はゼロ、すなわち

$$U_{yy} + (U_z/S)_z = 0 \tag{1}$$

とする。ここで、$S(z)$は成層度パラメータである。すると擾乱ψに対する方程式は、内部では

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + (\psi_z/S)_z = 0 \tag{2}$$

となり、上下の境界（$z=1$が圏界面、$z=0$が地表に相当）では

$$\psi_{zt} + U\psi_{zx} - U_z\psi_x + (\psi_x\psi_{yz} - \psi_y\psi_{xz}) = 0 \tag{3}$$

となる。ロスビー波はこれらの境界に存在する。実際の大気でも背景渦位は圏界面と地表に集中しており、Eady modelはかなりよく現実を模しているようである。

さて、長波近似を行い、さらに振幅の緩やかな変化を表す変数を次のように導入する。

$$X = \varepsilon x\ ,\quad T = \varepsilon t\ ,\quad \tau = \varepsilon^2 T \tag{4}$$

ここでε^{-1}は水路方向の特徴的な波長である。

つぎに、ψを

$$\psi = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} D_i(\theta,\tau)\phi_i(y,z) + \varepsilon^4\psi^{(1)} + \cdots \tag{5}$$

と展開する。

ここで、D_1は下層にD_2は上層に捕捉された波を表す。

$\theta = x - cT$ であり、 cは波長の位相速度である。

次のオーダーでは、KdV型の方程式

$$-I_i(D_{i\tau} + \Delta_i D_{i\theta}) + \mu_i D_i D_{i\theta} + \lambda_i D_{i\theta\theta\theta} + \gamma_i D_{j\theta} = 0 \qquad (6)$$
$$i \neq j, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2$$

を得る。 Δ_iは上層、 下層それぞれに捕捉されたロスビー波の位相速度の cからのずれ、 μ_iは非線形係数、 λ_iは分散係数、 γ_iはカップリング係数である。 詳しくは述べないが $\lambda_i > 0$, $\gamma_i > 0$を証明することが出来る。 I_iは上下の境界での背景渦位に関係する量である。 (6)に D_iを掛け積分をすると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{I_1 D_1^2}{\gamma_1} + \frac{I_2 D_2^2}{\gamma_2} \right) d\theta = 0 \qquad (7)$$

となり、 不安定は $I_1 I_2 < 0$ の時に生ずることがわかる。

さて、 カップリングを考えないとすると(6)は次のような孤立波解を持つ。

$$D_i = a_i \mathrm{sech}^2 k_i (\theta - c\tau) \qquad (8)$$

位相速度は

$$\Gamma_1 - \Delta_1 = -2I_1 \mu_1 a_1 = -4I_1 \lambda_1 k_1^2 \qquad (9)$$
$$\Gamma_2 - \Delta_2 = -2I_2 \mu_2 a_1 = -4I_2 \lambda_2 k_2^2$$

となり、 $I_1 \lambda_1 > 0$, $I_2 \lambda_2 < 0$なので振幅が大きくなるにしたがって上層の孤立波の位相速度は遅くなり、 下層の孤立波は速くなることがわかる。 カプリングを考慮した場合でも定常解は

可能だが、

$$|\Gamma_1 - \Gamma_2| < 2\sqrt{-\gamma_1\gamma_2 I_1 I_2} \qquad (10)$$

の場合には定常解は存在しない。実際には、この時に傾圧不安定が生じ、振幅が時間と共に増大するような解が存在する。

図2にカップリングを考えた場合の孤立波の数値計算例を示す。これは上層の振幅が大きいモードである。このモードは、振幅が大きくなるにしたがって位相速度は遅くなる。

図3に孤立波の衝突の様子を示す。孤立波が互いに近づくにしたがい振幅は大きくなり、お互いの位相速度がほとんど同じになる。このとき不安定条件(10)が満たされるため、振幅は増大することになる。振幅が充分大きくなると進行方向は最終的に逆転し、互いに離れる。一方、初期の振幅が小さいときには、衝突したときに充分大きくならないので、孤立波は互いにすり抜けてしまう（図は示さない）。これは孤立波の通常の衝突と同様な現象である。

3. 近似解：ブジネスク方程式

近似解はいくつか考えられるが、ここではブジネスク方程式を導き考察する。まず D_i、Δ_i $(i=1,2)$ を次のように展開する。

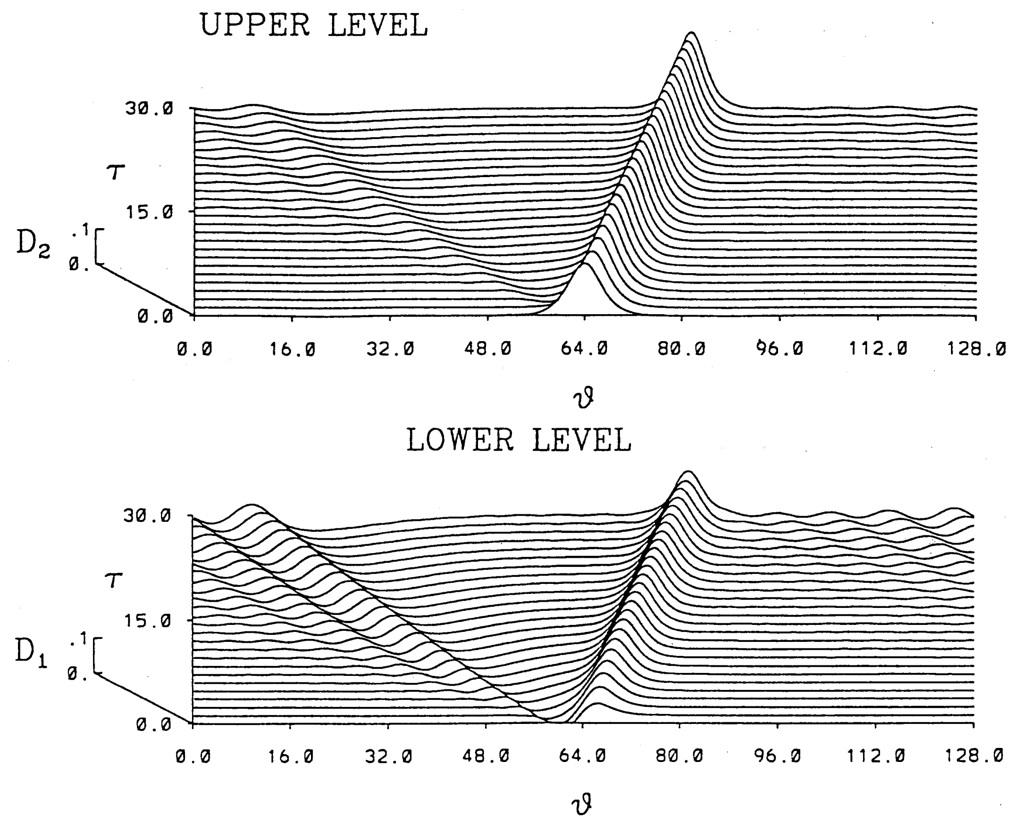

図 2.　上層に捕捉されたモードの例

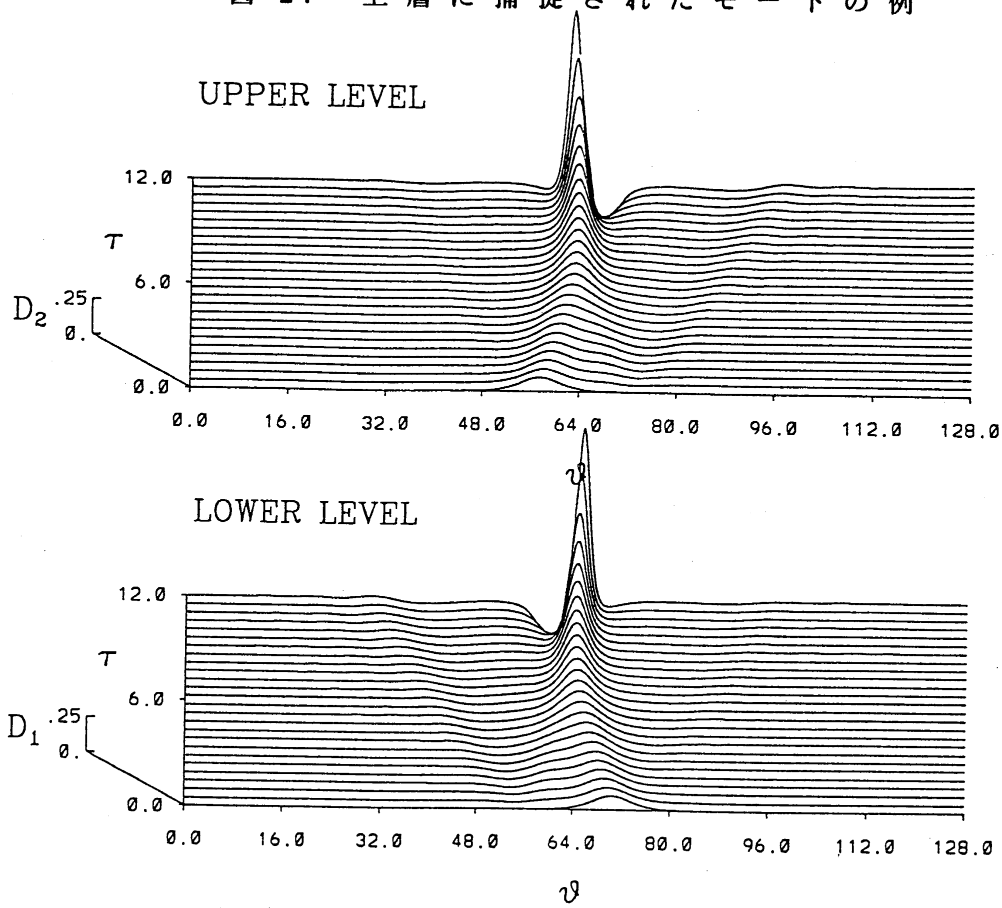

図 3.　衝突後、成長する解の例

$$D_i = \delta^2 D_i^{(0)}(\theta - cT) + \delta^3 D_i^{(1)} + \cdots \tag{11}$$

$$\Delta_i = \Delta_i^{(0)} + \delta^2 \Delta_i^{(1)} \tag{12}$$

次に、

$$\xi = \delta^2\theta, \quad s = \delta^2\tau \tag{13}$$

とおき、さらに適当なスケーリングの後、最終的に次のようにブジネスク方程式を得る。

$$\hat{D}_{ss} - \hat{\Delta}\hat{D}_{\xi\xi} + 6\left(\hat{D}^2\right)_{\xi\xi} + \hat{D}_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \tag{14}$$

ハット記号は、スケーリングをし直した後の変数を表す。

(12)には孤立波の安定解

$$\hat{D} = k^2 \mathrm{sech}^2 k(\xi - \hat{c}s) \tag{15}$$

$$\hat{c} = \pm\left(\hat{\Delta} - 4k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

が存在するが、振幅 k^2 が $\hat{D}/4$ を越える場合は時間とともに爆発的に成長する解

$$\hat{D} = k^2 \frac{1 - |M|^{\frac{1}{2}}\sinh\Omega \cosh\Omega s}{\cosh k\xi - |M|^{\frac{1}{2}}\sinh\Omega s}, \tag{16}$$

$$M = \frac{4k^2 - \hat{\Delta}}{k^2 - \hat{\Delta}}, \quad \Omega^2 = \hat{\Delta}k^2 - k^4$$

を得る(Yajima et al, 1983)。これは図3の数値解で振幅が臨界値を越えた場合に孤立波が急激な成長をする場合に対応する。

4. 低気圧発達との関連

日本近海および北米大陸上での冬場における急激な低気圧の発達は、通常、対流圏界面で大きな振幅をを持つ低気圧性擾乱が地上付近の弱い低気圧や前線に遭遇することによって生じる。図4に、初期に上層にのみ孤立波があった場合の数値実験で得られた結果（振幅と成長率の時間変化）を表す。下層の波動は上層の孤立波によって初期に一方的に強制を受けるので、振幅a_1は時間とともに線形に発達する。その後a_1が大きくなるにしたがい、成長率$\dot{a}_1/a_1$はほぼ一定となる。$\dot{a}_1$はa_1の時間微分である。この時a_1は指数関数的に増大していることになる。低気圧がこのように2段階の発達をすることは観測でも見いだされている(Buzzi and Tibaldi, 1978)。

以下、この2段階の発達について考察する。ここでは簡単のために上層の孤立波は振幅のみが時間変化すると仮定し、また下層の分散性も無視する。すると、下層の変動に対して

$$-(D_{1\tau} - \Delta_{ef} D_{1\Theta}) + 6\mu D_1 D_{1\Theta} + \gamma_1 D_{2\Theta} = 0 \qquad (17)$$

$$\Theta = \theta - \Gamma_2 \tau\ ,$$

$$\Delta_{ef} = \Gamma_2 - \Delta_1$$

を得る。$\tau=0$ では $D_1=0$なので、

$$D_1 \approx \tau\gamma_1 D_{2e} \tag{18}$$

となり、D_1は線形に発達することがわかる。一方、下層の擾乱が充分発達した時の解はD_2として孤立波解(8)を考えると、

$$D_1 \sim \Delta_{ef} + \sqrt{a_2\gamma_1\mu}\ \tanh l_2\Theta \tag{19}$$

となり、(17)に代入して積分をすると

$$\frac{\partial a_2}{\partial \tau} - \frac{4\gamma_2}{3}\left(\frac{\gamma_1\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a_2 = 0 \tag{20}$$

となることがわかる。したがって、a_2は指数関数的な発達の仕方となり、(19)よりa_1も指数関数的な発達をすることがわかる。このようにKdV型方程式から低気圧の2段階的な発達を説明することができる。

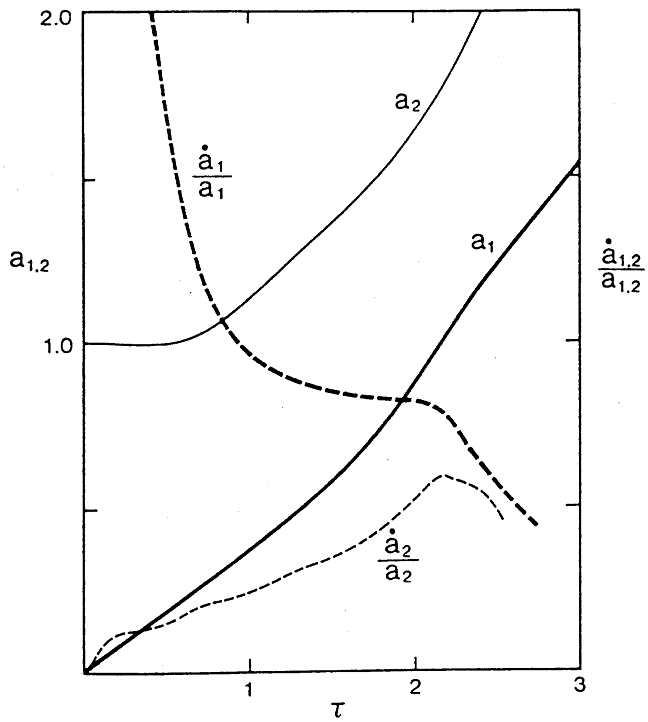

図4. 上層に大きな振幅の孤立波を入れた時の
振幅及び成長率の時間変化

参考文献

Buzzi, A and S. Tibaldi, 1978, Quart. J. roy, Meteor. Soc., 104, 271-287.

Charney. J, 1947, J. Meteor., 4, 135-163.

Eady, E. T., 1949, Tellus., 1, 33-4452.

Mitsudera, H., 1994, J. Atmos. Sci., 51, 3138-3154.

Yajima, N., M. Kono, and S. Ueda, 1983, J. Phys. Soc. Japan,. 52, 3414-3427.