数理解析研究所講究録
949巻 1996年 40-50

強磁場における磁性流体自由表面波の解析

北大工学部 水 田 洋 (Yo Mizuta)

1 はじめに

磁場が磁性流体の自由表面に生じる波動は，自身の流れによって様々な現象を表す通常の流体とは対照的に，外部から非接触的に及ぼされる作用によって生じる流体現象の典型例である．それと共に，強磁場のもとでのその特異な形状のため，1960年代に現在のような磁性流体が発明された直後から関心を持たれ，理論解析も行われた．

まず線形理論によって，一様定常磁場のもとでの界面振動の固有周波数の変化や安定性が調べられた [1, 2]．その後，弱非線形理論による1次元波動伝播の解析が行われ，導かれたK-dV方程式 [3, 4] あるいは非線形Schrodinger方程式，連立方程式系 [5, 6, 7, 8] の解の性質が調べられた．一方，平らな2次元界面が鉛直磁場の増加で四角あるいは六角格子状に変形する過程が，エネルギー的考察 [9] あるいは分岐理論 [10, 11] で調べられている．

以上の解析は，磁性流体表面波動の解析を基礎づける上で重要であるが，適用範囲が線形あるいは弱非線形に限られたり，一様定常磁場が仮定されているため，最初に述べた「強磁場のもとでの特異な形状」の再現からは隔たりがある．しかし最近，定常表面張力波の理論で使われる等角写像法 [12, 13, 14] が，表面形状の変化にともなう磁場の変化を取り入れて，強非線形，多価な自由表面形状を表現するのに有効で，しかも非一様な磁場を考慮するのも容易であることが明らかになった．より現実的な波動解析に向けて，更に3次元化，時間発展などについて考察を進めているが，本稿では，

これらの現状を報告する.

2 基礎方程式—力学的境界条件

磁性流体の密度, 速度ポテンシャル, 流速, 圧力をρ, ϕ, $\boldsymbol{v}=-\nabla\phi$, p, 自由表面の変位と表面張力を η, p_{t}, 重力加速度を g, 自由表面における磁束密度の法線成分と磁場の接線成分を b_{n}, h_{s}, 透磁率と表面を横切る値の跳びを μ, $[\cdots]$ と表せば, 渦なしの Bernoulli の定理より

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+g\eta\right)+p+p_{\mathrm{t}}-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{\mu}\right]b_{\mathrm{n}}^2-[\mu]h_{\mathrm{s}}^2\right)=\mathrm{const.} \tag{1}$$

が導かれる. 圧力を 0 と置くことで式 (1) は力学的境界条件となるが, ここでは定常性を仮定して更に $\phi=0$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ と置く. これにより式 (1) は, 重力, 表面張力, 磁気力のつりあいを表すことになる.

3 等角写像法

ここでは等角写像法を用いて, 自由表面が曲がっている real space と自由表面を平らとする flat space の間の写像変換を構成する. 等角写像法は, 定常表面張力波の理論では速度ポテンシャルと流れ関数の調和性を生かすものであったが [14], ここで論じる磁性流体自由表面波の問題では, 磁気ポテンシャルの調和性を利用することになる.

real space と flat space を複素平面 $z=x+iy$, $Z=X+iY$ で表すと, それぞれの平面内の自由表面に沿った相対応する微小要素 $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}Z$ の間には, real space における自由表面の傾斜角 θ を通じて $\mathrm{d}z=ce^{i\theta}\mathrm{d}Z$ (c は正の実数) という関係がある. $c=e^{-\tau}$ で導入される自由表面の対数収縮率 τ を用

いてこれを書き換えた

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z = e^{i[\theta(Z)+i\tau(Z)]} \tag{2}$$

から写像関係式 $z = z(Z)$ が導かれる．特に，式 (2) の実部，虚部

$$\partial x/\partial X = e^{-\tau}\cos\theta, \quad \partial y/\partial X = e^{-\tau}\sin\theta \tag{3}$$

それぞれを，$Y = 0$ に固定して X で積分すれば，媒介変数表示による自由表面形状 $x = x(X)$, $y = y(X)$ が得られるが，この表現は自由表面形状が多価になる場合に有効である．したがって問題は，θ, τ を求めることに帰着される．

ところで等角写像は，特別な点を除いて $z(Z)$ あるいは $\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z$ が解析的であることを前提としているが，これは $\theta(Z) + i\tau(Z)$ に対しても同じである（より厳密である）．これに更に $Z \to \infty$ で $\theta + i\tau \to 0$ という条件（これは無限遠で $\mathrm{d}z = \mathrm{d}Z$ を意味する）を加えると，θ と τ は Hilbert 変換

$$\tau(X) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(X')}{X'-X}\mathrm{d}X' \tag{4}$$

を通じて相互に依存することが言える．ここで特別な点とは，$\tau \to \infty$，すなわち $\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z \to 0$ となる点を意味する．これは z平面の branch point であり，実際にはθ が不連続な cusp である．数値解析では cusp はないものとしているが，これについてはまた後で触れる．

4　双極子磁場の決定

θ および τ が従う方程式は式 (1) から導くことができるが，これを解いて自由表面形状を求めるには，具体的な磁場を与える必要がある．そのための基礎として，Z平面内で透磁率の異なる 2 媒質（μ_1 : 磁性流体, μ_2 : 真空）

間の無限平面境界近くに置いた磁気単極子による磁場を求める．無電流定常磁場領域では，Z平面において Laplace 方程式を満たすスカラーポテンシャル $\Phi(Z)$ およびベクトルポテンシャル（の z 成分）$A(Z)$ が存在して，複素磁気ポテンシャル $W(Z)=(A(Z)/\mu)+i\Phi(Z)$ を定義できるが，これは z平面において $w(z)=W(Z(z))\equiv(a(z)/\mu)+i\varphi(z)$ と見て使うことができる．なお磁束密度と磁場はこれらのポテンシャルより，$\boldsymbol{B}=(B_X,B_Y)=\nabla\times\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{H}=(H_X,H_Y)=-\nabla\Phi$ と求められる．

透磁率 μ の無限媒質中の点 Z_0 に磁極 m を置くと，点 Z で観測される磁気ポテンシャルは，$W=(im/\mu)\ln(Z-Z_0)=(im/\mu)\{\ln R+i(\pi/2-\Theta)\}$ $(Z-Z_0=Re^{i(\pi/2-\Theta)})$ となる．ところで無限平面境界では，磁束密度の法線成分と磁場の接線成分に連続条件 $[-B_Y]=[\partial A/\partial X]=0$, $[-H_X]=[\partial\Phi/\partial X]=0$ が成り立っており，Φ および A は，これらと等価な

$$[A]=\text{const.},\quad [\Phi]=\text{const.} \tag{5}$$

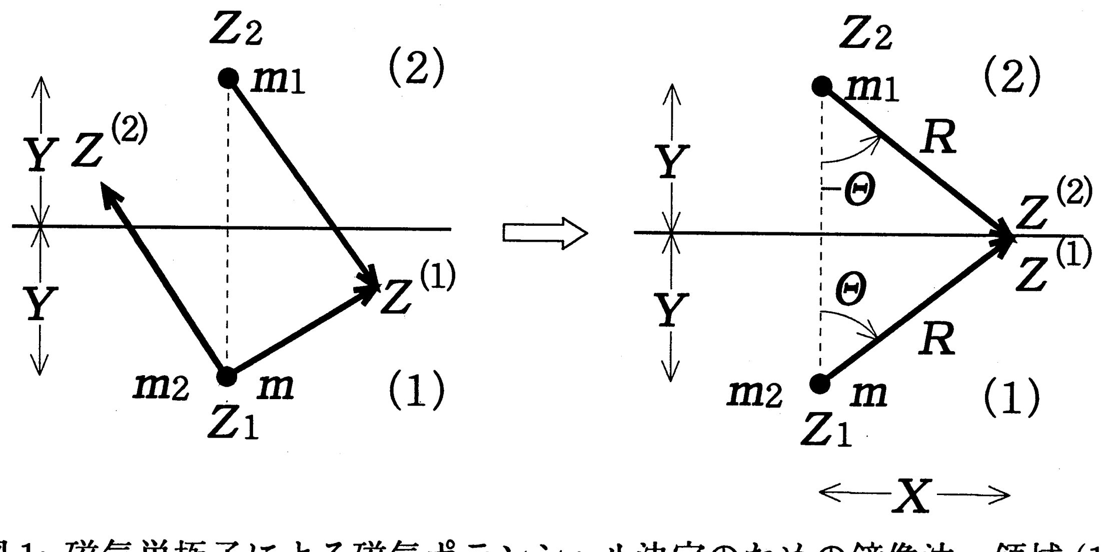

図 1: 磁気単極子による磁気ポテンシャル決定のための鏡像法．領域 (1) では m(Z_1上) と m_1(Z_2上) より，領域 (2) では m_2(Z_1上) より磁気ポテンシャルを構成し（左図），境界面上の点 $Z^{(1)}=Z^{(2)}=Z_1+X+iY=Z_2+X-iY$ で連続条件 (5) を満たすように m_1, m_2を定める（右図）．

を満たす必要がある．このため，μ_1 内の点 Z_1 にある磁気単極子 m の他に，Z_1 上およびその鏡像点 Z_2 上の仮想的な磁極 m_2, m_1 を考え，μ_1 内では m と m_1 から，μ_2 内では m_2 から各領域内のポテンシャル $W^{(1),(2)} = (A^{(1),(2)}/\mu_{1,2}) + i\Phi^{(1),(2)}$ を構成し，境界面で連続条件 (5) を満たすように m_1, m_2 を定める（鏡像法，図 1参照）．その結果，$m_1 = (\mu_1 - \mu_2)m/(\mu_1 + \mu_2)$, $m_2 = 2\mu_2 m/(\mu_1 + \mu_2)$ が求められ，これにより $W^{(1),(2)}$ が決まるが，特に境界上では式 (5) より両領域のポテンシャルは相等しく（したがってこれ以後境界上では $W^{(1)}$ と $W^{(2)}$ を区別しない），次のようになる．

$$\frac{A}{\mu_2} + i\Phi = \frac{m_2}{\mu_2}\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) + i\ln R\right\}, \tag{6}$$
$$R \equiv \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \Theta \equiv \tan^{-1}(X/Y).$$

ただし，Y は磁極から境界面までの距離，X は磁極から境界面へおろした垂線の足から境界上の観測点までの距離である．

実際の問題に広く現れる磁気双極子は，強さが等しく極性が反対でわずかに離れた 2 つの磁極による．両極が鉛直方向に ΔY だけ離れている場合，磁気ポテンシャルは，式 (6) より次のようになる．

$$\frac{A}{\mu_2} + i\Phi = -\Delta Y \frac{\partial}{\partial Y}\frac{m_2}{\mu_2}\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) + i\ln R\right\} = \frac{m_2^*}{\mu_2}\frac{X - iY}{R^2}, \tag{7}$$
$$m_2^* \equiv m_2 \Delta Y.$$

式 (1) における磁束密度の法線成分と磁場の接線成分は，自由表面において接線微分が $\dfrac{\partial}{\partial s} = \dfrac{\partial X}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial X} = -e^{\tau}\dfrac{\partial}{\partial X}$ となることに注意すれば，

$$\begin{cases} b_{\mathrm{n}} = \dfrac{\partial a}{\partial s} = -e^{\tau}\dfrac{\partial A}{\partial X} = e^{\tau} m_2^* \dfrac{X^2 - Y^2}{R^4}, \\ h_{\mathrm{s}} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} = e^{\tau}\dfrac{\partial \Phi}{\partial X} = e^{\tau}\dfrac{m_2^*}{\mu_2}\dfrac{2XY}{R^4} \end{cases} \tag{8}$$

と求められる．

5　θ および τ に対する方程式

式 (1) の両辺を X で 1 階微分して式 (8) を代入し，式 (3) より得られる $\dot{\eta} = e^{-\tau}\sin\theta$, $p_{\mathrm{t}} = \gamma(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = -\gamma e^{\tau}\dot{\theta}$ ($\dot{} \equiv \partial/\partial X$, $\ddot{} \equiv \partial^2/\partial X^2$, γ: 表面張力係数) を使って

$$
\begin{aligned}
&e^{-\tau}\sin\theta - \frac{\gamma}{\rho g}\frac{\partial}{\partial X}\left(e^{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial X}\right) \\
&-\frac{(m_2^*)^2}{2\rho g}\left[\frac{1}{\mu}\right]\frac{\partial}{\partial X}e^{2\tau}\left\{\left(\frac{X^2 - Y^2}{R^4}\right)^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{2XY}{R^4}\right)^2\right\} = 0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

が導かれるが，X/Y を X と置き直して，式 (9) はさらに

$$
e^{-3\tau}\sin\theta - \Gamma e^{-\tau}(\tau'\theta' + \theta'') - M(2\tau' G + G') = 0 \qquad (10)
$$

と変形される．ただし，$\tau' \equiv \partial\tau/\partial X$, $\tau'' \equiv \partial^2\tau/\partial X^2$, $G(X) \equiv 1/(X^2 + 1)^2 + dX^2/(X^2 + 1)^4$, $d \equiv -4[\mu]/\mu_2$. ここで，式 (10) 左辺各項は順に重力，表面張力，磁気力を表し，張力パラメータ $\Gamma \equiv \gamma/\rho g Y^2$ と磁気パラメータ $M \equiv (m_2^*)^2[1/\mu]/2\rho g Y^5$ が各項の大きさを支配している．式 (10) を解く際には，表面形状が原点に関して対称的で原点で解析的（すなわち原点で平ら），原点より充分離れた点 $X = l$ で表面が平らになることを仮定して，境界条件 $\theta(X = 0) = \theta(X = l) = 0$ を用いる．

6　スペクトル選点法による数値解析

式 (10) の数値解を求めるため，$\theta(X)$ を以下のような Fourier 級数に展開する．この Fourier 級数は境界条件を満たしている．このとき $\tau(X)$ も，Hilbert 変換 (4) を満たすよう，以下のように展開する．

$$
\theta(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi X}{l}, \quad \tau(X) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi X}{l}. \qquad (11)
$$

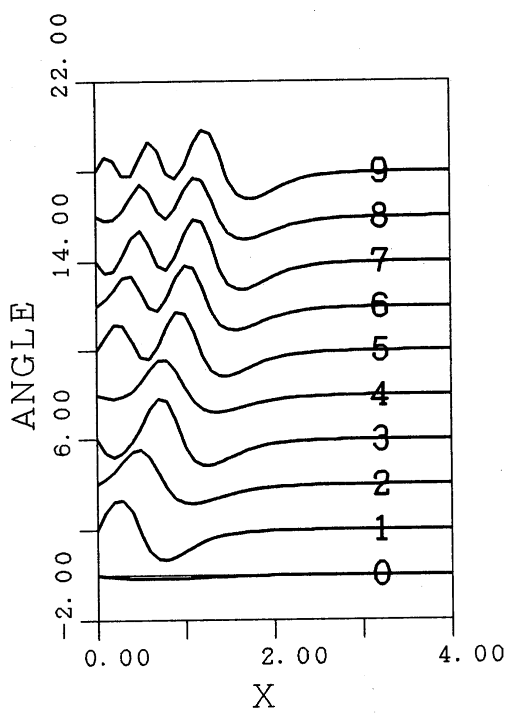

図 2: M =0.2 (0), 0.4 (1), 0.6 (2), 0.8 (3), 1.0 (4), 1.2 (5), 1.4 (6), 1.6 (7), 1.8 (8), 2.0 (9) および $\Gamma = 0.2$, $d = 1.6$ に対する傾斜角関数 $\theta(X)$

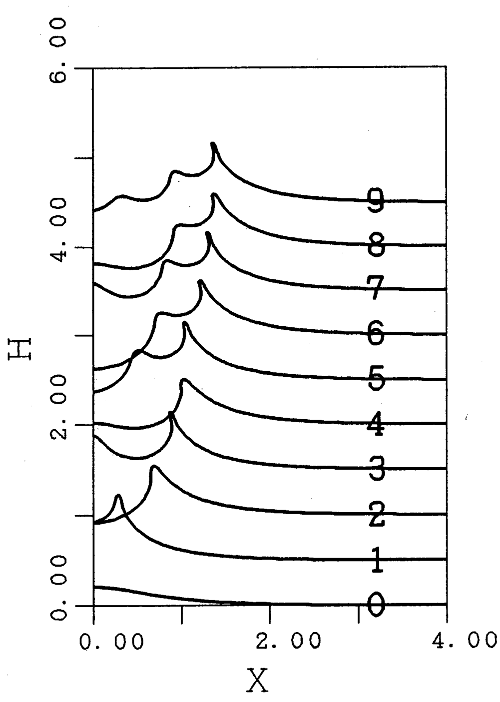

図 3: 図 2の$\theta(X)$ より求めた自由表面形状

級数を第 n 項までで打ち切ったとき，選点 $X_i = il/(N+1)$ $(1 \leq n \leq N)$ において

$$\epsilon(\{a_n\}) \equiv e^{-3\tau} \sin\theta - \Gamma e^{-\tau}(\tau'\theta' + \theta'') - M(2\tau' G + G') = 0 \qquad (12)$$

が満たされるように展開係数 a_n $(1 \leq n \leq N)$ を決める．このために，減速法を入れた Newton-Raphson 法で n 元連立非線形方程式を解いた．このときの初期状態は，全ての n について $a_n = 0$ である．収束は，繰り返し回数 50 回以内で，式 (12) 中の最大項の 2%以下まで $|\epsilon|$ を到達させることができた．$\Gamma = 0.2$, $d = 1.6$, $l = 5.0$, $N = 49$ として，M を 0.2 から 2.0 まで 0.2 刻みで変化させたときの傾斜角関数 $\theta(X)$ の計算結果を図 2に，また，これ

を 4 次精度の Runge-Kutta 法 ($\Delta X = 0.02$) で積分して求めた自由表面形状 $x = x(X)$, $y = y(X)$ を図 3に示す．収束が遅い場合，途中で a_n に摂動を加えたが，摂動の加え方によっては，非線形性のために別の解に収束する場合があり，注意を要する．図 4はその一例で，得られた表面形状は，自己交差解となっている．

図 2および 3からは，次のことがわかる．まず，磁場が増えると，中央付近で生成された波は次々と外向きに移動するが，波の存在領域の大きさは飽和傾向にあるため，波の波長は，磁場の増加と共に短くなる．また，最も外側の波は，しばしば 3 価になったり，cusp に近くなる．

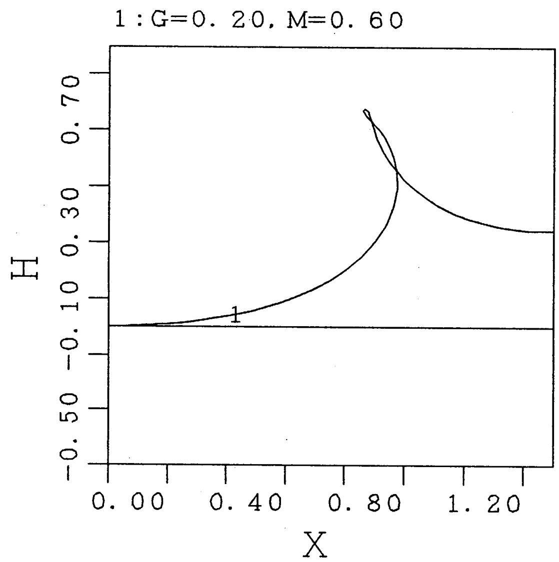

図 4: $\Gamma = 0.2$, $M = 0.6$ の場合の自己交差解の例

波数の増加と波長の減少は，傾斜角関数でより明瞭に見て取れる．傾斜角関数の振幅は外側の波ほど大きいが，この振幅が $\pm\pi/2$ を越えたとき，自由表面形状が多価になる．

ここで式 (10) に対して，簡単な解析を行う．ただし $G(X)$ は，1 のオーダーの定数のように扱う．式 (10) を線形化すれば $\theta - \Gamma\theta'' - 2MG\tau' = 0$ となるが，これに $\theta \simeq \sin kX$, $\tau \simeq -\cos kX$ を代入して k について解くと，$k = (MG \pm \sqrt{(MG)^2 - \Gamma})/\Gamma$ が得られる．これから，M が $\sqrt{\Gamma}/G$ (今の場合約 0.45) を横切って増加すると，θ, $\tau \neq 0$ とする実の k が存在するような分岐が起こること，また k は M と共に増加することがわかり，数値解析の結果をほぼ説明するものになっている．

次に，式 (10) に基づいて cusp の可能性を調べてみよう．既に述べたように，cusp が生じるのは $\tau \to \infty$ の場合である．このとき式 (10) の重力項を無視して X で 1 回積分すると，$-e^{-\tau}\theta' \simeq MG/\Gamma$ が導かれる．これより $\theta' < 0$ となり，cusp があればそれは上に尖ったものであることが言える．次に，この式の両辺の対数をとれば $\ln(-\theta') - \tau \simeq \ln(MG/\Gamma)$ となるが，有限の X で右辺は有界なので，τ が発散する場合，これは $\ln(-\theta')$ と打ち消しあうことが必要になる．しかし，$-\theta'$ 自身の振る舞いが τ と類似していれば（これは式 (11) からも予想される），この打ち消しは不可能である．したがって，cusp に近い自由表面形状は現れても，真の cusp が存在する可能性は少ないように思われる．

7 そのほかの発展

ここまでは，強磁場における磁性流体の自由表面形状が，強非線形，多価な領域に至るまで，等角写像法で求められることを示した．自由表面波の解析をより現実的なものに近づけるためには，3 次元化および時間発展の取り込みが必要である．

ここで用いた等角写像法は，そのままの形で 3 次元の理論解析に用いることはできないが，部分的に利用することはできる．現在それに先立って，数値解析の 3 次元化を進めている．磁性流体自由表面波の数値解析では，磁場の作用で移動する自由表面を考慮した流体解析と，自由表面の移動で変化する磁場の解析を交互に行うが，その 2 次元解析は既に経験した．問題となるのは，磁場が強くなった場合に複雑な自由表面形状をうまく捉えること，計算の安定性を確保することである．また，磁場から磁性流体への作用の取り入れ方に，面積力，体積力という選択の余地がある．

磁性流体が二層で自由表面波と密度界面波があったり，また交流磁場が共鳴的にこれらの波動を生じる場合の線形解析については，この研究集会でも何回か発表したが [15, 16, 17]，現在，これらの解析と本稿で述べた方法との関連付けを進めている．

参考文献

[1] M.D.Cowley and R.E.Rosensweig: The interfacial stability of a ferromagnetic fluid; J. Fluid. Mech., **30**, pp.671–688 (1967).

[2] R.E.Zelazo and J.R.Melcher: Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions; J. Fluid. Mech., **39**, pp.1–24 (1969).

[3] V.Bashtovoi, A.Rex and R.Foiguel: Some nonlinear wave processes in magnetic fluid; J. Magn. & Magn. Mater., **39**, pp.115–118 (1983).

[4] V.G.Bashtovoi and R.A.Foigel': Solitary and cnoidal waves in ferrofluid; Magn. Gidrodin., **19**, pp.55–60 (1983).

[5] S.K.Malik and M.Singh: Nonlinear instability in superposed magnetic fluids; J. Magn. Magn. Mater., **39**, pp.123–126 (1983).

[6] S.K.Malik and M.Singh: Nonlinear dispersive instabilities in magnetic fluids; Q. Appl. Math., **42**, pp.359–371 (1984).

[7] S.K.Malik and M.Singh: Modulational instability in magnetic fluids; Q. Appl. Math., **43**, pp.57–64 (1985).

[8] S.K.Malik and M.Singh: An explosive instability in magnetic fluids; Q. Appl. Math., **50**, pp.613–626 (1992).

[9] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a magnetic fluid in an magnetic field; J. Fluid Mech., **82**, pp.401– (1977).

[10] E.Twombly and J.W.Thomas: Mathematical theory of non-linear waves on the surface of a magnetic fluid; IEEE Trans. Magn., **MAG-16**, pp.214–220 (1980).

[11] E.E.Twombly and J.W.Thomas: Bifurcating instability of the free surface of a ferrofluid; SIAM J. Math. Anal., **14**, pp.736–766 (1983).

[12] H.Okamoto: On the problem of water waves of permanent configuration; Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., **14**, pp.469–481 (1990).

[13] H.Okamoto and M.Shoji: Normal forms of the bifurcation equations in the problem of capillary-gravity waves; 京都大学数理解析研究所講究録「流体中の非線形波動の数理的側面」, **740**, pp.208–242 (1991).

[14] 岡本　久: 定常表面張力波について; ながれ, **13**, pp.184–195 (1994).

[15] 水田　洋: 表面と界面のある磁性流体の理論解析; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **830**, pp.226–235 (1993).

[16] 水田　洋: 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **866**, pp.263–276 (1994).

[17] 水田　洋: 不均一磁場における磁性流体界面波動の解析; 京都大学数理解析研究所講究録「流体の非線形波動現象の数理とその応用」, **908**, pp.225–236 (1995).