数理解析研究所講究録
950 巻 1996 年 39-45

ある制限されたチャイニーズ・ポストマン問題の計算量

東京電機大学　遠山宏明　(Hiroaki Tohyama)
東京電機大学　足立暁生　(Akeo Adachi)

1 まえがき

チャイニーズ・ポストマン問題とは郵便配達員が手紙を配達するときにできるだけ短い距離を歩いて出発点に戻る道を求める問題である．配達員は担当区域内の各道路を少なくとも一回は通らなければならず，同じ道路を何度も通らないようにすることが望まれる．"コスト k以下"という制限を科せられることもある．

チャイニーズ・ポストマン問題は管梅谷 (Mei-Ko, K.) によって議論された問題であり[5]，オイラー閉路問題の一般化と考えられる．混合グラフの上でのチャイニーズ・ポストマン問題 (CPP) は **NP** 完全であることが Papadimitriou によって示されている[6]．すなわち，混合グラフ $G=(V,E,A)$，距離関数 $d: E\cup A\rightarrow \mathbf{N}$，および定数 $k\in\mathbf{N}$ が与えられたとき，G が k以下の配達路をもつか否かを決定する問題は **NP** 完全である．

Papadimitriou はさらに，辺の長さが一定である混合グラフ，平面混合グラフ，および次数 3 の混合グラフに対する CPP も **NP** 完全であることを示している[6]．しかし，グラフを有向グラフに制限すれば CPP は $O(n^5)$ 時間[1),4),6)]で，無向グラフに制限すれば $O(n^3)$ で解くことができる[2),6)](n は頂点数).

ある問題の計算量が，その問題への制限の付け方によってどのように変化するかを見ることは興味あることである．本論文では，各辺の通行回数を"高々2回"に制限しても混合グラフの上の CPP は依然として **NP** 完全であり，"ちょうど 1 回"に制限すると，CPP は多項式時間で計算できることを示す．

NP 完全な決定問題に対応する数え上げ問題がもとの問題より易しくないことは明かである．Valiant はいくつかの **NP** 完全問題に対応する数え上げ問題を研究し，それらが **NP** より難しいクラスに属することを証明した[7),8)]．実際，彼の定義した#**P** 完全問題は，**P**=**NP** を仮定したとしても手に負えない問題である．たとえば，ハミルトン閉路問題に対応する数え上げ問題，すなわち，与えられたグラフが何個のハミルトン閉路を含むかを求める問題は，#**P** 完全である．現在のところ，**NP** 完全問題に対応する数え上げ問題で，**NP** に属するものは報告されていない．本論文では，2 つの配達路において，各辺の通行回数がすべて同一であるならば，それらは同一の配達路であると見なしたとしても，2-CPP における配達路の数を決定する問題は#**P** 完全であることを示す．ただし，通行回数が同一であるとは，2 つの配達路において，すべての辺 (u,v) は u から vへの通行回数が等しく，かつ vから u への通行回数が等しいときをいう．

さらに，与えられた G と kに対して，コスト k以下で配達地域をすべて回るためには同一の辺を少なくとも何回通らなければならないかを決定する問題は，多項式時間階層のクラスΔ_2^pに属することを示す．

2 準備

定義 1 $G=(V,E,A)$ を混合グラフとする．ここで，Vは頂点の有限集合，$E\subseteq\{\{u,v\}|u,v\in V\}$ は無向辺の集合，$A\subseteq V\times V$は有向辺の集合である．今後，無向辺 $\{u,v\}$ は有向辺と同様 (u,v) と書くものとし，単に辺という場合は，無向辺または有向辺を示すものとする．辺の列 $P:(v_1,v_2),(v_2,v_3),\cdots,(v_{m-1},v_m)$ を G 上の頂点 v_1から v_mへの道という．また，道 P が閉路であるとは，$v_1=v_m$のときをいう．道 Pにおける辺 (u,v) の通行回数とは，Pに含まれる (u,v) の数とする (ただし，(u,v) が無向辺の場合は，(v,u) の数も含むものとする)．道 Pの最大通行回数 C_Pを次のように定義する:

$$C_P \;=\; MAX(\{l_e|l_e\text{は道 }P\text{における }e\in E\cup A\text{ の通行回数}\}).$$

定義 2 $G=(V,E,A)$ を連結な混合グラフ，$d: E\cup A\rightarrow\mathbf{N}$ を距離関数とする．道 Pが G の配達路であるとは，Pが G のすべての辺を少なくとも 1 回含むような G の閉路であるときをいう．$c=\sum_{i=1}^{m-1}d(v_i,v_{i+1})$

$-\sum_{(u,v)\in E\cup A} d(u,v)$ を配達路 Pのコストとする:

定義 3 チャイニーズ・ポストマン問題(CPP)とは，連結な混合グラフ $G=(V,E,A)$，距離関数 $d: E\cup A\rightarrow \mathbf{N}$，定数 $k\in\mathbf{N}$ が与えられたとき，G がコスト k以下の配達路を持つか否かを決定する問題である．通行回数を m に限定したチャイニーズ・ポストマン問題(m-CPP)とは，G がコスト k以下で最大通行回数 m 以下の配達路を持つか否かを決定する問題である．

定義 4 $G=(V,E,A)$ を混合グラフ，$d: E\cup A\rightarrow\mathbf{N}$ を距離関数，$k\in\mathbf{N}$ を定数とする．また，Pを G の上のある配達路とし，関数 $n_P: V\times V\rightarrow\mathbf{N}$ を次のように定義する:

$$n_P(a,b)=\begin{cases} m & , \text{辺 }(a,b)\text{ が存在し,}P\text{において }(a,b)\text{ は }a\text{ から }b\text{ に向かって }m\text{ 回通行するとき;} \\ 0 & , \text{辺 }(a,b)\text{ が }G\text{ に存在しないとき（辺 }(b,a)\text{ が }G\text{ の有向辺であるときも含む).}\end{cases}$$

集合 $D^m_{G,d,k}$を次のように定義する:

$$D^m_{G,d,k} = \{P|P\text{は }G\text{ の上のコスト }k\text{以下で最大通行回数 }m\text{ 以下の配達路}\}.$$

関係 $R^m\subseteq D^m_{G,d,k}\times D^m_{G,d,k}$を次のように定義する:

$$_PR^m{}_{P'} \iff P,P'\in D^m_{G,d,k}\text{かつ},\forall(a,b)\in V^2, \quad n_P(a,b)=n_{P'}(a,b).$$

定義 5 $\#m$-CPP とは，与えられた G,d,kに対して，コスト k以下で最大通行回数が m 以下の異なる配達路の数を決定する問題である．ただし，2 つの配達路 Pと P'に対して$_PR^m{}_{P'}$ならば，Pと P'は同一であると見なす．すなわち，$\#m$-CPP とは，次の関数 g_mを計算する問題である:

$$g_m(G,d,k)=|D^m_{G,d,k}/R^m|.$$

定義 6 最小通行回数問題とは，与えられた混合グラフ $G=(V,E,A)$，距離関数 $d: E\cup A\rightarrow\mathbf{N}$，定数 $k\in\mathbf{N}$ に対して，G 上のコスト k以下の配達路の最大通行回数の最小値を求める問題である．すなわち，次の関数 f_{min}を計算する問題である:

$$f_{min}(G,d,k)=\begin{cases} 0 & , G\text{ がコスト }k\text{以下の配達路を持たないとき,} \\ l & , \text{そうでないとき.}\end{cases}$$

ただし，$l=MIN(\{C_P|P\text{は }G\text{ 上のコスト }k\text{以下の配達路で, }C_P\text{は }P\text{の最大通行回数}\})$ とする．

3 本論

2-CPP の **NP** 完全性を示すために，はじめに，ある有用な"辺"を構成する．与えられるグラフの各辺は，少なくとも 1 回は通行しなければならず，高々2 回しか通行できない．したがって，配達路のコストは，定義より，あるコスト kの辺を 1 回目に通行するときはコスト 0，2 回目に通行するときはコスト kかかるものとして計算できる．すると，コスト kが割り当てられた有向辺 (u,v) は，2 つの通行方法が存在する: (i) コスト 0 で u から vへちょうど 1 回通行する; (ii) コスト kで u から vへ 2 回通行する．同様に，コスト kが割り当てられた無向辺 (u,v) は，5 つの通行方法が存在する: (i) コスト 0 で u から vへちょうど 1 回通行する; (ii) コスト 0 で vから vへちょうど 1 回通行する; (iii) コスト kで u から vへ 2 回通行する; (iv) コスト kで vから u へ 2 回通行する; (v) コスト kで u と vを 1 回往復する．

図 1(a) に示すグラフのすべての辺を高々2 回の通行回数で通行することを考える．$t>0$ と仮定する．考える通行方法は次の 3 種類に分けられる:

1. コスト $k+t$ ですべての辺を通行する方法．この方法は u から vに向かう道 u, s_1, s_2, s_3, s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, s_4, s_5, s_6, v だけである．
2. コスト $l+t$ ですべての辺を通行する方法．これは vから u に向かう道 v, s_6, s_4, s_5, s_6, s_4, s_2, s_3, s_1, s_2, s_3, s_1, u だけである．
3. コスト $m+t$ ですべての辺を通行する方法．これには次のような 5 種類の通行方法が存在する;

・u から vに向かう道 u, s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, vと，vから u に向かう道 v, s_6, s_4, s_2, s_3, s_1, u;
・u と s_1の間を往復する道 u, s_1, u と，vと s_1の間を往復する道 v, s_6, s_4, s_2, s_3, s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, v;
・u と s_2の間を往復する道 u, s_1, s_2, s_3, s_1, u と，v と s_2の間を往復する道 v, s_6, s_4, s_2, s_4, s_5, s_6, v;
・u と s_4の間を往復する道 u, s_1, s_2, s_4, s_2, s_3, s_1, u と，vと s_4の間を往復する道 v, s_6, s_4, s_5, s_6, v;

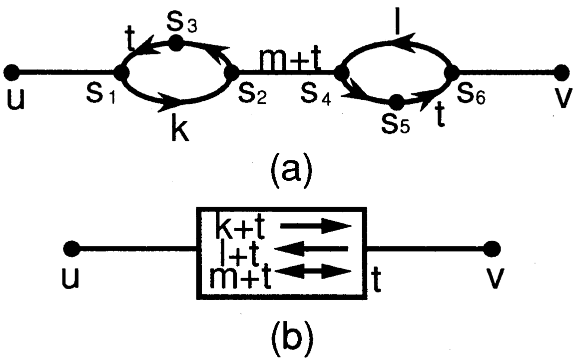

図1　コスト[k+t,l+t,m+t]$_t$の往復または1通行可能な辺(u,v)

・u と s_6の間を往復する道 u, s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, s_4, s_2, s_3, s_1, u と，vと s_6の間を往復する道 v, s_6, v.

3 番目の通行方法は，図 1(a) のグラフを 1 つの辺と見なせば，どれもその辺を往復しているものと見なすことができる．したがって，このグラフはコスト $k+t$ で u から vに向かってちょうど 1 回通行するか，コスト $l+t$ でvから u に向かってちょうど 1 回通行するか，コスト $m+t$ で u,v間をちょうど 1 回往復することができる辺とみなすことができる．図 1(a) のグラフを図 1(b) のように示すものとし，コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$の往復または 1 通行可能な辺 (u,v) または単にコスト $[k+t, l+t, m+t]_t$の辺 (u,v) と呼ぶものとする (コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$の往復または 1 通行可能な辺 (v,u) とは異なることに注意せよ).

以下で使用される往復または 1 通行可能な辺の定数 t はすべて 1 であるので，コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$ は $[k+1, l+1, m+1]$ と省略される．

補題 1 図 2 の混合グラフ G_1において，コスト $3(k+k')$ で最大通行回数が 2 の配達路は，コスト $[1,3,1]$ の辺 $(a_i, b_i), 1 \leq i \leq k$, すべてを a_iから b_iに向かって通行し，かつコスト $[1,3,1]$ の辺 $(a'_j, b'_j), 1 \leq j \leq k'$, すべてを往復する，もしくはその逆に，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i) すべてを往復し，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a'_j, b'_j) すべてを a'_j から b'_jに向かって通行するかのどちらかである．

補題 2 図 3 に示す混合グラフ G_2に対して次のこと

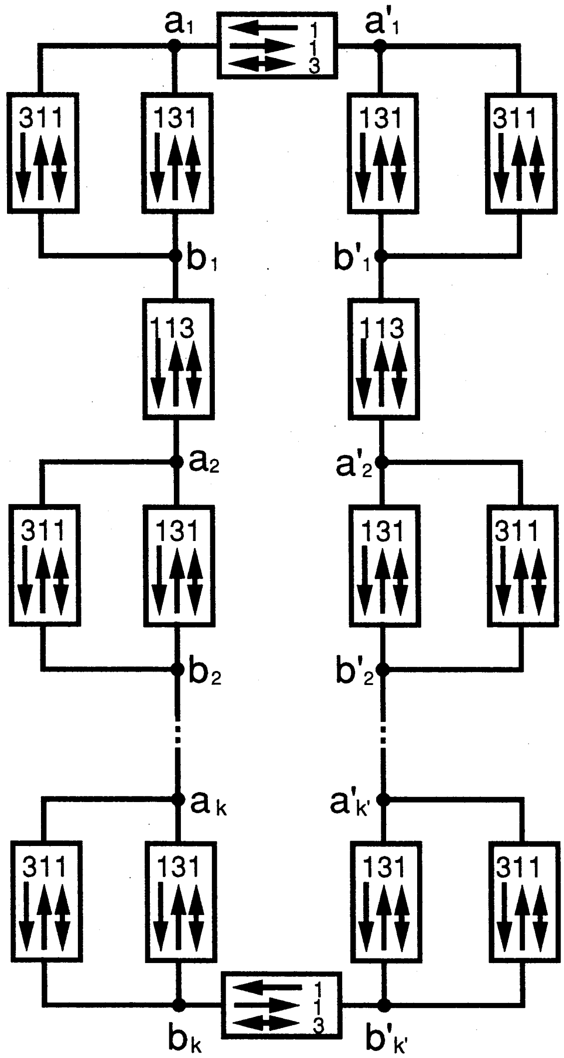

図2　混合グラフG_1

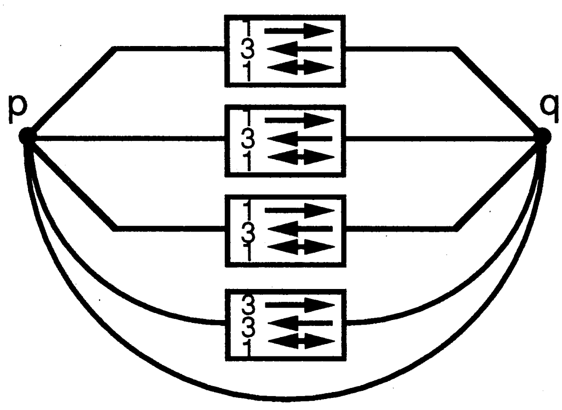

図3　混合グラフG_2

が成り立つ:

1. 3 本のコスト [1,3,1] の辺をすべて p から q に向かって通行するような最大通行回数が 2 以下の配達路の最小コストは 6 である.
2. 各 i, $1 \leq i \leq 3$ に対して, 3 本のコスト [1,3,1] の辺のうち, i 本は p と q の間を往復し, 残りの辺は p から q に向かって通行するようなコスト 4 の最大通行回数が 2 以下の配達路が存在する.

定理 1 2-CPP は **NP** 完全である.

証明 2-CPP が **NP** に属することは明かである. したがって, 3-SAT が 2-CPP に多項式時間で帰着可能であることを示せばよい.

$X = \{x_1, \cdots, x_m\}, X' = \{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_m\}$ とし, F を次のような 3 乗法標準形のブール式とする:

$$
\begin{aligned}
F &= C_1 \cdot C_2 \cdot \cdots \cdot C_r, \quad C_i = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}), \\
y_{ij} &\in X \cup X', \ 1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq 3.
\end{aligned}
$$

一般性を失うことなく, すべての変数 $x_i (1 \leq i \leq m)$ は F に含まれると仮定できる. F に現れない $X \cup X'$ の中のリテラルの個数を m' とする. 次の 2 つの構造を重ね合わせることにより, F が充足可能なとき, かつそのときに限りコスト $13r + 3m'$ で最大通行回数が 2 の配達路を持つ混合グラフ $G = (V, E, A)$ を構成する:

・変数 x_i に対して, 混合グラフ G_{x_i};
・節 C_j に対して, 混合グラフ G_{C_j}.

各変数 $x \in X$ に対して, x を表す混合グラフ $G_x = (V_x, E_x, A_x)$ を構成する. G_x は, リテラル $x, \overline{x}$ を表す混合グラフを構成し, それらを用いて作られる.

各リテラル $\alpha \in X \cup X'$ に対して, α を表す混合グラフを構成する.

1. ブール式 F の節 $C_i (1 \leq i \leq r)$ の $j (1 \leq j \leq 3)$ 番目のリテラル y_{ij} に対して, コスト [1,3,1] の往復または 1 通行可能な辺 (a_{ij}, b_{ij}) を構成する;
2. ブール式 F の中の $k (\geq 0)$ 個のリテラル $y_{i_1 j_1}, \cdots, y_{i_k j_k}$ が α に等しいものとする.

(1) $k = 0$ のとき, コスト [1,3,1] とコスト [3,1,1] の辺 (α_A, α_B) を構成する. このコスト [1,3,1] の辺 (α_A, α_B) がリテラル α を表す;

(2) $k = 1$ のとき, 1. で構成したコスト [1,3,1] の往復または 1 通行可能な辺 $(a_{i_1 j_1}, b_{i_1 j_1})$ がリテラル α を表す. ただし, 頂点 $a_{i_1 j_1}, b_{i_1 j_1}$ はそれぞれ α_A, α_B とも呼ぶものとする;

(3) $k \geq 2$ のとき, 各 $l (1 \leq l \leq k-1)$ に対して, $y_{i_l j_l}$ と $y_{i_{l+1} j_{l+1}}$ を表す 1. で構成されたコスト [1,3,1] の辺 $(a_{i_l j_l}, b_{i_l j_l})$ と $(a_{i_{l+1} j_{l+1}}, b_{i_{l+1} j_{l+1}})$ を, コスト [1,1,3] の辺 $(b_{i_l j_l}, a_{i_{l+1} j_{l+1}})$ で接続した混合グラフが α を表す. ただし, 頂点 $a_{i_1 j_1}$, $b_{i_k j_k}$ はそれぞれ α_A, α_B とも呼ぶものとする.

これで, 各リテラルに対応する混合グラフが構成できた. 変数 x を表す混合グラフ G_x は, リテラル $x, \overline{x}$ を表す混合グラフの頂点 x_A と $\overline{x}_A$, x_B と $\overline{x}_B$ をそれぞれコスト [1,1,3] の辺 $(x_A, \overline{x}_A), (x_B, \overline{x}_B)$ で接続した混合グラフである.

次に, F の節 $C_i = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}), 1 \leq i \leq r$, に対する混合グラフ $G_{C_i} = (V_{C_i}, E_{C_i}, A_{C_i})$ を構成するのだが, これは図 4 に示した混合グラフである.

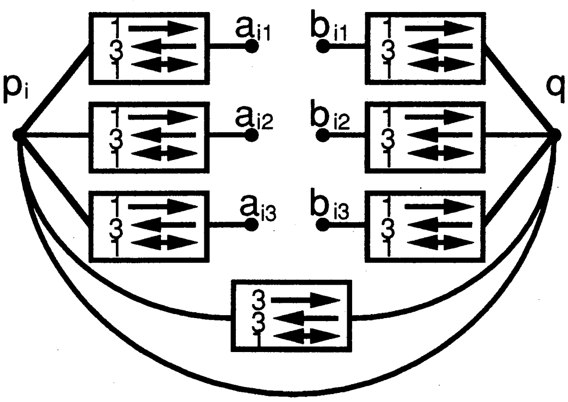

図 4 F の節 C_i を表わす混合グラフ G_{C_i}

$G = (V, E, A)$ を構成する 2 つの "構造" ができた. あとは, これらの構造を重ねればよい. すなわち, G の頂点の集合 V, 無向辺の集合 E, 有向辺の集合 A を以下のように定める:

$$
\begin{aligned}
V &= (\cup_{i=1}^{m} V_{x_i}) \cup (\cup_{i=1}^{r} V_{C_i}), \\
E &= (\cup_{i=1}^{m} E_{x_i}) \cup (\cup_{i=1}^{r} E_{C_i}), \\
A &= (\cup_{i=1}^{m} A_{x_i}) \cup (\cup_{i=1}^{r} A_{C_i}).
\end{aligned}
$$

ここで注意しておかなければならないことは，図 2 におけるコスト $[3,1,1]$ の辺 (a_i, b_i), $1 \le i \le k$, と (a'_j, b'_j), $1 \le j \le k'$, をすべて取り除いたグラフは，ある変数に対応する混合グラフであり，取り除かれたコスト $[3,1,1]$ の辺は，Fに対応する混合グラフ G では，節に対応する混合グラフ G_Cのコスト $[1,3,1]$ の辺 (p, a) と (b, q) が代わりにその役目を果たしているということである．

したがって，もし G においてコスト 1 の通行方法しか使用できないのなら，補題 1 はリテラル y_{ij}に対応するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij}から b_{ij}に向かって通行するなら，G_{C_i}のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) と (b_{ij}, q_i) は共に往復しなければならず，また，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を往復するなら，G_{C_i}のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) は p_iから a_{ij}に向かって通行しなければならず，コスト $[1,3,1]$ の辺 (b_{ij}, q_i) は b_{ij}から q_iに向かって通行しなければならないことを示している．さらには，リテラル y_{ij}に対応するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij}から b_{ij}に向かって通行することは，図 3 のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p, q) の 1 つを往復することに対応し，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を往復することは，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p, q) の 1 つを p から qに向かって通行することに対応していることにも注意しなければならない．

図 5 に 3 乗法標準形のブール式 $F = (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_4) \cdot (x_1 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)$ から構成される混合グラフ G を示す．

G が多項式時間で構成できることは明らかなので，Fが充足可能であるとき，かつそのときに限り G がコスト $13r + 3m'$で最大通行回数 2 の配達路をもつことを示す．

$F = C_1 \cdot \cdots \cdot C_r$が充足可能であると仮定する．このとき，$F$を充足する真理値割当て $I : X \to \{0, 1\}$ が存在する．各変数 x に対して，G の部分グラフ G_xの各辺を次のように通行する:

1. $I(x) = 1$ のとき，$y_{ij} = x$ なるリテラル y_{ij}に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij}から b_{ij}に向かって通行する．このとき，補題 1 より $y_{kl} = \overline{x}$なるリテラル y_{kl}に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{kl}, b_{kl}) は往復することになる．
2. $I(x) = 0$ のとき，$y_{ij} = \overline{x}$なるリテラル y_{ij}に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij}から b_{ij}に向かって通行する．このとき，$y_{kl} = x$ なるリテラル y_{kl}に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{kl}, b_{kl}) は往復する．

Iのもとで $F = 1$ となるから，Fの各節 $C_i = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3})$ において，$y_{ij} = 1$ のようなリテラル y_{ij}が存在し，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) は a_{ij}から b_{ij}に向かって通行することになる．すると，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) と (b_{ij}, q_i) は共に往復しなければならなくなる．よって，補題 2 より，G_{C_i}のすべての辺はコスト 4 で通行することができる．このような通行法において，G における G_xの部分において必要とされるコストの総和は $6r + 3m'$であり，G_Cの部分において必要とされるコストの総和は $7r$である．したがって，G はコスト $13r + 3m'$の配達路をもつ．

逆の証明は省略する．

□

定理 2 混合グラフのもとでオイラー閉路問題は $O(n^5)$ 時間で計算可能である．すなわち，1-CPP は $\mathbf{P}$ に属する．

証明 1-CPP は，各辺の通行回数がちょうど 1 回であるから，混合グラフのもとでのオイラー閉路問題に等しい．$G = (V, E, A)$ をある混合グラフとする．$|V| = n$, $|E \cup A| = m$ とする．また，vを G のある頂点とし，$deg(v), in(v), out(v)$ によって，それぞれ，vに接続する無向辺の数，vに入る有向辺の数，vから出る有向辺の数を表す．

G の各頂点 vに対して，次が成立するか否かを確かめる:

$$deg(v) - |in(v) - out(v)| \equiv 0 \,(mod\ 2). \qquad (*)$$

もし，すべての頂点に対して式 $(*)$ が成り立たなければ，明らかに G はオイラー閉路を持たない．

Gのすべての頂点が式 $(*)$ を満足するものとする．G がオイラー閉路をもつとき，かつそのときにかぎり，完全マッチングが存在する 2 部グラフ $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, $|V_1| = |V_2| = m$, を構成することができる．n 個の頂点の 2 部グラフの完全マッチングは $O(n^{5/2})$ 時間で計算できるから[3)]，混合グラフのもとでのオイラー閉路問題は $O(n^5)$ 時間で計算できる．

□

定理 3 $\#$2-CPP，すなわち以下の関数 g_2は $\#\mathbf{P}$ 完全である:

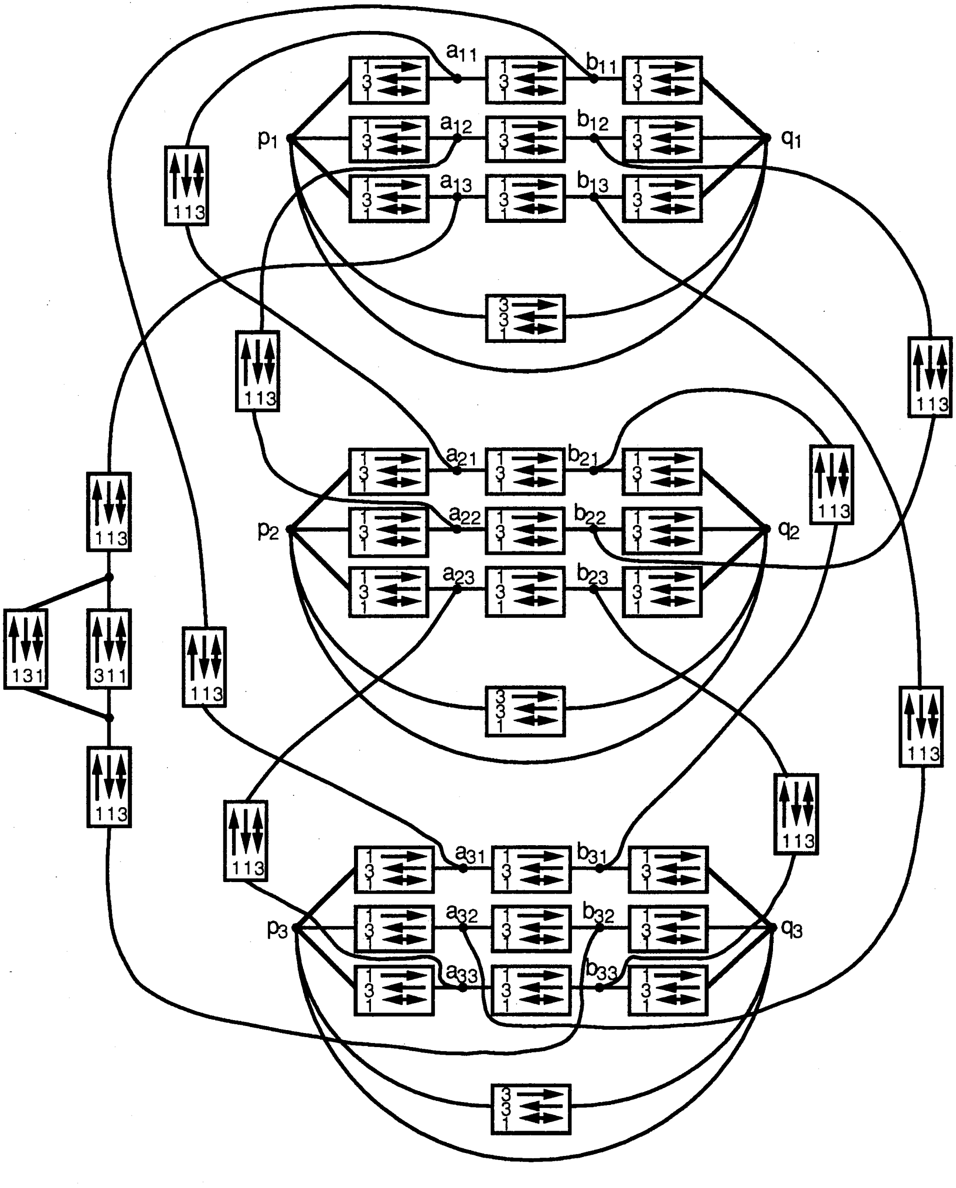

図 5　ブール式 $F=(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+x_2+x_4)(x_1+\bar{x}_3+\bar{x}_4)$ から構成される混合グラフG

$$g_2(G,d,k) = |D^2_{G,d,k}/R^2|.$$

証明　Valiant は#3-SAT が#**P** 完全であることを示している[7),8)]．定理 1 での 3-SAT から 2-CPP への多項式時間帰着が，そのまま#3-SAT から g_2への多項式時間節約帰着[7),8)]となっている．また，g_2が#**P** に属することは明かである．

□

補題 3 m を混合グラフ G の辺の数とする．このとき，次が成立する：

$$(\forall G)(\forall d)(\forall k), f_{min}(G,d,k) \leq m+1.$$

定理 4 最小通行回数問題はΔ^p_2に属する．すなわち，

$$f_{min} \in \Delta^p_2 = \mathbf{P}^{\mathbf{NP}}.$$

証明 PをG上のコストk以下のある配達路とし，mをGの辺の数とする．すると補題3より，Pの最大通行回数C_Pを$m+1$以下と仮定できる．

次の非決定性の変換機N'を考える:

procedure $N'(G,d,k)$:
begin
  { $|V|=n, |E\cup A|=m$ とする }
  整数l, $m\le l\le m(m+1)$, を非決定的に推測する;
  辺の列$P: e_1,\cdots,e_l$を非決定的に推測する;
  for $(u,v)\in E$ **do**
    if (u,v)がPの中で，uからvに向かってl_1回通行し，vからuに向かってl_2回通行するとき，
      (i) $l_1=l_2>1$, または
      (ii) $l_1\ne l_2$かつ$MIN(\{l_1,l_2\})>0$
    then reject;
  if PがGのコストk以下で最大通行回数$m+1$以下の配達路 **then**
    output $0^{\alpha_1-\alpha_2}(MAX(\{g_P(e)|e\in E\cup A\}))_{bin}$;
  accept
end.

ただし，$g_P(e)$の値は，

$$g_P(e)=\begin{cases}2, & e\text{は無向辺で，かつ配達路}P\text{において}e\text{はちょうど1回往復するとき;}\\ k, & e=(u,v)\text{を}u\text{から}v\text{へ(または}v\text{から}u\text{へ)}k\text{回通行するとき,}\end{cases}$$

であり，$\alpha_1=\lceil log\,(m+1)\rceil+1$, $\alpha_2=|(MAX(\{g_P(e)|e\in E\cup A\}))_{bin}|$である．また，任意の$n\in\mathbf{N}$に対して，$(n)_{bin}$は$n$の2進表現とし，したがって$N'$の出力の長さはいつも$\lceil log\,(m+1)\rceil+1$である．$m\le n(n-1)/2$より，$l\le m(m+1)\in O(n^4)$だから，$N'$は多項式時間限定である．

集合B, $C\in\mathbf{NP}$を次のように定義する:

$$\begin{aligned}B &= \{(0,G,d,k,w)|N'\text{は入力}G,d,k\text{に対して}ww'\text{を出力する}\},\\ C &= \{(1,G,d,k)|G\text{はコスト}k\text{以下の配達路を持つ}\}.\end{aligned}$$

$A=B\cup C$と定義すれば，Aも$\mathbf{NP}$に属する．

$N^A(G,d,k)=f_{min}(G,d,k)$が成り立つオラクル$A$を持った多項式時間限定の決定性オラクル機械が容易に構成できるので，$f_{min}\in\Delta_2^p$である． □

4 むすび

各辺の通行回数を"高々2回"と制限したCPP問題が**NP**完全であり，"ちょうど1回"と制限したCPP問題が**P**に属することを示した．また，CPPに関連した2つの興味ある関数の複雑さも示した．

我々は，m-CPPを用いて，**NP**にある階層が構成できるかどうかに興味をもっている．また，与えられたGとlに対して，同一辺を高々l回通行することが許された場合，コストはいくつでなければならないかを決定する問題など，CPPに関連する様々な関数の計算量にも興味を持っている．

5 参考文献

1) Aho, A.V., Hopcroft, J.E., and Ullman, J.D.: The Design and Analysis of Computer Algorithms, Ad-dision-Wesley, Reading, Mass., (1974).
2) Edmonds, J., and Johnson, E.L.: Matching, Euler tours and the Chinese Postman, Math. Programming, Vol. 5, No. 1, pp. 88-124 (1973).
3) Hopcroft, J.E., and Karp, R.M.: An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs, SIAM J. Comput., Vol. 2, pp. 225-231 (1973).
4) Kuhn, H.W.: The Hungarian method for the assignment problem, Naval Res. Logistics Quart, Vol. 2, pp. 83-97 (1955).
5) Mei-Ko, K.: Graphic programming using odd or even points, Chinese Math, Vol. 1, pp. 237-277 (1962).
6) Papadimitriou, C.H.: On the Complexity of Edge Traversing, J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 23, No. 3, pp. 544-554 (1976).
7) Valiant, L.G.: The Complexity of Computing the Permanent, Theor. Comput. Sci., Vol. 8, pp. 181-201 (1979).
8) Valiant, L.G.: The Complexity of Enumeration and reliability Problems, SIAM J. Comput., Vol. 8, pp. 410-421 (1979).