数理解析研究所講究録
951 巻 1996 年 12-20

On the Yang-Mills Heat Flow

Hisashi NAITO
（内藤 久資・名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

1. Introduction

ここでは次の 2 つの Topics について述べる.

(1) 閉 4 次元多様体上の Yang-Mills heat flow の時間大域的な弱解の存在.

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の Yang-Mills-Higgs heat flow に対する ε-regularity.

これら 2 つの結果は, 前田吉昭氏（慶應義塾大学理工学部）, 小薗英雄氏（名古屋大学多元数理科学研究科）との共同研究によるものである.

このノートでは, 主定理の証明を詳しく述べるのはやめ, 問題の幾何学的な設定等に中心をおいて解説する.

2. 4 次元多様体上の Yang-Mills heat flow

この章では M は閉 4 次元 Riemann 多様体, G は compact Lie group, P は M 上の G-principal bundle とする. さらに, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする.

Principal bundle G 上の接続 D とは, M の open covering $\{U_\alpha\}$ を一つとった時, 各 U_α 上で定義された $\mathfrak{g}$-valued 1-form D_α の集まりのことで, $U_\alpha \cap U_\beta$ 上では, $D_\alpha = d + A_\alpha$ と書いた時

$$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} d g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta}$$

なる関係を満たしている. ここで, $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ は, 局所自明近傍 U_α と U_β の間の変換関数である. P 上の滑らかな接続 D_0 を一つ fix した時, 任意の接続 D は, P 上の $\mathfrak{g}$-valued 1-form A を利用して,

$$D = D_0 + A$$

と書ける. ここで, ω が P 全体で定義された $\mathfrak{g}$-valued p-form であるとは,

$$\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta}$$

なる関係を満すものである.

この時, P 上の接続 D に対して, その曲率形式 F_D を

$$F_D = D \circ D$$

で定義すると, F_D は P 上の $\mathfrak{g}$-valued 2-form となる.

Yang-Mills 汎関数とは, 滑らかな接続全体の空間上で以下のように定義されたものである.

$$\mathrm{YM}(D) = \frac{1}{2}\int_M |F_D|^2\, dV.$$

ここで, $\mathfrak{g}$-valued p-form に対する norm は, fibre ごとには $\mathfrak{g}$ の Killing form から決まる内積を入れ, M 上にある Riemann 計量を使って定義したものである.

Euler-Lagrange equation for Yang-Mills functional

Yang-Mills 汎関数の Euler-Lagrange 方程式は

$$d_D^* F_D = 0 \tag{2.1}$$

と書ける. ここで, d_D は, 接続 D に関する共変外微分作用素, d_D^* は, d_D の L^2-norm に関する formal adjoint operator である.

Euler-Lagrange 方程式 (2.1) は D （もしくは A）に関して 2 階の偏微分方程式になっている. しかしながら, 以下に述べる理由により楕円型にはなっていない. （退化している）. Euler-Lagrange 方程式を満たすような接続を Yang-Mills 接続と呼ぶ.

Gauge transformation

Gauge 変換とは $s\colon M \longrightarrow G$ による接続の空間への作用のことで,

$$(s^*D)_\alpha = s^{-1}ds + s^{-1}A_\alpha s$$

で定義される. このような Gauge 変換によって F_D の norm は不変になるので,

$$\mathrm{YM}(s^*D) = \mathrm{YM}(D)$$

となる. したがって, D が Yang-Mills であることと, s^*D が Yang-Mills であることは同値である.

このことから (2.1) は gauge 変換群の軌道に沿って退化していることがわかる. しかしながら, 特別な gauge をとることにより, (2.1) を楕円型にすることは可能である.

Yang-Mills heat flow

Yang-Mills heat flow とは, Yang-Mills 汎関数の gradient flow を表す方程式で,

$$\partial_t D = -d_D^* F_D \tag{2.2}$$

と書ける.

我々は (2.2) の Cauchy 問題に注目したい. そこで, 以下のような問題を考えよう.

- 滑らかな初期値に対する (2.2) は時間大域的な滑らかな解を持つか？
- もし, それがわからないなら, 特異点が現れる時刻をどのように特徴付けできるか？
- 滑らかな初期値に対する (2.2) は時間大域的な弱解を持つか？

これらの問題に対する解答は以下の通りである.

まず, 滑らかな初期値に対しても, 時間大域的な滑らかな解は構成できるかどうかわからない. もし, 特異点が現れるとしたら, それは F_D の L^2-norm の concentrate が起こる時刻である. (cf. Theorem 2.1). さらに, その時刻を越えて時間大域的な弱解を構成することができる. ただし, 弱解の定義を（多少）変更しなくてはならない. (cf. Theorem 2.3, Definition 2.2).

Yang-Mills heat flow の基本的な性質

ここでは, 主定理を証明するための最も基本的な性質を述べるにとどめる.

エネルギーの関係式

Yang-Mills heat flow は汎関数の gradient flow を表しているので, 次のエネルギーに関する関係式が成り立つ. D を (2.2) の滑らかな解とした時,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M |F_D|^2\, dV = -\int_M |d_D^* F_D|^2\, dV$$

が成り立つ.

Bochner-Weitzenböck formula

Yang-Mills heat flow の解析的な性質を見るために, 最も基本的なものは, 次に述べる Bochner-type の不等式である. D を (2.2) の滑らかな解とした時,

$$\partial_t |F_D| \le \Delta |F_D| + C|F_D|^2 + C|F_D|$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は多様体 M の geometry のみによる定数である.

この不等式は M の次元によらずに成り立つもので, このことと, エネルギーの関係式から, 次のことがわかる.

- $\dim M = 4$ ならば (2.2) は critical nonlinearity を持つ.
- $\dim M \ge 5$ ならば (2.2) は super critical nonlinearity を持つ.

Yang-Mills heat flow の不変量

4 次元多様体上の G-principal bundle P 上の $\mathfrak{g}$-valued 2-form の空間 $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ は次のような分解を持つ.

$$\Omega^2(\mathfrak{g}_P) = \Omega^2_+(\mathfrak{g}_P) \oplus \Omega^2_-(\mathfrak{g}_P).$$

ここで, $\Omega^2_\pm(\mathfrak{g}_P)$ は Hodge の $*$-operator を利用して定義され,

$$\Omega^2_\pm(\mathfrak{g}_P) := \{\omega \in \Omega^2(\mathfrak{g}_P) : \omega = \pm * \omega\}$$

である. これは, $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ に対して, $*^2 = \mathrm{id}$ であるという事実から導かれる.
この分解を利用すると,

$$\mathrm{YM}(D) = \frac{1}{2}\int_M |F_D \pm *F_D|^2\, dV \pm \int_M \langle F_D, *F_D\rangle\, dV$$

なる汎関数の分解を得る. ここで, P の first Pontrjagin number $p_1(P)$ を利用して,

$$\int_M \langle F_D, *F_D\rangle\, dV = 2\pi^2 p_1(P)$$

と書ける. 明らかに接続の滑らかな変形に対して, $p_1(P)$ は不変である.
このことから次の事実がわかる.

- $F_D = \pm * F_D$ であれば D は Yang-Mills である. 特に energy minimizing である. このような接続を（反）自己双対接続と呼ぶ.
- (2.2) の滑らかな解に対して, $p_1(P)$ は不変である. さらにいえば, 接続の滑らかな変形に対して bundle の位相不変量は不変である.
- P を与えると, Yang-Mills 汎関数の値は下から $2\pi^2|p_1(P)|$ で評価される. したがって, 初期条件 $D(0)$ に対して, $\mathrm{YM}(D(0)) \leq \varepsilon$ といった（いわゆる） small data の仮定は一般にはおくことができない.

弱解の定義と定理

はじめに時間局所的な解の存在について注意しておく. 任意のエネルギー有限な接続に関して時間局所的な解の存在は, gauge を固定することによって, 通常の方法で証明することができる. さらに, このように構成した局所解は, $t > 0$ で滑らかになることがわかる.
このように構成した局所解に対して, 次の ε-regularity が証明できる.

Theorem 2.1. *D を $M \times (0,T)$ 上の (2.2) の滑らかな解とする. この時, ある M のみによる数 $\varepsilon_1 > 0$ が存在して, 任意の x に対して, $r > 0$ を十分小さくとれば*

$$\limsup_{t\uparrow T} \int_{B_r(x)} |F_D|^2\, dV \leq \varepsilon_1 \tag{2.3}$$

が成り立つ時, D は時刻 T を越えて滑らかに接続できる.

逆にこのことから, (2.2) が特異点を持つとすれば, (2.3) が成り立たないような時刻であることがわかる.
次に, (2.2) の weak solution の定義をしたいのだが, 残念ながら通常の weak solution の定義は使えない. ここで考えている方程式 (2.2) は G-principal bundle の section に対する方程式（正確には adjoint bundle の section に関する方程式）であるので, 特

異点が生じるごとに方程式が定義されている bundle が変化する可能性がある.（実際, bundle の p_1 が変化する可能性がある）. そのために, 通常の weak solution とは異なった定義の必要がある.

Definition 2.2.

(1) 時間に依存する接続 $D(t)$ が $M \times [T_1, T_2]$ 上の, $t = T_1$ での初期条件 $D(T_1) = D_1$ を持つ *(2.2) の weak solution であるとは, 次の条件をみたすことである.*
- $D(t)$ は $[T_1, T_2]$ 上で同じ *bundle* P の接続である.
- $D(t)$ は任意の $\Phi \in C^\infty([T_1, T_2) \times M, \Omega^1(\mathfrak{g}_P))$, $\Phi(T_2) = 0$ に対して, 次の式をみたす.

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_M \langle D, \partial_t \Phi \rangle - \langle F_D, d_D \Phi \rangle \, dV dt = \int_M \langle D_1, \Phi(T_1) \rangle \, dV.$$

- $D(t) \in L^2(T_1, T_2; W^{1,2})$.
- $\sup_{T_1 < t < T_2} \int_M |F_D(t)|^2 \, dV < \infty$.

(2) 時間に依存する接続 $D(t)$ が $M \times (0, \infty)$ 上の, $t = 0$ での初期条件 $D(0) = D_1$ を持つ *(2.2) の weak solution であるとは, 次の条件をみたすことである.* $P_1 = P$ をみたす *G-principal bundle* の集まり $\{P_i\}_{i=1}^{L+1}$, $t_0 = 0$, $t_{L+1} = \infty$ をみたす実数の集まり $\{t_i\}_{i=0}^{L+1}$, $t_i < t_{i+1}$ が存在して, $D(t)$ は $M \times [t_i, t_{i+1}]$ 上の初期条件 $D(t_i)$ を持つ *weak solution* であり, $D(t)$ は $[t_i, t_{i+1}]$ 上では P_i の接続である. さらに, $t \mapsto \mathrm{YM}(D(t))$ は $L^2(0, \infty)$ の意味で弱連続である.

この定義により, (2.2) の時間大域的な弱解の存在を示すことができる.

Theorem 2.3. 任意の $D^0 \in W^{1,2}$ に対して, D^0 を初期条件とする $M \times (0, \infty)$ 上の *(2.2) の weak solution が存在して, 次の条件をみたす.*

(1) ある $\{t_i\}_{i=0}^{L+1}$, $t_0 = 0$, $t_{L+1} = \infty$ となる実数の列, $\{P_i\}_{i=1}^{L+1}$, $P_1 = P$ となる *G-principal bundle* の列が存在して, $D(t)$ は (t_i, t_{i+1}) 上で滑らかな P_i の接続である.

(2) 各 i に対して, ある N_i 個の M 上の点 $\{x_i\}$ が存在して, $D(t_i)$ は $P_i|_{M \setminus \{x_{i_j}\}} = P_{i+1}|_{M \setminus \{x_{i+1_j}\}}$ 上の接続となる.

(3) $t \mapsto \mathrm{YM}(D(t))$ は単調非増加かつ $L^2(0, \infty)$ で弱連続.

(4) *G-principal bundle* の特性類 $\eta(P_i)$ は i によらず一定.

ここで, G の universal covering を $\tilde{G}$, $\pi \colon \tilde{G} \longrightarrow G$ を projection とした時, G の単位元 e に対して, $K := \pi^{-1}(e)$ とおく. この時, $\eta(P)$ は $\eta(P) \in H^2(M, K)$ となる特性類で, $G = U(n)$ の時には $\eta(P) = c_1(P) \in H^2(M, \mathbb{Z})$: P の first Chern class となるものである.

このことから, 特異点が生じても $c_1(P)$ は変化しないが, 一方 $p_1(P)$ はエネルギーで記述されているので, 特異点が生じるごとに変化する可能性があることがわかる.

3. $\mathbb{R}^3$ 上の Yang-Mills-Higgs heat flow

この章では, $\mathbb{R}^3$ 上の $SU(2)$-Yang-Mills-Higgs heat flow に関する ε-regularity に関して考える. 以後, $G = SU(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ とする.

考える bundle は $P = \mathbb{R}^3 \times SU(2)$ である. 空間 $\mathbb{R}^3$ は可縮であるので, P の接続と $\mathfrak{su}(2)$-valued 1-form を区別せずに, P の接続を A と書く. さらに, Φ を $\mathfrak{su}(2)$-valued 0-form, 即ち, $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ とする. ここで, $SU(2) \cong S^3$, $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ であることに注意する.

この時, P 上の Yang-Mills-Higgs 汎関数とは,

$$\mathrm{YMH}(A,\Phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |F_A|^2 + |d_A\Phi|^2 \, dV$$

で定義される[1]. 汎関数の形からわかるように, $|\Phi|$ の無限遠での値がどうなっているかは何も指定されていない. しかしながら, 無限遠での $|\Phi|$ の値と汎関数の scaling の間には密接な関係があるので, ここでは次のような空間で考えることにする.

$$\mathcal{C} = \{(A,\Phi) : \mathrm{YMH}(A,\Phi) < \infty, \lim_{|x|\to\infty} \sup |1 - |\Phi(x)|| = 0\}.$$

Euler-Lagrange equation for Yang-Mills-Higgs functional

Yang-Mills-Higgs 汎関数の Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} d_A^* F_A + [\Phi, d_A\Phi] &= 0 \\ \Delta_A \Phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

と書ける. ここで, Δ_A は d_A, d_A^* から作られる Hodge Laplacian である.

Yang-Mills 汎関数の時と同様に, Euler-Lagrange 方程式 (3.1) は A, Φ に関する 2 階の偏微分方程式になっている. Yang-Mills-Higgs 汎関数に対しても gauge 変換が存在するので, (3.1) の第 1 式は楕円型にはなっていない. しかし, 0-form に対しては, $d_A^*\Phi = 0$ であるので, 第 2 式は楕円型になっている. Euler-Lagrange 方程式 (3.1) をみたす (A,Φ) を Yang-Mills-Higgs configuration と呼ぶ.

Gauge transformation

Yang-Mills-Higgs 汎関数に対しても gauge 変換群が作用している. Yang-Mills 汎関数の時と同様に, gauge 変換 $s\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow SU(2)$ に対して, (A,Φ) が Yang-Mills-Higgs configuration であれば, $(s^*A, s^*\Phi)$ も Yang-Mills-Higgs configuration となる.

---

[1] より一般には, $\lambda \geq 0$ に対して,

$$\mathrm{YMH}(A,\Phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |F_A|^2 + |d_A\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|1 - |\Phi|^2| \, dV$$

と定義されるが, ここでは $\lambda = 0$ とする.

Yang-Mills-Higgs heat flow

Yang-Mills-Higgs heat flow とは, Yang-Mills-Higgs 汎関数の gradient flow を表す方程式で,

$$\begin{aligned} \partial_t A &= -d_A^* F_A - [\Phi, d_A \Phi] \\ \partial_t \Phi &= \Delta_A \Phi \end{aligned} \tag{3.2}$$

と書ける[2].

我々は Yang-Mills heat flow の時と同様に, (3.2) の Cauchy 問題に注目し, 以下のような問題を考える.

- 滑らかな初期値に対する (3.2) は時間大域的な滑らかな解を持つか?
- もし, それがわからないなら, 特異点が現れる時刻をどのように特徴付けできるか?
- 滑らかな初期値に対する (3.2) は時間大域的な弱解を持つか?

しかし, Yang-Mills-Higgs heat flow に関しては, 残念ながら, Yang-Mills heat flow に対応する時間大域的な解の存在は得られていない. 今回, 我々が得た結果は, Yang-Mills heat flow の場合の Theorem 2.1 に対応する ε-regularity のみである. (cf. Theorem 3.3)

Yang-Mills-Higgs heat flow の基本的な性質

ここでは, 主定理を証明するための最も基本的な性質を述べるにとどめる. Yang-Mills-Higgs heat flow は汎関数の gradient flow を表しているので, 次のエネルギーに関する関係式が成り立つ. (A, Φ) を (3.2) の滑らかな解とした時,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M |F_D|^2 + |d_A\Phi|^2\, dV = -\int_M |\partial_t A|^2 + |\partial_t \Phi|^2\, dV$$

が成り立つ.

Bochner-Weitzenböck formula

Yang-Mills-Higgs heat flow の解析的な性質を見るために, 最も基本的なものは, 次に述べる Bochner-type の不等式である. (A, Φ) を (3.2) の滑らかな解とした時,

$$\begin{aligned} \partial_t |\Phi|^2 &= \Delta |\Phi|^2 - 2|d_A\Phi|^2 \\ \partial_t |\Psi| &\le \Delta |\Psi| + C|\Psi|^2 \end{aligned}$$

---

[2] $\lambda > 0$ の時には,

$$\begin{aligned} \partial_t A &= -d_A^* F_A - [\Phi, d_A \Phi] \\ \partial_t \Phi &= \Delta_A \Phi - \frac{\lambda}{2}\Phi(|\Phi|^2 - 1) \end{aligned}$$

と書ける.

が成り立つ. Ψ は形式的に $\Psi = (F_A, *d_A\Phi)$ とおいたものである.

この第1式と最大値の原理を使えば, $|\Phi|$ は 任意の $T > 0$ に対して, $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ 上で有界であることがわかる. さらに, エネルギーの関係式と Moser の方法から, $\mathbb{R}^3$ 上では, 任意の滑らかな初期値に対して, (3.2) は時間大域的な $\mathbb{R}^3$ の内部で滑らかな解を持つことがわかる. (cf. Hassel [2]).

このことより, 一見すると我々の目標とする問題はこれで解決を見たように思えるのだが, 我々が構成したい解は「幾何学的」なものであるので, これだけでは十分でない. そのことの意味を次に解説する.

Yang-Mills-Higgs heat flow の不変量

4次元多様体上の Yang-Mills 汎関数の時と同様に, $\mathbb{R}^3$ 上の Yang-Mills-Higgs 汎関数は, 次のような分解を持つ.

$$\mathrm{YMH}(A, \Phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |F_A \pm *d_A\Phi|^2 \, dV \pm \int_{\mathbb{R}^3} F_A \wedge d_A\Phi.$$

と書ける. 実は, $\mathcal{C}$ 上では右辺第2項が位相不変量になっていることがわかり,

$$N(A, \Phi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} F_A \wedge d_A\Phi \in \mathbb{Z}$$

である. (cf. Groisser [1]). 実際, $N(A, \Phi)$ は次のような量である. いま, $|x| \to \infty$ の時, $|\Phi| \to 1$, $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ であるので,

$$\hat{\Phi}(\omega) = \lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(r, \omega)}{|\Phi(r, \omega)|}, \quad \omega \in S^2$$

が well defined となり, $\hat{\Phi}\colon S^2 \longrightarrow S^2$ である. この $\hat{\Phi}$ に対して,

$$N(A, \Phi) = -\deg(\hat{\Phi})$$

が成り立つ[3]. さらに, $N\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は $\mathcal{C}$ の path connected component への分解を与えている.

このことから, 次の事実がわかる.

- $F_A = \pm * d_A\Phi$ であれば (A, Φ) は Yang-Mills-Higgs configuration である. 特に energy minimizing である. このような configuration を（反） monopole と呼ぶ.
- (A, Φ) の $\mathcal{C}$ 内での滑らかな変形に対して, $N(A, \Phi)$ は不変である.

したがって, 「幾何学的」な解とは $N(A, \Phi)$ を不変に保つ解のことである.

---

[3]実は, $N(A, \Phi)$ は $\mathbb{R}^3$ の無限遠点の集合（それは S^2 と同相である）上のある bundle の first Chern number を決めている.

「幾何学的」な解の定義と定理

はじめに Hassel の定理を述べておこう.

Theorem 3.1 (Hassel [2]). 任意の初期値 $(A_0, \Phi_0) \in \mathcal{C}$ に対して *(3.2)* の $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ 上の滑らかな解が存在する. さらに, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 初期値 $(A_0, \Phi_0) \in \mathcal{C}$ が, $\|B_0\|_{L^2} < \varepsilon$, $\|B_0\|_{L^s} < C$, $1 < s < \frac{3}{2}$ をみたせば $t \to \infty$ の時, $B(t) \to 0$ となる. ここで, $B = F_A - *d_A\Phi$ とおいた.

前にも述べたように, Theorem 3.1 で主張していることは, 単に $\mathbb{R}^3$ の内部で滑らかな解が存在していることだけで, この解が「幾何学的」なものであるとはいっていない. そこで, 次のような定義をする.

Definition 3.2. *(3.2)* の滑らかな解 (A, Φ) が $(0, T]$ 上で ***extendable*** であるとは, 任意の $t \in (0, T]$ に対して, ある *gauge* 変換の *smooth family* $g(t)$ が存在して, g^*A は S_∞ 上の滑らかな接続に *extend* できることである.

ここで, S_∞ とは, $\mathbb{R}^3$ の無限遠点の集合（S^2 と同相）である. この定義により, (A, Φ) が extendable であれば, $N(A, \Phi)$ は時間によらず一定である.

Theorem 3.3. (A, Φ) を $\mathbb{R}^3 \times (0, T]$ 上の *(3.2)* の滑らかな解とする. この時, $\varepsilon_1 > 0$ が存在して, 任意の $t \in (0, T]$, $\omega \in S^2$ に対して, $\tau > 0$ を十分小さくとれば

$$\liminf_{r \to \infty} \int_{B_\tau(\omega)} r^2 (|F_A(t, r, \omega)| + |d_A\Phi(t, r, \omega)|)\, d\omega \leq \varepsilon_1 \tag{3.3}$$

が成り立つ時, (A, Φ) は $(0, T]$ 上の *extendable solution* である.

逆にこのことから, (3.2) が extendable でなくなる時刻は, (3.3) が成り立たないような時刻であることがわかる. このことを利用して, (3.2) の時間大域的な weak extendable solution を構成したいのだが, 特異点が無限遠点上に分布してるため, 特異点でどれだけのエネルギーが失われるかの解析が難しいため, 現状ではここまでしか証明できていない.

References

1. D. Groisser, Integrality of the monopole number in $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs gauge theory on $\mathbb{R}^3$, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 367–378.
2. A. Hassel, The Yang-Mills-Higgs heat flow on $\mathbb{R}^3$, J. Funct. Analy. **111** (1993), 431–448.
3. A. Jaffe and C. H. Taubes, Vortices and Monopoles, Birkhäuser, Boston, 1980.
4. H. Kozono, Y. Maeda and H. Naito, Global solutions for that Yang-Mills gradient flow on 4-manifolds, Nagoya Math. J. **139** (1995), 93–128.
5. H. Kozono, Y. Maeda and H. Naito, On ε-regularity for the Yang-Mills-Higgs heat flow on $\mathbb{R}^3$, preprint.