数理解析研究所講究録
952巻 1996年 50-57

解析関数の特異点の位相型 (故吉永悦男氏の仕事)

福 井 敏 純 (埼玉大理)
鈴木 正 彦 (日本大文理)

1 はじめに

吉永悦男氏は昨年 (1995年3月) 病に倒れそのまま帰らぬ人となってしまいました。吉永氏は特異点論を専門としていて、特異点関連分野には数多くの知人、友人がいます。その中で、彼の業績を解説する人間として必ずしも最適とは言い難いとは思いますが、鈴木、福井が、彼の数多い業績の中で自分たちに関係の深い部分の解説を試みたいと思います。

次の節では鈴木が吉永氏との思い出を交えて彼との共同の仕事の解説をします。続いて福井が第3節で彼の最初の仕事を、第4節では彼のmodified analytic function 関連の研究の解説を試みます。最後の節では吉永氏の略歴及び業績のリストを掲載します。

2 吉永氏の仕事1(思い出)

私 (鈴木) が初めて吉永悦男氏に出会ったのは、今から約10年前、私が筑波大大学院に入学したときでした。吉永さんも丁度その年講師として筑波大に就職されたように記憶しています。早速セミナーをやってもらうことになり、"Analytic functions of several complex variables", Gunning & Rossi を読み始めました。一年近くかかって、ようやく本を読み終えて、次に読む論文を捜していたとき、福田拓生先生 (当時千葉大) から二編の特異点の論文を紹介されました。その論文というのが

(1) K.Saito, "Einfach-elliptische Singularitäten", Inv. Math. **23**,289-325(1974)

(2) V.I.Arnol'd, "Normal forms of functions near degenerate critical points, Weyl group A_k, D_k, E_k and Lagrange singularities", Func. and its Appl. **6**,3-25(1972)

です。なぜか二人ともこの二編の論文に魅かれるところがあって、まず、K.Saito 氏の論文から読み始めました。続けて、V.I.Arnol'd 氏の論文を読みましたが、これらの話はすばらしく楽しくはあったものの、自分たちの話を続けて作るまでには至りませんでした。そのうち、吉永さんがArnol'dの別の論文"Normal froms of functions in the neighborhoods of degenarate critical points", Russian Math. Surveys,**29**,10-50(1974) を見つけてきました。

先の Arnol'd の論文は modality という関数のジェット空間の幾何学的な量で特異点を分類したものでしたが、吉永さんが見つけてきた論文では、quasihomogeneous singularities に限定して、その特異点の局所環から定義される代数的な量 (inner modality) で特異点を分類するものでした。quasihomogeneous singularities に対しては modality=inner modality であろうというのが、Arnol'd の予想でした。

大学院 2 年目の夏休みが終わった頃、吉永さんの提案で quasihomogeneous singularities の Arnol'd 以後の分類 (inner modality=2,3,4) を始めました。inner modality=2,3,4 の分類をしようとしたのは、4 までの inner modality の weights による表現ができたからです。しかし、この表現を用いて 4 までの inner modality を持つ quasihomogeneous singularities を決定する作業には膨大な計算を必要としました (4 変数の有理式を含む不等式の整数解を求めるという計算です)。inner modality=2 の計算でさえ 2 週間を要しました (これは吉永さんが計算しただけで結局私は途中で潰れてしまいました)。しかも、あまりに煩雑なため一度計算しても、取りこぼしがないという自信が持てないという有様でした。そのうち、計算機を使うことを思い付きました。Fortran を使ってプログラムを書き走らせてみると一日以上かかる計算が瞬時にプリントアウトされたときには二人で感激しました。それからは 2 か月近く計算機にかかりきりになりました。その最中吉永さんの長男の昌史くんが誕生しました。誕生の日も病院に奥さんを送って行っただけですぐ計算機室に戻ってきて計算機と格闘していました (多分病院にずーといるのが照れ臭かったのではないかと思います)。論文は年が明けてやっと完成しましたが、これが雑誌に accept されるまで、2 年以上かかりました ([9] を参照)。こんなに時間がかかったのは、全部書くと相当分厚いものになってしまうので、計算の部分を整理して短くするのに referee(A.N.Shoshitaishwily) と数回やり取りする必要があったことと、当時のソビエトの郵便事情の悪さが災いしたようです。この quasihomogeneous singularities の分類は我々にいろんな数学の題材を与えてくれました。

分類のテーブルを眺めてみるとパラメータ付きの同じ型 (weights) の quasihomegeneous singularities の族が並んでいるのですが、これらは同じミルナー数を持つので、"The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type",Lê Dũng Tráng & C.P.Ramanujan, Am. J. Math. **98**,67-78(1976) の結果より、同じ位相型を持つことが分かります。分類のテーブルを見る限り他には同じ位相型を持つ quasihomegeneous singularities はないように思われるのです。分類は singularities のある種の複雑さによる hierarchy を持っているので、より高い inner modality を持つ quasihomogeneous singularities の中に同じ位相型が現れるはずがないように思われます。そこで、suasihomogeneous singularities の weights は位相不変量ではないか、という予想を立てその証明を試みて出てきた結果が [8] です。これは $\mathbf{C}^2$内の quasihomogeneous singularities に対し、予想が正しいことを示したものです。私たちは、$\mathbf{C}^3$の場合は P.Orlik の論文で解決されていると思っていたのですが、実はこれには誤りがあることが後に佐伯氏 (広島大学理) によって指摘され、彼は独自に $\mathbf{C}^3$の場合の証明を与えました (参照 "Topological invariance of weights for weighted homogeneous isolated singularities in $\mathbf{C}^3$", Proc. of AMS **103**,905-909 (1988))。我々が証明で用いたのは孤立特異点のミルナーファイバリングから決まるモノドロミーの特性多項式が位相不変であるという"Topologie des singularites des hypersurfaces complexes",Lê

Dũng Tráng,Asterisque **7** et **8** (1972) の結果です。C^{2}の場合にはこの事実と、曲線の各枝の間の linking numbers の位相不変性を用いて結果が示されます。quasihomogeneous singularities の中で Brieskorn-Pham 型と呼ばれる特殊な singularities があるのですが、この exponents(weights) が位相型だけで決まるということが、特性多項式の位相不変性だけを用いて示されます。これは我々の共著の最初の論文として出版されました ([6])。この特性多項式の情報だけで quasihomogeneous singularities の weights がどの程度決定されるのかを論じたのが [16] です。

こうして、吉永さんとの共同の仕事を振り返ってみると、彼とのコンビのよさに我ながら感心します。実にうまく協調できていたと思います。二人でセミナーをしていると自然に論文が完成していました。今考えると彼の大きな包容力がすべてをうまく運んだのだと思います。彼の死は本当に残念なことですが、彼のような数学者と共に仕事ができたことを誇りに思います。

3 吉永氏の仕事 2(The first work)

The first paper of Professor Etsuo Yoshinaga was published in 1970 under the joint authorship with Professors Shigeo Ozaki and Syouji Kanai.

[1] **On flat families and complete families of analytic spaces onto complex manifold** (with S.Ozaki and S.Kanai, Math. Z. **116** (1970), 258–263) In this paper, they consider a deformation of complex analytic space, that is, a holomorphic map $\pi : X \to M$ of a complex analytic space X to complex manifold M. We denote their structure sheafs by $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, and $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\S}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{M},\sqcup}$ denote their stalks at $x \in X$, $t \in M$. Set $m_{M,t}$ the ideal sheaf of holomorphic function germs vanishing at t. For each $t \in M$, the fiber $X_t := \pi^{-1}(t)$ is an analytic subspace of X. We understand that this map is a family of analytic spaces X_t. One of subjects about that many mathematicians have interests is flat family. We say that $\pi : X \to M$ is *flat* at x, if $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{M},\sqcup}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\S}, \mathcal{O}_{\mathcal{M},\sqcup}/\Updownarrow_{\mathcal{M},\sqcup}) = /$, where $t = \pi(x)$. In this paper, they first gave a characterization of flatness.

Theorem *The family $\pi : X \to M$ is flat at x, if and only if, $t_1, ..., t_n$ form a regular sequence, where $(t_1, ..., t_n)$ be a local coordinate system of M at t.*

We say that the family $\pi : X \to M$ is *reduced*, if each X_t is reduced analytic space. Let Ω_X, Ω_M denote the sheafs of holomorphic 1-forms. We set $\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(\pi^* \otimes_{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, and $\Theta_1(M) = \mathrm{Ext}^1_X(\Omega_X/\pi^*\Omega_M, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. For M' a submanifold of M, we have a subfamily $\pi' : X' \to M'$ of $\pi : X \to M$ by restriction, i.e. setting $X' = \pi^{-1}(M')$, and $\pi' = \pi|X'$. We use letters $\mathcal{T}(\mathcal{M}')$, $\Theta_1(M')$ for π' as same as those for π.

Theorem *Let $\pi : X \to M$ be a flat reduced family. If $Ext^1_X(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}'})_\S = /$ for $x \in X'$, then there is a natural epimorphism of $\mathcal{T}(\mathcal{M})_\S$ to $\Theta_1(M')_x$.*

We fix a reference point $0 \in M$, and set $\mathcal{T}_\infty(\mathcal{X}_\prime) := \times_\infty(\{\prime\})$. This $\mathcal{T}_\infty(\mathcal{X}_\prime)$ is the sheaf of the infinitesimal deformation of X_0. As a corollary of this theorem, they recover the following criterion for completeness due to H.Kerner.

Corollary *Let $\pi : X \to M$ be a flat reduced family. If*

$$Ext^1_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\S}/\pi^*\Updownarrow_{\mathcal{M},\prime}}(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\pi^*\Updownarrow_{\mathcal{M},\prime}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\pi^*\Updownarrow_{\mathcal{M},\prime})_\S = \prime \quad \textit{for } x \in X_0,$$

then there is a natural epimorphism of $\mathcal{T}(\mathcal{M})_\S$ to $\mathcal{T}_\infty(\mathcal{X}_\prime)$, i.e. π is a complete family.

4 吉永氏の仕事 3(modified analytic trivialization, etc.)

Studying classification of singularities of functions, it is important to show triviality of given family of functions. One basic idea to construct such triviality is integration of vector fields. Since the analytic classification of analytic functions has modulus, we need to consider topological classification of them. Thus there are no analytic vector fields which generate analytic trivialization in general. However, this integration method is still useful to construct topological trivialization. Set $W_t(x,y) = xy(x-y)(x-ty)$, $t \geq 2$. This is famous example, due to H.Whitney, which has an analytic modulus. But if we consider the pullback of W_t by the blowing up of $\mathbf{R}^2$ at the origin, we find that this is an analytic trivial family. (T.-C.Kuo is the first person who observed this fact.) Such observation gives us the notion of blow analytic trivialization, and the idea of blow analytic category (proposed by T.-C.Kuo). The idea of construction of such trivialization is the following: If we have a nice vector field in some sence, analysis on the vector field leads to some good conditions for triviality. Professor Etsuo Yoshinaga visited Sydney in 1984, and he got new ideas to construct nice vector fields. In his research life after that, he got good progress in this subject, and he published some results. I think these are enough satisfactory for his purpose. Now I introduce the reader some of his results very briefly.

[18] **The modified analytic trivialization of real analytic families via blowing ups,** (J.Math.Soc.Japan **40** (1988), 161–179) Let $\pi : X \to \mathbf{C^n}$ denote the blowing up centred at some ideal defined over $\mathbf{R}$ and $\pi(\mathbf{R}) : \mathbf{X}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R^n}$ its real part. Let $\mathbf{RX}$ denote the topological closure of $X(\mathbf{R}) - \Sigma(\pi)$ and $\mathbf{R}\pi : \mathbf{RX} \to \mathbf{R^n}$ be the restriction of π. Here, $\Sigma(\pi)$ denote the critical set of π. We call $\mathbf{R}\pi : \mathbf{RX} \to \mathbf{R^n}$ *subblowing up* of $\mathbf{R^n}$ centred at this ideal. Remark that $\mathbf{RX}$ is a subset of $X(\mathbf{R})$, and these two do not coincide in general. In fact, considering the ideal generated by (x^2, y^2), we find the total space of the subblowing up of $\mathbf{R^2}$ centred at this ideal is subanalytic (in this case, semi-algebraic) and the exceptional set, that is, the inverse image of the origin is the half of real projective line which is the exceptional set of the real part of the blowing up of $\mathbf{C^2}$ centered at the ideal (x^2, y^2).

Let $x = (x_1, ..., x_n)$ be a local coordinate system at $(\mathbf{R^n}, \mathbf{0})$, $f(x)$ a real analytic function germ at the origin in $\mathbf{R^n}$, and $\sum_\nu c_\nu x^\nu$ the Taylor expansion of $f(x)$ at 0. Set $K = \mathbf{R}$, or $\mathbf{C}$. We say that $f(x)$ is *K-non-degenerate*, if the gradient of f_γ has no K-valued zeros except the union of the coordinate hyperplanes, for each compact face γ of $\Gamma_+(f)$. Here, we set $f_\gamma(x) = \sum_{\nu\in\gamma} c_\nu x^\nu$.

Let $f_t(x) = f(x;t)$ $(t \in T)$ be the real analytic family of real analytic functions so that the Newton polygon $\Gamma_+(f_t)$ is constant for $t \in T$. Here, T is a closed cube. Assume that f_t is convinient, i.e. $\Gamma_+(f_t)$ meets each coordinate axes.

Theorem *Let $\pi : M \to \mathbf{R^n}$ be the blowing up centred at the ideal generated by the monomials which correspond to the vertices of $\Gamma_+(f_t)$.*

(i) *If f_t is $\mathbf{R}$-non-degenerate for $t \in T$, then f_t admits $\mathbf{R}\pi$-analytic trivialization.*

(ii) *If f_t is $\mathbf{C}$-non-degenerate for $t \in T$, then f_t admits $\pi(\mathbf{R})$-analytic trivialization.*

[19] **Topological principal part of analytic functions,** (Trans. of Amer. Math. Soc., **314** (1989), 803–814) Let $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$. Let $f : (\mathbf{R^n}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{R}, \mathbf{0})$ be an analytic function. It is well known that the r-jet of f at 0 is C^0-sufficient iff $|\mathrm{grad} f(x)| \geq \varepsilon |x|^{r-\delta}$ near 0 for some $\varepsilon, \delta > 0$. Let Grad(f) denote the logarithmic gradient of f, that is, $\mathrm{Grad}(f) = (x_1 \partial f \partial x_1, ..., x_n \partial f \partial x_n)$. Let $\Lambda_+(f)$ be the convex hull of the union of the sets $\nu + \mathbf{R^n_+}$ with $|\mathrm{Grad} f(x)| \geq \varepsilon |x^\nu|$ near 0 for some $\varepsilon > 0$. We also denote by $\tilde{\Lambda}_+(f)$ the convex hull of the union of the sets $\nu + \mathbf{R^n_+}$ with $|\mathrm{Grad} f(x)|^{\frac{m+1}{m}} \geq \varepsilon |x^\nu|$ near 0 for some $\varepsilon > 0$. Here, $m = m(f)$ denotes the minimum of the half of the order of the $|\mathrm{Grad} f(x)|^2$ at x_0 for $x_0 \in \Sigma(f)$.

Theorem **(i)** $\Gamma_+(f) \supset \Lambda_+(f) \supset \tilde{\Lambda}_+(f)$.

(ii) *f is non-degenerate iff $\Gamma_+(f) = \Lambda_+(f)$.*

(iii) *Let $g : (\mathbf{R^n}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{R}, \mathbf{0})$ be an analytic function germ. If $\Gamma_+(g) \subset \Lambda_+(f)$, and $\Sigma(f) = \{0\}$, then $f(x) + tg(x)$ is topological trivial near $t = 0$.*

M.A.Ruas and M.J.Saia gave more analysis on $\Lambda^+(f)$ in their paper: The polyhedron of equisingularity of germs of hypersurfaces in Real and complex singularities (ed. W.L.Marar), Pitman Research Notes in Mathematics Series 333 (1995), Longman.

[22] **Blow analytic mappings and functions,** (Canad. Math. Bull. **36** (1993), 497–506) Let P^{n-1} be the $n-1$-dimensional real projective space, $\xi = [\xi_1 : \cdots : \xi_n]$ the homogeneous coordinate of P^{n-1}, $x = (x_1, ..., x_n)$ a local coordinate system of $(\mathbf{R^n}, \mathbf{0})$. Let M denote the subset of $\mathbf{R^n} \times \mathbf{P^{n-1}}$ defined by $x_i \xi_j = x_j \xi_i$ for $1 \leq i < j \leq n$. Then the natural projection $\mathbf{R^n} \times \mathbf{P^{n-1}} \to \mathbf{R^n}$ induces the blowing up at the origin, and we denote

it by $\pi : M \to \mathbf{R^n}$. Let $\phi : \mathbf{R^n} \times \mathbf{P^{n-1}} \to \mathbf{M}$ be the analytic deformation retract defined by $\phi(x,\xi) = (\langle x,\xi\rangle/|\xi|^2, \xi)$. Let $f : (\mathbf{R^n} - \mathbf{0}, \mathbf{0}) \to \mathbf{R}$ be an analytic function so that $f \circ \pi$ has an analytic extension to $(M, \pi^{-1}(0))$. Then there are analytic functions $c_k(\xi)$ on P^{n-1} so that $f \circ \pi \circ \phi(x,\xi) = \sum_k c_k(\xi)x^k$. Thus, for $x \neq 0$, $f(x) = \sum_k c_k(x)x^k$, and we have a "homogeneous decomposition" $H_d(x) + H_{d+1}(x) + \cdots$ $(H_d(x) \not\equiv 0)$ of $f(x)$. We set $H(f) = H_d(x)$.

Theorem (Inverse mapping theorem) *Let $f = (f_1, ..., f_n) : (\mathbf{R^n}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{R^n}, \mathbf{0})$ be a continuous map germ so that $f \circ \pi$ is analytic. Set $H(f) = (H(f_1), ..., H(f_n))$. Then the following three conditions are equivalent.*

(i) $f : (\mathbf{R^n}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{R^n}, \mathbf{0})$ *is a homeomorphism which is induced by some analytic isomorphism $(M, \pi^{-1}(0)) \to (M, \pi^{-1}(0))$ via $\pi : M \to \mathbf{R^n}$.*

(ii) $\deg(H(f_p)) = 1$ *for $p = 1, ..., n$, and $H(f) : (\mathbf{R}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{R}, \mathbf{0})$ is a homeomorphism which is induced by some analytic isomorphism $(M, \pi^{-1}(0)) \to (M, \pi^{-1}(0))$ via $\pi : M \to \mathbf{R^n}$.*

(iii) $\deg(H(f_p)) = 1$ *for $p = 1, ..., n$, and $[H(f)] : P^{n-1} \to P^{n-1}$ is a real analytic isomorphism.*

Theorem *Let $f_t : (\mathbf{R^n} - \mathbf{0}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{R}, \mathbf{0})$ $(t \in T)$ be an analytic family of function so that $f_t \circ \pi$ has an analytic extention to $(M, \pi^{-1}(0))$. Here, T denote some closed cube. We denote by the same symbol $f_t \circ \pi$ the extension to $(M, \pi^{-1}(0))$. If $H(f_t)$ defines a non-singular submanifold of P^{n-1} for each $t \in T$, then $f_t \circ \pi$ admits an analytic trivialization which induces a topological trivialization of f_t*

5 履歴・学歴・業績

5.1 履歴

氏名 吉永悦男
生年月日 昭和 21 年 6 月 3 日

学歴

昭和 40 年 3 月 東京都立立川高校卒業
昭和 40 年 4 月 東京教育大学理学部数学科入学
昭和 44 年 3 月 同上卒業
昭和 44 年 4 月 東京教育大学理学研究科修士課程数学専攻入学
昭和 46 年 3 月 同上修了
昭和 46 年 4 月 東京教育大学理学研究科博士課程数学専攻入学
昭和 49 年 3 月 同上退学
昭和 59 年 3 月 理学博士 (筑波大学)

職歴

昭和 49 年 4 月　筑波大学数学系講師に採用
昭和 53 年 4 月　横浜国立大学教育学部助教授に採用
昭和 59 年 6 月　シドニー大学研究員 (6 月 1 日〜8 月 31 日)
昭和 63 年 4 月　中国科学院数学研究所研究員 (4 月 1 日〜翌年 1 月 31 日)
平成 7 年 4 月　横浜国立大学教育学部教授に昇進

5.2 著書

1. 多変数複素解析入門 (数学ライブラリー 51)　共著
   森北出版 昭和 55 年 10 月
2. 演習・複素関数論　共著
   培風館 昭和 57 年 5 月
3. 初等解析学　単著
   培風館 平成 6 年 5 月

5.3 学術論文

[1] On Flat Families and Complete Families of Analytic Spaces onto Complex Manifold, *Mathematische Zeitschrift* **116**(1970), 258-263 (By S.Ozaki, S.Kanai and E.Yoshinaga).

[2] On flatness and completeness of holomorphic mappings of analytic spaces onto complex manifolds, *Sci. Rep. of the Tokyo Kyouiku Daigaku* **11**(1971), 20-25.

[3] On the Continuation of Analytic Equivalence Relations, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **22**(1975), 25-30 (By T.Higuchi and E.Yoshinaga).

[4] The conductor number and weakly holomorphic functions on an analytic curve in $\mathbf{C}^2$, *Sci. Rep. of the Tokyo Kyouiku Daigaku* **13**(1975),140-146 (By E.Yoshinaga and T.Suzuki).

[5] The conductor numbers of isolated 2-dimensional singularities resolved by $M(k_1, \ldots, k_s)$, *Sci. Rep. of the Tokyo Kyouiku Daigaku* **13**(1975),147-150 (By I.Ono and E.Yoshinaga).

[6] On the Topological Types of Singularities of Brieskorn-Pham Type, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **25**(1978),37-43 (By E.Yoshinaga and M.Suzuki)

[7] On the Geometric Genus and the inner Modality of Quasihomogeneous Isolated Singularities, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **25**(1978), 45-53 (By E.Yoshinaga and K.Watanabe)

[8] Topological Types of Quasihomogeneous Singularities in $\mathbf{C}^2$, *Topology* **18**(1979),113-116 (By E.Yoshinaga and M.Suzuki).

[9] Normal forms of non-degenarate quasihomogeneous functions with inner modality $<$ 5, *Inventiones mathematicae* **55**(1979),185-206 (By E.Yoshinaga and M.Suzuki).

[10] A Criterion for 2-dimensional Normal Singularities to be weakly Elliptic, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **26**(1979),5-7 (By E.Yoshinaga and S.Ohyanagi).

[11] Two-dimensional Quasihomogeneous Isolated Singularities with Geometric Genus equal to two, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **27**(1980).1-18 (By E.Yoshinaga and S.Ohyanagi).

[12] Some Examples of Weakly Elliptic Singularities, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **27**(1980),11-18 (By E.Yoshinaga and S.Ohyanagi).

[13] Two-dimensional Quasihomogeneous Singularities of $p_g = 3$, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **28**(1981),23-33 (By E.Yoshinaga and S.Ohyanagi).

[14] On Unweighted Dual Graphs for Normal Surface Singularities, *Sci. Rep. of the Yokohama National University* **29**(1982),13-19 (By E.Yoshinaga, S.Ohyanagi and H.Hiura).

[15] Remarks on Maximally Elliptic Singularities, *Sci. Rep. of the Yokohama National University 29*(1982),1-11 (By E.Yoshinaga, S.Ohyanagi and M.Hiura).

[16] Topological types of isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **35**(1983),432-436.

[17] The modified analytic trivialization of family of real analytic functions, *Inventiones mathematicae* **82**(1985),467-477 (By E.Yoshinaga and T.Fukui).

[18] The modified analytic trivialization of real analytic families via blowing-ups, *Journal of Mathematical Society of Japan* **40**(1988),161-179

[19] Topological principal part of analytic functions, *Transactions of the American Mathematical Society* **314**(1989),803-814.

[20] Differentiable odd functions, *Sci. Rep. Yokohama National University* **39**(1992),1-3 (By H.Kondou and E.Yoshinaga).

[21] Dynkin Diagrams for Singularities of Plane Curves, *Sci. Rep. of Yokohama National University* **40**(1993),39-57 (By H.Serizawa and E.Yoshinaga).

[22] Blow analytic mappings and functions, *Canadian Mathematical Bulletin* **36**(1993),497-506.

[23] Very simple proofs of genaralized Phythagorean theorem *(preprint)*.