数理解析研究所講究録
953巻 1996年 73-92

Compactification theorems in dimension theory

埼玉大・教育　木村 孝

この小論では、次元論におけるコンパクト化定理について概説する。すなわち、次元を保存するコンパクト化の存在を考察する。

次元関数は超限的なものまで含めて数えれば、少なくとも6種類(ind, trInd, Ind, trInd, dim, trdim)はあり、コンパクト化定理も、考える空間のクラス、あるいは、特別なコンパクト化を考えることで、何通りものコンパクト化定理が考えられる。この小論の前半では、可分距離空間のクラス、weight が一定の空間のクラス、Stone-Cech コンパクト化という、3種類のコンパクト化定理を考える。

最後の節では、可分距離空間のみを考える。可分距離空間をヒルベルト立方体へ埋め込み、そこで閉包をとれば、それは元の空間のコンパクト化になる。このとき、そのコンパクト化の次元が、元の空間の次元と等しくなるような埋め込み全体の(ヒルベルト立方体への連続写像全体の集合に一様収束位相を入れた空間での) residuality を考える。

1. 次元の定義

この節では、6種類の次元の定義を述べる。

1.1. 定義 正則空間 X に対し、小さい(超限的)帰納的次元 ind(trind) を次のように定義する。但し、α は順序数とする。

$$\mathrm{ind}\ X = -1 \iff X = \phi$$

$$(\mathrm{trind}\ X = -1)$$

$\mathrm{ind}\ X \leqq n \iff \forall x \in X,\ \forall F$:closed in X with $x \in X-F$
($\mathrm{trind}\ X \leqq \alpha$)

$\exists U$:open in X
s.t. $x \in U \subset X-F$, $\mathrm{ind\ Bd}\ U < n$
($\mathrm{trind\ Bd}\ U < \alpha$)

$\mathrm{ind}\ X = n \iff \mathrm{ind}\ X \leqq n$ かつ $\mathrm{ind}\ X \nless n$
($\mathrm{trind}\ X = \alpha \iff \mathrm{trind}\ X \leqq \alpha$ かつ $\mathrm{trind}\ X \nless \alpha$)

$\mathrm{ind}\ X = \infty \iff \mathrm{ind}\ X \nleqq n$ for $\forall n$
($\mathrm{trind}\ X = \infty \iff \mathrm{trind}\ X \nleqq \alpha$ for $\forall \alpha$)

X : trind をもつ $\iff \mathrm{trind}\ X \leqq \alpha$ for some α

定義より、明らかに、$\mathrm{ind}\ X \neq \infty$ あるいは $\mathrm{trind}\ X < \omega$ のときは、

$$\mathrm{ind}\ X = \mathrm{trind}\ X$$

となる。また、

$$\mathrm{ind}\ X = \infty \iff \mathrm{trind}\ X \geqq \omega$$

である。

1．2．定義 正規空間 X に対し、大きい(超限的)帰納的次元 Ind(trInd) を次のように定義する。但し、α は順序数とする。

$\mathrm{Ind}\ X = -1 \iff X = \phi$
($\mathrm{trInd}\ X = -1$)

$\mathrm{Ind}\ X \leqq n \iff \forall E, F$:closed in X with $E \subset X-F$
($\mathrm{trInd}\ X \leqq \alpha$)

$\exists U$:open in X
s.t. $E \subset U \subset X-F$, $\mathrm{Ind\ Bd}\ U < n$
($\mathrm{trInd\ Bd}\ U < \alpha$)

$\mathrm{Ind}\ X = n \iff \mathrm{Ind}\ X \leqq n$ かつ $\mathrm{Ind}\ X \nless n$
($\mathrm{trInd}\ X = \alpha \iff \mathrm{trInd}\ X \leqq \alpha$ かつ $\mathrm{trInd}\ X \nless \alpha$)

$\mathrm{Ind}\ X = \infty \iff \mathrm{Ind}\ X \nleqq n$ for $\forall n$
($\mathrm{trInd}\ X = \infty \iff \mathrm{trInd}\ X \nleqq \alpha$ for $\forall \alpha$)

X : trInd をもつ $\iff$ trInd X $\leqq \alpha$ for some α

定義より、明らかに、Ind X $\neq \infty$ あるいは trInd X $< \omega$ のときは、

$$\mathrm{Ind}\ X = \mathrm{trInd}\ X$$

となる。また、

$$\mathrm{Ind}\ X = \infty \iff \mathrm{trInd}\ X \geqq \omega$$

である。

被覆次元 dim は標準的には、有限コゼロ被覆に対する細分の order で定義するが、ここでは、超限被覆次元との関連から被覆次元の定義と同値な分離集合による定義を述べる。但し、この同値命題は正規空間に対してのみ成り立つ性質のものなので、以下述べる定理の一部はチコノフ空間に対しても成立するので、チコノフ空間に対しての定理は標準的な定義によるものとする。

1.3. 定義 正規空間 X の交わらない2つの閉集合 E, F と X の閉集合 L に対し

L : partition in X between E and F

$\iff$ $\exists$U, V : X の交わらない2つの開集合

s.t. $X-L = U\cup V$, $E\subset U$, $F\subset V$

1.4. 定義 正規空間 X の交わらない2つの閉集合の対から成る列

$A = \{(A_i, B_i) : 0 \leqq i \leqq n\}$ に対し

A : inessential in X

$\iff$ $\forall i=0,1,2,\dots,n$

$\exists L_i$: partition in X between A_i and B_i

s.t. $\cap\{L_i : 0\leqq i\leqq n\} = \phi$

A : essential in X

$\iff$ A : not inessential

1.5. 定義 正規空間 X に対し、被覆次元 dim を次のように定義する。

$$\dim X = -1 \iff X = \phi$$

$$\dim X \leqq n \iff \forall\ \mathcal{A} = \{(A_i, B_i) : 0 \leqq i \leqq n\}\text{:a coll. of pairs}$$
$$\text{of disjoint closed sets in } X$$
$$\longrightarrow\ \mathcal{A}\text{ :inessential in } X$$

$$\dim X = n \iff \dim X \leqq n \text{ かつ } \dim X < n$$

$$\dim X = \infty \iff \dim X \leqq n \text{ for } \forall n$$

被覆次元の標準的定義はコゼロ被覆の細分の order で定義するが、これは基数なので帰納的次元のように直接的に任意の順序数に拡張することはできない。Borst[B] は、上の被覆次元の定義をうまく拡張し、被覆次元を順序数にまで拡張した。次に、Borst[B] による超限被覆次元 trdim を定義するための準備をする。

1．6．定義 集合 L に対し

Fin L:the collection of all non-empty finite subsets of L

とおく。

$$M \subset \text{Fin } L,\ \sigma \in \text{Fin } L \cup \{\phi\}$$

に対し

$$M^{\sigma} = \{\tau : \tau \cup \sigma \in M \text{ and } \tau \cap \sigma = \phi\}$$

とおく。但し、$a \in L$ に対して、

$$M^{\{a\}} = M$$

とかく。

上記の L, M に対し、M の order, Ord M, を次で定義する。

$$\text{Ord } M = 0 \iff M = \phi$$

$$\text{Ord } M \leqq \alpha \iff \text{Ord } M < \alpha \text{ for } \forall a \in L$$

$$\text{Ord } M = \alpha \iff \text{Ord } M \leqq \alpha \text{ かつ } \text{Ord } M \nless \alpha$$

$$\text{Ord } M = \infty \iff \text{Ord } M \nleqq \alpha \text{ for } \forall \alpha$$

正規空間 X に対し

$$L(X) = \{(A, B) : A \text{ and } B \text{ are disjoint closed in } X\}$$

とおき、$L \subset L(X)$ に対し

$$M_L = \{\sigma \in \mathrm{Fin}\ L : \sigma \text{ is essential}\}$$

とおく。

1.7. 定義 正規空間 X に対し、超限的被覆次元 trdim を次のように定義する。

$\mathrm{trdim}\ X = -1 \quad \text{if} \quad X = \phi$

$\mathrm{trdim}\ X = \mathrm{Ord}\ M_{L(X)} \quad \text{if} \quad X \neq \phi$

と定義する。また

X:trdim をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{trdim}\ X \leqq \alpha$ for some α

($\Longleftrightarrow$ $\mathrm{trdim}\ X \neq \infty$)

と定義する。

trdim と書くからには、有限次元の場合は当然 dim と一致して欲しいが、実際、Borst[B] によって次の２つの定理が成り立つことが示されている。

1.8. 定理[B] 正規空間 X に対し

$\dim X \neq \infty$ あるいは $\mathrm{trdim}\ X < \omega$ ならば

$$\dim X = \mathrm{trdim}\ X$$

が成り立つ。

1.9. 定理[B] 正規空間 X に対し

X:trdim をもつ $\Longleftrightarrow$ X:S-w.i.d.

2. 可分距離空間のクラスにおけるコンパクト化定理

この節では、可分距離空間に対し、次元を保存する距離化可能なコンパクト化の存在について考察する。

(a) ind, Ind, dim について

よく知られた次の古典的事実より、可分距離空間のクラスにおける ind, Ind, dim に関するコンパクト化定理では、どの次元で考えてもよい。

2.1. 事実 X:可分距離空間 $\Longrightarrow$ ind X = Ind X = dim X

また、このとき、コンパクト化定理が成立することも古典的な結果としてよく知られている。

2.2. 定理 ∀X:可分距離空間

∃αX:距離化可能な X のコンパクト化

s.t. dim αX = dim X

(ind αX = ind X, Ind αX = Ind X)

(b) trind, trInd, trdim について

trind, trInd, trdim は可分距離空間(より強く、コンパクト距離空間)のクラスにおいても一般には異なるので、それぞれに関して考えなければならない。

trInd に関して成立することは、Luxemburg [L] によって証明されている。

2.3. 定理[L] ∀X:可分距離空間

∃αX:距離化可能な X のコンパクト化 s.t. trInd αX = trInd X

trdim に関して成立することは、著者[K2]、Chatyrko [C]、Yokoi[Y] によって証明されている。

2.4. 定理([k2],[C],[Y]) ∀X:可分距離空間

∃αX:距離化可能な X のコンパクト化 s.t. trdim αX = trdim X

上記のように、可分距離空間のクラスでは trInd, trdim に関するコンパクト化定理が成立するが、残念ながら、trind に対しては成立しないことが、Luxenburg[L] によって示されている。

2. 5. 例[L] $\exists X$: 可分距離空間 s. t.
$\forall \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化に対し trind $\alpha X >$ trind X となる。

一般には成立しないが、特別な場合は成立する。実際、Luxemburg[L] の次の結果より、trInd をもつことは trind を保存するコンパクト化をもつための十分条件であることがわかる。

2. 6. 定理[L] 可分距離空間 X に対し
X: trInd をもつ $\Longrightarrow$ $\exists \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化
s. t. trind $\alpha X =$ trind X

また、 trind の値を考慮しなければ、次の形の定理も成立する。

2. 7. 定理 可分距離空間 X に対し
X: trind をもつ $\Longrightarrow$ $\exists \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化
s. t. αX: trind をもつ

trind をもつ可分距離空間は trind をもつ距離化可能なコンパクト化をもつので、可分距離空間 X に対し、trind の値が最小な距離化可能なコンパクト化の trind の値に興味がある。

2. 8. 問題 可分距離空間 X に対し
min{trind αX : αX: 距離化可能な X のコンパクト化 }
の値はどの程度か？

この問題に関して、Luxemburg[L] が次の予想をしている。

2．9．予想[L] trind $X = \lambda + n$（但し、λ は極限順序数，n は 0 以上の整数）となる可分距離空間 X に対し

$$\mathrm{trind}\ \alpha X \leqq \lambda + 2n + 1$$

となる距離化可能なコンパクト化 αX が存在するであろう。

3． weight を保存するコンパクト化定理

この節では、weight を保存するコンパクト化の存在について考察する。

(a) ind, Ind, dim について

3．1．定理 $\forall X$:正規空間

$\exists \alpha X$:X のコンパクト化

s.t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\mathrm{Ind}\ \alpha X = \mathrm{Ind}\ X$

3．2．定理 $\forall X$:チコノフ空間

$\exists \alpha X$:X のコンパクト化

s.t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\dim\ \alpha X = \dim\ X$

上記のように、Ind, dim に関しては、weight を保存するコンパクト化定理が成立する。また、ind に関しても次が成立する。

3．3．定理 $\mathrm{ind}\ X = 0$ となる空間 X に対し

$\exists \alpha X$:X のコンパクト化 s.t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\mathrm{ind}\ \alpha X = \mathrm{ind}\ X = 0$

（証明）

$\mathrm{ind}\ X = 0$ より $X \subset D^m$ みなすことができる。但し、

$$D = \{0, 1\},\quad m = w(X)$$

とする。ここで、αX を X の D^m における閉包とすればよい。

上の定理より、0次元空間に対しては、ind に関しても weight を保存するコンパクト化定理が成立する。しかし、van Mill and Przymusinski[vMP] によって、ind に関しては、一般には成立しないことが知られている。

3.4. 例[vMP] $\exists X$:正規空間

$$\text{s.t. } \operatorname{ind} X = 1$$
$$\forall \alpha X : X \text{ のコンパクト化} \Longrightarrow \operatorname{ind} \alpha X = \infty$$

上の空間のコンパクト化 αX に対して、$\operatorname{ind} \alpha X = \infty$ より、$\operatorname{trind} \alpha X \geqq \omega$ であることはわかるが、$\operatorname{trind} \alpha X = \infty$ であるか否かは(すなわち、trind をもつか否かは)わからない。

(b) trind, trInd, trdim について

超限次元のときも、trInd, trdim に関しては weight を保つコンパクト化定理が成立する。

3.5. 定理[P] $\forall X$:正規空間

$$\exists \alpha X : X \text{ のコンパクト化}$$
$$\text{s.t. } w(\alpha X) = w(X),\ \operatorname{trInd} \alpha X \leqq \operatorname{trInd} X$$

3.6. 定理([K2],[C],[Y]) $\forall X$:正規空間

$$\exists \alpha X : X \text{ のコンパクト化}$$
$$\text{s.t. } w(\alpha X) = w(X),\ \operatorname{trdim} \alpha X \leqq \operatorname{trdim} X$$

ind に対して、すでに weight を保存するコンパクト化定理は成立しないので trind に対してもこのタイプのコンパクト化定理は成立しない。しかし、可分距離空

間のクラスでは、2つの肯定的な結果が得られているので、同様なことが weight を保存するコンパクト化に関しても考えられる。

1つ目の問題としては、「可分距離空間のクラスでは、trind をもてば、trind をもつコンパクト化をもつ」ので、同様なことが一般の空間に関しても成り立つか否かが問題となる。

3．7．問題 trind をもつ空間は、trind をもつコンパクト化をもつか？

先に述べたように van Mill and Przymusinski[vMP] の例 X は、任意のコンパクト化 αX に対し、ind $\alpha X = \infty$ だが、trind $\alpha X = \infty$ であるか否かはわからないので、この空間が上の問題の反例になっているか否かは、直ちにはわからない。上記の問題に関しては、著者[K1] は以前次の反例を与えた。

3．8．例[K1] $\exists X$:チコノフ空間

s.t. trind $X = 1$

$\forall \alpha X$:X のコンパクト化 $\Longrightarrow$ trind $\alpha X = \infty$

しかし、この空間はチコノフでしかないので、次はまだ未解決である。

3．9．問題 trind をもつ距離空間は、trind をもつコンパクト化をもつか？

2つ目の問題としては、「可分距離空間のクラスでは、trInd をもてば、trind の値が等しいコンパクト化をもつ」ので、同様なことが一般の空間に関しても成り立つか否かが問題となる。

3．10．問題 trInd をもつ空間は、trind を保存するコンパクト化をもつか？

この問題に関しては、距離空間を含む特別な空間のクラスでは条件つきで成立することがわかる[K4]。

3．11．定理[K4]　X:metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ

$\operatorname{trind} X \geqq \omega^2$

$\Longrightarrow$ $\exists \alpha X$:X のコンパクト化

s.t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\operatorname{trind} \alpha X = \operatorname{trind} X$

この定理は、次の補題の系である

3．12．補題[K4]　X:metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ

$\Longrightarrow$ $\exists \alpha X$:X のコンパクト化

s.t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\operatorname{trind} \alpha X \leqq \omega + \operatorname{trind} X$

$\operatorname{trind} X \geqq \omega^2$ ならば $\omega + \operatorname{trind} X = \operatorname{trind} X$ なので、この補題より上の定理が成立する。

4．Stone-Cech コンパクト化に関するコンパクト化定理

この節では、Stone-Cech コンパクト化の次元が元の空間の次元と等しいか否かについて考察する。

(a) ind, Ind, dim について

Ind, dim に関して、Stone-Cech コンパクト化に関するコンパクト化定理が成立することはよく知られている。

4．1．定理　X:正規空間 $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$

4. 2. 定理 X:チコノフ空間 $\Longrightarrow$ $\dim \beta X = \dim X$

しかし、次の結果より、trind に関しては成立しない。

4. 3. 命題 $\mathrm{ind}\, X = 0,\ \mathrm{Ind}\, X \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{ind}\, \beta X \neq \mathrm{ind}\, X$

（証明）

$\mathrm{ind}\, \beta X = 0$ と仮定すれば、「コンパクト空間 Y では、$\mathrm{ind}\, Y = 0$ であることと $\mathrm{Ind}\, Y = 0$ であることは同値」なので、$\mathrm{Ind}\, \beta X = 0$ となり、$\mathrm{Ind}\, X = \mathrm{Ind}\, \beta X$ より、$\mathrm{Ind}\, X = 0$ となり矛盾。

上記の命題の条件を満たす空間は距離空間のクラスで存在することは Roy の例としてよく知られている。

4. 4. 例[R] $\exists$X:距離空間

s.t. $\mathrm{ind}\, X = 0,\ \mathrm{Ind}\, X = 1$

よって、trind に関しては、Stone-Cech コンパクト化に関するコンパクト化定理は距離空間のクラスでも成立しないことがわかる。しかし、次の命題より可分距離空間のクラスでは成立する。

4. 5. 命題 X:可分距離空間 $\Longrightarrow$ $\mathrm{ind}\, \beta X = \mathrm{ind}\, X$

（証明）

$$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X = \mathrm{Ind}\, \beta X \geqq \mathrm{ind}\, \beta X$$

より、

$$\mathrm{trind}\, \beta X = \mathrm{trind}\, X$$

となる。

(b) trind, trInd, trdim について

Stone-Cech コンパクト化に関するコンパクト化定理は、trInd, trdim に関しても成立する

4.6. 定理[P] X:正規空間 $\Longrightarrow$ trInd βX = trInd X

4.7. 定理([K2],[C],[Y]) X:正規空間 $\Longrightarrow$ trdim βX = trdim X

trind に関して成立しないことは、ind で成立しないことより明らかであるが、より精密に次が成り立つ。

4.8. 定理 βX:trind をもつ $\Longleftrightarrow$ X:trInd をもつ

(証明)

βX が trind をもてば、「コンパクト空間のクラスでは、trind をもつことと trInd をもつことは同値」なので、βX は trInd ももつ。よって、X は trInd をもつ。

先に見たように、任意の可分距離空間 X に対し、ind βX = ind X が成立するが、trind に関しては、可分距離空間の範囲でも、Stone-Cech のコンパクト化に関するコンパクト化定理は成立しない。実際、X をn次元立方体の位相和とすれば、ind X = ω であるが、X は trInd をもたないので上の定理より βXは trind をもたない。

4.9. 例 $\exists$X:可分距離空間 s.t. ω = trind X $\neq$ trind βX = ∞

定理 4.8 より、Stone-Cech コンパクト化の trind を考える場合は、X が trInd をもつときのみが意味をもつので、trInd をもつ可分距離空間に対して Stone-Cech コンパクト化に関するコンパクト化定理を考える。このとき、次が成り立つ。

4.10. 定理[K4] X:trInd をもつ可分距離空間

$\Longrightarrow$ trind βX = trind X

Roy の例より一般には成立しないことはわかるが、trInd をもつ空間に対して、trind βX と trind X がどのような関係にあるのか興味がもたれる。この問題に関しては、次の部分解を得ることができた。

4．11．定理[K4]　X:metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ

trind X $\geqq \omega^2$

$\Longrightarrow$ trind βX = trind X

4．12．補題[K4]　X:metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ

$\Longrightarrow$ trind βX $\leqq \omega$ + trind X

5．metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ空間

weight を保存するコンパクト化、および、Stone-Cech コンパクト化の最後の定理はともに空間 X が metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ空間であった。この節では、何故この条件の元ではうまくいくのか、その概略を示す。

最初に、strongly hereditarily normal の定義を述べる。

5．1．定義　X:strongly hereditarily normal

$\Longleftrightarrow$ $\forall$A, B:separated(i.e. Cl A $\cap$ B = ϕ = A $\cap$ Cl B）に対し

$\exists$U, V:disjoint open in X

s.t. A $\subset$ U, B $\subset$ V

U:union of a point-finite coll. of open F_σ in X

V:union of a point-finite coll. of open F_σ in X

任意の正規空間 X に対し

$$G_n(X) = \cup\{U : U \text{ is open and } \mathrm{Ind}\, U \leq n\} \ (\forall n < \omega)$$

$$S(X) = X - \cup\{G_n(X) : n < \omega\}$$

とおく。このとき、X が trInd をもつ(あるいは、より弱い条件 X:S-w.i.d.)ならば、次の2つが成立することが、Sklyarenko[S] によって示されている。

(1) $S(X)$:compact

(2) $\forall F$:closed in X with $F \cap S(X) = \phi$

に対し、

$$F \subset G_n(X) \text{ for some } n < \omega$$

F を $S(X)$ と交わらない閉集合とすれば、(2) より、F は Ind に関する次元が n 次元以下の開集合で被覆されることになる。さらに、X が metacompact, strongly heredatarily normal ならば、Ind に関する和定理が成立するので、$\mathrm{Ind}\, F \leq n$ となる。すなわち、$S(X)$ と交わらない X の閉集合の Ind に関する次元は有限であることがわかる。このとき、

$$x \in \beta X - X \text{ に対し } \mathrm{trind}_x \beta X < \omega$$

となる。また、weight を保存するコンパクト化で剰余の各点の ind に関する次元が有限となるものを構成すれば、それが求めるものになる。

6. Hilbert cube への次元を保つ埋め込みの residuality について

この節では、次元を保つ埋め込みの residuality に関して考察する。

可分距離空間 X に対し

$$C(X, I^\omega) : X \text{ から } I^\omega \text{ への連続写像全体}$$

とおき(但し、I^ω は Hilbert cube とする)

$$\forall f, g \in C(X, I^\omega)$$

に対し

$$d(f,g) = \sup\{\sigma(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

とおく。但し、σ は I^ω の距離とする。以下、$C(X, I^\omega)$ は、上の距離をもつ距離空間とする。

6．1．定義 Y:空間, $A \subset Y$
に対し

$$A:\text{residual in } Y \iff \exists G:\text{dense } G_\delta\text{-set s.t. } G \subset A$$

I^ω はコンパクトなので、$C(X, I^\omega)$ は完備距離空間となり、ベール空間である。よって、稠密な開集合の可算個の共通部分を含む部分集合は residual である。

この章では、次元関数 d に対し、$\{h \in C(X, I^\omega) : d(\mathrm{Cl}\ h(X)) = d(X)\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であるか否かを考察する。任意の可分距離空間 X に対し $\{h \in C(X, I^\omega) : h:\text{embedding}\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることはよく知られているので $\{h \in C(X, I^\omega) : d(\mathrm{Cl}\ h(X)) = d(X)\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることを示せば、$\{h \in C(X, I^\omega) : d(\mathrm{Cl}\ h(X)) = d(X)$ and h is an embedding$\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることがわかる。

dim に関しては、次の定理が成立することはよく知られている。

6．2．定理 X:可分距離空間

$$\Longrightarrow \{h \in C(X, I^\omega) : \dim \mathrm{Cl}\ h(X) = \dim X\}:\text{residual in } C(X, I^\omega)$$

可分距離空間 X に対しては ind X = Ind X = dim X なので、同様なことが、ind, Ind に関しても成立する。しかし、trind, trInd, trdim は一般には異なるので、それぞれに対して考察しなければならない。Luxemburg[L] は、trInd に関して、像の閉包をとっても次元を保存する埋め込みが residual にあることを示した。すなわち、次が成立する。

6．3．定理[L] X:可分距離空間

$\Longrightarrow$ $\{h \in C(X, I^{\omega}) : \mathrm{trInd}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \mathrm{trInd}\ X\}$:residual in $C(X, I^{\omega})$

trind に関しては、任意のコンパクト化 αX に対して、trind αX > trind X となる可分距離空間 X が存在するので、この X に対しては次が成立する。

6.4. 例[L] $\exists X$:可分距離空間
s.t. $\{h \in C(X, I^{\omega}) : \mathrm{trind}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \mathrm{trind}\ X\} = \phi$
(よって、特に residual in $C(X, I^{\omega})$ ではない)

すなわち、一般には trind に関しては、埋め込みの residuality は成立しない。しかし、Luxemburg[L] による次の定理より trInd をもつ可分距離空間に対しては、residuality が成立する。

6.5. 定理[L] X:可分距離空間, trInd をもつ
$\Longrightarrow$ $\{h \in C(X, I^{\omega}) : \mathrm{trind}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \mathrm{trind}\ X\}$:residual in $C(X, I^{\omega})$

上の結果より trInd をもつことは十分条件であることがわかるが、E.Pol[P] の結果を合わせて考えるとこれは必要条件であることもわかる。すなわち、次が成立する。

6.6. 定理 X:可分距離空間
に対し
X:trInd をもつ
$\Longleftrightarrow$ $\{h \in C(X, I^{\omega}) : \mathrm{trind}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \mathrm{trind}\ X\}$:residual in $C(X, I^{\omega})$

trdim に関しては著者[K2] が以前から問題にしてきたが、一般の形で成立することがわかった。

6.7. 定理[K3] X:可分距離空間
$\Longrightarrow$ $\{h \in C(X, I^{\omega}) : \mathrm{trdim}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \mathrm{trdim}\ X\}$:residual in $C(X, I^{\omega})$

定理 6.3, 6.5, 6.7 より trInd をもつ可分距離空間に対しては、次が成り立つ。

6.8. 定理 X:可分距離空間

$\Longrightarrow$ $\{h \in C(X, I^\omega)$: h は X から I^ω への埋め込み,

$$\text{trind}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \text{trind}\ X,$$
$$\text{trInd}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \text{trInd}\ X,$$
$$\text{trdim}\ \mathrm{Cl}\ h(X) = \text{trdim}\ X\}:\text{residual in}\ \ C(X, I^\omega)$$

著者は以前、trInd をもつ可分距離空間 X に対し trind, trInd, trdim をすべて保存する距離化可能なコンパクト化の存在を示したが、定理 6.8 を用いれば、これは明らかである。

6.9. 系 X:可分距離空間に対し

X:trInd をもつ

$\Longrightarrow$ $\exists \alpha X$:距離化可能なコンパクト化

$$\text{s.t.} \begin{cases} \text{trind}\ \alpha X = \text{trind}\ X, \\ \text{trInd}\ \alpha X = \text{trInd}\ X, \\ \text{trdim}\ \alpha X = \text{trdim}\ X \end{cases}$$

（定理 6.7 の証明の概略）

ここでは、$\{h \in C(X, I^\omega) : \text{trdim Cl}\ h(X) \leqq \text{trdim}\ X\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ となることの概略を示す。

τ:finite coll. of pairs of disjoint closed sets in X

$f \in C(X, I^\omega)$

に対し

$$f(\tau) = \{(\mathrm{Cl}\ f(A), \mathrm{Cl}\ f(B)) : (A, B) \in \tau\}$$

$$U(\tau) = \mathrm{Int}\{g \in C(X, I^\omega) : g(\tau)\ \text{ is ineseential in }\ \mathrm{Cl}\ g(X)\}$$

とおく。このとき、

$$\tau:\text{inessential in}\ \ X \Longrightarrow U(\tau):\text{open, dense in}\ \ C(X, I^\omega)$$

となる。

$$B\ \text{:countable base for}\ I^{\omega}\ \text{s.t.}\ \vee.\ B = B$$

となるものをとり

$$S = \{\mathrm{Cl}\ B : B \in B\}$$

とおき

$\{\tau : \tau$ is a finite coll. of pairs of disjoint sets from $S\}$
$= \{\tau_i : i < \omega\}$

と並べる。次に

$$\forall f \in C(X, I^{\omega}),\ \forall n < \omega$$

に対し

$$U(f,n) = \cap\{U(f^{-1}(\tau_i)) : i \leqq n \text{ and } f^{-1}(\tau_i) \text{ is inessential in } X\}$$

とおけば、

$$U(f,n)\text{:open, dense in } C(X, I^{\omega})$$

となる。これを用い帰納的に、次をみたす G_n, f_U をとる。

$\exists G_n$:pairwise disjoint open coll. in $C(X, I^{\omega})$

$\exists f_U \in U\ (\forall U \in G_n)$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \cup G_n\text{:dense in } C(X, I^{\omega}) \\ \text{mesh } G_n < 1/n \\ G_{n+1} < G_n \\ \cup\{V \in G_{n+1} : V \subset U\} \subset U(f_U, n)\quad (\forall U \in G_n) \end{cases}$$

ここで

$$H_n = \cup G_n$$
$$H = \cap\{H_n : n < \omega\}$$

とおけば、明らかに

$$H\text{:residual in } C(X, I^{\omega})$$

となる。また(多少計算することで)

$$\forall f \in H \longrightarrow \text{trdim Cl } f(X) \leqq \text{trdim } X$$

となることも示すことができ、$\{h \in C(X, I^{\omega}) : \text{trdim Cl } h(X) \leqq \text{trdim } X\}$ が residual in $C(X, I^{\omega})$ であることがわかる。

参考文献

[B] P. Borst, Classification of weakly infinite-dimensional spaces. Part I: A transfinite extension of the covering dimension, Fund. Math. 130(1988), 1-25.

[C] V.A. Chatyrko, On the transfinite dimension dim, Q & A in General Topology, 9(1991), 177-193.

[K1] T. Kimura, A space X with trind X = 1 every compactification of which has no trind, Top. Proc. 17(1992), 173-180.

[K2] T. Kimura, Compactification and product theorems for Borst's transfinite dimension, preprint

[K3] T. Kimura, A note on compactification theorem for trdim, preprint

[K4] T. Kimura, Compactification theorems for trind, in preparation.

[L] L. Luxemburg, On compactifications of metric spaces with transfinite dimensions, Pacific J. Math. 101(1982),399-450.

[vMP] J. van Mill and T.C. Przumusinski, There is no compactification theorem for small inductive dimension, Top. Appl. 13(1982), 133-136.

[P1] B.A. Pasynkov, On the dimension of normal spaces, Soviet. Math Dokl. 12(1971), 1784-1787.

[P2] E. Pol, The Baire-category method in some compact extension problems, Pacific. J. Math. 122(1986), 197-210.

[R] P. Roy, Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 134(1968), 117-132.

[S] E.G. Sklyarenko, On dimensional properties of infinite dimensional spaces, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 21(1962), 35-50.

[Y] K. Yokoi, Comactification and factorization theorems for transfinite covering dimension, Tsukuba J. Math. 15(1991),389-395.