数理解析研究所講究録
954巻 1996年 1-9

Kazhdan-Lusztig予想 — その起源

堀田良之 (Hotta Ryoshi)
東北大学理学部

1. ほとんど同じ記事を都立大学で行われた代数学シンポジウム報告集 [堀田] にも記録してあるのだが，ここの読者の便宜のため，かなりの繰り返しをも厭わず，前座を勤めることにする．

本論の展開については，続いての本格的論説に全面的に任せることにして，ここではこの予想が提出された1980年前後の状況を回想してみる．予想そのものの重要性と，交叉ホモロジー・D 加群の手法によるその一般的解決 (柏原・Brylinski, Beilinson-Bernstein [BK],[BB]) の見事さは今や誰の目にも明らかであるが，同時代の者にとっては，予想の発生の方に強い印象を受けたものである．

Weyl群の群環における関係式をその q 類似である岩堀Hecke環へ持ち上げることによって，問題の本質が見取られたのであるが，この確信は，未だに難解さが解消されていないJoseph-Jantzenの原始イデアルの分類理論 ([Ja]) と，当時発展中の有限Chevalley群の指標の理論にとって欠かせないSpringer表現への考察から生まれたと，彼ら自身述べている．その辺りを，そぞろ覗いてみようかと思う．

まず，Kazhdan-Lusztig自身の出発点から始めよう．

2. $(W,\,S)$ をCoxeter系とする．すなわち，S は群 W の生成系で，$s^2=e\ (s\in S)$, $(s_is_j)^{m_{ij}}=e\ (i\neq j)$ が基本関係式を与えているものである．$w\in W$ に対して文字 T_w を対応させ，q を不定元とする整数係数の多項式環 $\mathbb{Z}[q]$ 上の自由加群 $H_0 := \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[q]\,T_w$ を

$$T_{ww'} = T_wT_{w'} \quad (l(ww') = l(w)+l(w')),$$
$$(T_s+1)(T_s-q) = 0 \quad (s\in S)$$

によって環となす．ここで，$l(w)$ は $w \in W$ の長さである（w を S の元で表示するときの必要な最小個数）．

1960年代の前半，岩堀長慶氏が（q 個の元をもつ）有限体上の半単純群の Borel 部分群に関する Hecke 環が，W をその Weyl 群とするとき，上の環になることを見いだした．このことに因み，H_0 またはその係数拡大を岩堀 Hecke 環と呼ぶことが多い．

係数を Laurent 多項式にまで拡大した環を $H := \mathbb{Z}[q^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}} H_0$ と書き，H の包合的自己同型を，$\overline{q} = q^{-1}$, $\overline{T_w} = T_{w^{-1}}^{-1}$ によって定義する．

定理 (1979; [KL1]). 各元 $w \in W$ に対し，次をみたす $C_w \in H_0$ が唯一つ決まる：

(1) $C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q)\, T_y \quad (P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q])$ と表示できて，多項式 $P_{y,w}(q)$ は次をみたす：

(a) $P_{w,w}(q) = 1$,

(b) $\deg P_{y,w}(q) \leq \frac{1}{2}(l(w) - l(y) - 1) \quad (y < w)$

をみたす．（$y < w$ は W の Bruhat 順序；すなわち，y の S の元による表示は w の表示から S の元を抜くことによって得られている．）

(2) $\overline{C_w} = q^{-l(w)} C_w$ （H の中で）．

これは全く一般の Coxeter 群に対して成り立つ大切な定理であり，この報告の中で唯一初等的な証明が可能なものであるので，復元しておこう．条件 (1) (b) の微妙さが判明する．なお，係数環にさらに $q^{1/2}$ を添加しておくほうが安心なむきはそうしたらよい．

（一意性）：まず $\overline{T_y} = T_{y^{-1}}^{-1} = \sum_{x \leq y} R_{y,x}(q)\, T_x \quad (R_{y,x}(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}])$ と表せること，および $R_{y,y}(q) = q^{-l(y)}$ となることは容易に分かる．これを代入すると

$$
\begin{aligned}
\overline{C_w} &= \sum_{y \leq w} \overline{P_{y,w}}\, T_{y^{-1}}^{-1} \\
&= \sum_{x \leq y \leq w} \overline{P_{y,w}} R_{y,x}\, T_x \\
&= \sum_{x} \left(\sum_{x \leq y \leq w} \overline{P_{y,w}} R_{y,x} \right) T_x.
\end{aligned}
$$

条件 (2) から従って

$$q^{-l(w)}P_{x,w}=\sum_{x\le y\le w}\overline{P_{y,w}}R_{y,x}$$

が成立しなければならない．$y=x$ の項を左辺に移項すると

$$q^{-l(w)}P_{x,w}-q^{-l(x)}\overline{P_{x,w}}=\sum_{x<y\le w}R_{y,x}\overline{P_{y,w}} \tag{1}$$

を得る ($R_{x,x}=q^{-l(x)}$).

ところが，$P_{x,w}$ は $q^k,q^{k-1},\cdots,q^0$ $(k=\frac{1}{2}(l(w)-l(x)-1))$ の（$\mathbb{Z}$ 上の）1次結合；よって，

$$\begin{aligned}&q^{-l(w)}P_{x,w} \text{ は } q^{k-l(w)},q^{k-1-l(w)},\cdots,q^{-l(w)} \text{ の},\\ &q^{-l(x)}\overline{P_{x,w}} \text{ は } q^{-l(x)},q^{-1-l(x)},\cdots,q^{-k-l(x)} \text{ の}\end{aligned}$$

1次結合で，

$$-k-l(x)=-\frac{1}{2}l(w)-\frac{1}{2}l(x)+\frac{1}{2}>k-l(w)$$

となり，式 (1) の左辺の第1項と第2項は q の単項式の現れ方が混じり合っていない．よって，右辺が帰納的に決まってゆくことにより，$P_{x,w}$ も一意的に決まる．

（存在）：$C_e=1,\ C_s=T_s+1\ (s\in S)$,　$w=sv\ (sv>v,s\in S)$ のとき帰納的に

$$C_w=C_sC_v-\sum_{\substack{z<v\\ sz<z}}\mu(z,v)q^{\frac{1}{2}(l(w)-l(z))}C_z$$

とおく（$\mu(z,v)$ は $P_{z,v}$ の $q^{\frac{1}{2}(l(v)-l(z)-1)}$ の係数）．これが条件を満たしていることは容易に見られる．証終.

3．半単純リー環 $\mathfrak{g}$ とその Borel 部分環及び Cartan 部分環 $\mathfrak{b}\supset\mathfrak{h}$ を定める．$\mathfrak{b}$ の巾零根基 $\mathfrak{n}_+$ を張るルートベクトルに対応するルートを正とする．$\mathfrak{h}$ 上の1次形式 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{b}$ の1次表現 $\lambda:\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}/\mathfrak{n}_+\to\mathbb{C}$ を与える．対応する1次元 $U(\mathfrak{b})$ ($=\mathfrak{b}$ の展開環) 加群を $\mathbb{C}_\lambda$ と書くとき，$U(\mathfrak{g})$ ($=\mathfrak{g}$ の展開環) 加群

$$\begin{aligned}M(\lambda)&:=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})}\mathbb{C}_\lambda\\ &=U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ +\sum_{h\in\mathfrak{h}}U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)))\end{aligned}$$

を Verma 加群という．

さてここで Weyl 群 W の $\mathfrak{h}^*$ へのドット作用を

$$w \mathbin{.} \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho,$$

ただし $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ ($\alpha > 0$ は正のルート) と定義すると，W のドット軌道に対応する Verma 加群 $M(w \mathbin{.} \lambda)$ 上へは $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は（w によらず）一定のスカラーで作用する（中心指標という）．

また Verma 加群 $M(\lambda)$ は唯一つの既約な剰余加群 $L(\lambda)$ をもつこと，および $L(\lambda)$ の Grothendieck 群のの中での元を $[L(\lambda)]$ と表すと W の整部分群を $W(\lambda)$ として（λ が整のときは $W(\lambda) = W$），

$$[L(\lambda)] = \sum_{y\in W(\lambda)} a_y^\lambda\,[M(y \mathbin{.} \lambda)]$$

（$a_y^\lambda \in \mathbb{Z}$）と表されることが分かっていた．Verma 加群の指標は容易にわかるので，λ に対して整数 a_w^λ を知ることが大切である．

移行原理というものがあって，$Z(\mathfrak{g})$ が自明に働く場合，すなわち，$0 \in \mathfrak{h}^*$ のドット W 軌道に対応する場合が基本的であることが分かっているので，以下その場合に限る．$\{w \mathbin{.} 0 = w\rho - \rho \mid w \in W\}$ がその軌道であるから，都合で -2ρ を出発点にとり，

$$M(w) := M(w \mathbin{.} (-2\rho)) \twoheadrightarrow L(w) := L(w \mathbin{.} (-2\rho)) \qquad (w \mathbin{.} (-2\rho) = -w\rho - \rho)$$

とおくと，問題は

$$[L(w)] = \sum_{y\in W} a_{yw}\,[M(y)] \tag{2}$$

の係数 $a_{yw} \in \mathbb{Z}$ を求めることにある．

例． $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき，$\alpha = 2\rho$（正のルート），$W = \{e, w_0\}$ で，

$$M(e) = M(-\alpha) = U(\mathbb{C}e_{-\alpha}) \otimes \mathbb{C}_{-\alpha} = L(e),$$
$$M(w_0) = M(0) = U(\mathbb{C}e_{-\alpha}) \otimes \mathbb{C}_0$$

に対し，完全列

$$0 \to M(e) \to U(\mathbb{C}e_{-\alpha}) \to \mathbb{C}_0 \to 0$$

がある．$L(w_0) = \mathbb{C}_0$ は自明加群であり，

$$[L(w_0)] = [M(0)] - [M(e)]$$

が成り立っている．

一般にはこのような簡単な係数では表せないことが知られていた．Kazhdan-Lusztig の飛躍は，式 (2) を群環 $\mathbb{Z}[W]$ での式

$$A(w) = \sum_{y \in W} a_{yw}\, y \tag{3}$$

と見たとき，これが岩堀 Hecke 環における特殊基底 C_w の特殊化であると見抜いたことである．すなわち，

予想 ([KL1])

$$a_{yw} = (-1)^{l(y)-l(w)} P_{y,w}(1).$$

4. Joseph は展開環 $U(\mathfrak{g})$ の原始イデアルを分類するにあたって，Weyl 群の元の間にセルという概念を見いだした．まず群環 $\mathbb{Q}[W]$ の基底として，式 (3) で与えられる $\{A(w)\}_{w\in W}$ をとる．この基底を基本のフレームとして，各元 $y \in W$ に対して，$A(y)$ を含み，$\{A(w)\}_{w\in W}$ の部分集合で張られる $\mathbb{Q}[W]$ の左イデアルのうち最小のものを $\overline{V}_y^L$ とかく．2 つの元の L 同値を

$$y \underset{L}{\sim} x \Longleftrightarrow \overline{V}_y^L = \overline{V}_x^L$$

で定義し，

$$V_y^L = \overline{V}_y^L \Big/ \sum_{\overline{V}_w^L \subsetneq \overline{V}_y^L} \overline{V}_w^L$$

という W 加群を考える．$\underset{L}{\sim}$ による同値類を左セル，V_y^L を左セル表現という．

同様に右イデアル，両側イデアルに置き換えると，右セル（表現），両側セル（表現）の概念が得られる．

さて既約表現 $L(y)$ の零化イデアルである原始イデアルを $I_y = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} L(y)$ とするとき

$$I_y = I_x \Longleftrightarrow y \underset{L}{\sim} x$$

となり，従って，中心指標が自明な原始イデアルと左セルの集合が１：１に対応する，というのが Joseph 理論の要であった．

ちなみに A 型の場合（W は対称群）は左セル表現はいつも既約で，左セルとヤング図形が１：１に対応するが，一般の場合はそうはならず，いろいろ微妙な問題を引き起こす（[宮田] における谷崎の記事などを参照）．

セルの概念はまた,（A 型ならいつも簡明だが）些かデリケートに Springer 表現と関係し，Lusztig による有限 Chevalley 群の既約指標の分類にもきわめて重要な役割を果たすことになった．

Kazhdan-Lusztig [KL1] は，Joseph のように未だ不明の係数 a_{yw} を用いることを避けて，群環 $\mathbb{Q}[W]$ を持ち上げた岩堀 Hecke 環 $H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/2})$ の中で，$P_{y,w}(q)$ 係数を用いてセルを定義することにより，その顕示的な構成を行うことが出来た．

冒頭に述べた彼らの確信はこのようにして生まれたものと思われる．すなわち Verma 加群に関する予想

$$(-1)^{l(w)}[L(w)] = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(1)\,(-1)^{l(y)}[M(y)]$$

は H における関係式

$$C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q)\,T_y$$

の $q \to 1$ における特殊化であるという洞察が導かれたのである．

5．丁度この頃，ホロノミー加群および偏屈層 (perverse sheaf) の理論 ([Ka1], [Me], [BBD]) が完成しつつあったところでもあり，Kahdan と Lusztig が予想として提出しなくても，早晩この結果は得られたかもしれない．しかし，この流れに強いインパクトを与えたこと，さらに有限次元リー環のみならず，本報告集の主題をなす無限次元リー環，量子群，モジュラー表現についての諸結果は，彼ら，とくに Lusztig の洞察力なしには生まれなかったと思われる．

有限次元についての予想の証明はすでにいろんなところで紹介されているのでもう繰り返さない ([堀田], [Ka2], [宮田], [関口])．ただ最終的には，旗多様体上のある種の（斉藤盛彦による）Hodge 加群のなす Grothendieck 群に乗法まで定義することができて，岩堀 Hecke 環が構成され Kazhdan-Lusztig の C_w 基底が自然に現れる，という理解まで進んだことを述べておくに留める ([Ta], [谷堀])．

その後の展開について簡単に述べる．引き続いて Lusztig は

(1) 正標数の体上の簡約代数群について（基礎体と同じ体上の）モジュラー表現の場合，

(2) Kac-Moody リー環について支配的なウェイトに対する場合，

(3) アフィンリー環について負レベルのウェイトに対する場合，

(4) 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ について q が 1 の巾根の場合，

それぞれ Kazhdan-Lusztig 多項式によって，類似の指標公式が得られることを予想した．

時間的順序に従うと，まず (2) の場合（対称可能なリー環に対し），柏原・谷崎および Casian によって解決した (1990; [Ka3], [KT1], [Ca], 谷崎の記事). つぎに (3) と (4) の同値性が Kazhdan-Lusztig によって示され (1993–4; [KL2], 松尾の記事), (1) と (4) の同値性が Andersen-Janzten-Soergel によって示された (1994; [AJS], 兼田の記事).

(3) については最初 Casian によるアナウンスがあったが，(1) と (4) の解決に十分な定理はつい最近柏原と谷崎によって確立したばかりである (1994–5; [KT2,3], 谷崎の記事). (1) についての詳細は兼田氏の記事にもあると思うが，体の標数が十分大きいとき，などの制限はまだとれていない．

参考文献

[AJS] H. H. Andersen, J. C. Jantzen, W. Soergel: Representations of quantum groups at p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p: Independence of p. Astérisque **220** (1994).

[BB] A. Beilinson, J. Bernstein: Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris **292** (1981), 15-18.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne: Fesceaux perverse, Astérisque **100** (1983).

[BK] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara: Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math. **64** (1981), 378-410.

[Ca] L. Casian: Kazhdan-Lusztig multiplicity formulas for Kac-Moody algebras. C. R. Acad. Sci. Paris **310** (1990), 333-337.

[堀田] 堀田良之: Kazhdan-Lusztig 理論入門，第 40 回代数学シンポジウム報告集，1995 年 8 月 4 日-7 日於東京都立大学.

[Ja] J. C. Jantzen: Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren. Ergeb. Math. Grenz. , Springer-Verlag 1983.

[Ka1] M. Kashiwara: The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. RIMS **20** (1984), 319-365.

[Ka2] M. Kashiwara: Representation theory and D-modules on flag varieties, Astérisque **173-174** (1989), 55-109.

[Ka3] M. Kashiwara: Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras, PM **87**, 407-433, Birkhäuser 1991.

[KT1] M. Kashiwara, T. Tanisaki: Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras II, PM **92**, 159-195, Birkhäuser 1990.

[KT2] M. Kashiwara, T. Tanisaki: Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level, Duke Math. J. **77** (1995), 21-62.

[KT3] M. Kashiwara, T. Tanisaki: Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II. Non-integral case, Preprint, 1995.

[柏谷] 柏原正樹・谷崎俊之: Kazhdan-Lusztig 予想をめぐって, 数学 **47**, 3 号 (1995), 269-285.

[KL1] D. Kazhdan, G. Lusztig: Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.

[KL2] D. Kazhdan, G. Lusztig: Tensor structures arising from affine Lie algebras I, II, III, IV, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 905-947, 949-1011, **7** (1994), 335-381, 383-453.

[Me] Z. Mebkhout: Une équivalence de catégories; Une autre équivalence de catégories, Comp. Math. **51** (1984), 51-62; 63-88.

[宮田] 宮田武彦, A. H. 編: 第5回代数セミナー報告集 II (1982年8月2日~11日於兵庫県城崎町). 1983.

[関口] 関口次郎: 微分方程式の表現論への応用. 上智大学数学講究録 **27**, 1988.

[Ta] T. Tanisaki: Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras. Publ. RIMS **23** (1987), 841-879.

[谷堀] 谷崎俊之・堀田良之: D 加群と代数群. シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.