数理解析研究所講究録
954 巻 1996 年 36-79

アフィン Kac-Moody Lie 環と量子展開環の表現のなすテンソル圏

— Kazhdan-Lusztig: Tensor structures arising from affine Lie algebras の解説 —

松尾　厚

東京大学大学院数理科学研究科

§0　まえがき

この論説は, Kazhdan-Lusztig の最近の論文 "Tensor structures arising from affine Lie algebras I–IV"[1] の解説である。この一連の論文で[2], 彼らは, 複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応するアフィン Kac-Moody Lie 環 (以下ではアフィン Lie 環と呼ぶ) $\tilde{\mathfrak{g}}$ のある種の表現のなす圏 $\mathcal{O}_\kappa$ を自然に定めた。ここで, パラメータ κ は表現のレベル k と双対 Coxeter 数 $h^\vee$ の和である。κ が正の有理数でない場合には, この圏の対象は長さ有限な組成列を持つので構造が比較的簡単であり, 以下この場合を考える。この圏は通常の表現のテンソル積では閉じていないが, 共形場理論に現れるいわゆる fusion rule を表現するようにテンソル積を定義し直すと, それについては閉じていることが示される。そして, 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ が, Drinfeld-Jimbo の量子展開環[3] $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現のなす圏 $\mathcal{C}_q$ と[4] テンソル積を込めて圏同値になるというのが彼らの主定理である。ここで q は複素数 $q = e^{-\pi\sqrt{-1}/\kappa}$ であり, κ について例外的な場合を除く。κ が有理数でない場合は $\mathcal{O}_\kappa$ が半単純になって簡単であるから, κ が負の有理数の場合が特に重要であり, q が 1 の巾根の場合の量子展開環の有限次元表現と対応する訳である。

この理論は, アフィン Lie 環に附随した共形場理論[5] を数学的に定式化した 土屋-蟹江の理論[6] の別バージョンであり, また generic case で同様の圏同値を示した Drinfeld の理

1. J. AMS **6** (1993) 905–947, **6** (1993) 949–1011, **7** (1994) 33–381, **7** (1994)383–453
始めは I–V といわれていたが, V は III–IV に吸収合併されたらしい。以下では [I][II][III][IV] と引用する。また [I][II][III] では節に通し番号がついているので, [24.2] などと引用する。[IV] では補題, 命題, 定理にそれぞれ通し番号がついているので [Prop 31.2] のように引用する。
2. アナウンスメント Affine Lie algebras and quantum groups, IMRS 1991 **2** 21–29 もある。
3. Drinfeld-Jimbo の量子展開環 (quantum enveloping algebra) と一言でいっても, 微妙に違うバージョンがあって面倒である。正確な意味は本文で述べるとして, ここでは便宜上 $U_q(\mathfrak{g})$ と書いた。
4. $\mathcal{C}_q$ は Lusztig の意味の有限次元表現の圏である。
5. Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) 模型。WZW 模型ということもある。
6. A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in Conformal Field Theory on $\mathbb{P}^1$ and Monodromy Representations of Braid Group, Adv. Stud. in Pure Math. 16 (1988) 297–372

論[7] の精密化であるともいえる。ここで, generic case とは大雑把にいって κ を不定元とみなした場合で, special case とは κ に具体的な複素数を代入した場合である。正確には Drinfeld は形式的巾級数環 $\mathbb{C}[[h]]$ 上で議論しており, これは $\kappa = \infty$ の近傍で局所的に考えていることに相当する。

原論文の構成は以下の通りである。まず [I] の前半では, アフィン Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ のレベル $\kappa - h^\vee$ の表現の圏 $\mathcal{O}_\kappa$ を定義し, その特徴づけを与える。後半では, 点と座標付きの Riemann 球面上で余不変式の空間[8] を考えることでテンソル積の暫定的な定義を与える。ここで Riemann 球面上の有理型関数の存在という大域的なデータがテンソル積の構造に反映する。[II] では, 点と座標を動かしたときに余不変式の空間がどのように振る舞うかを調べ, テンソル積の定義をはっきりさせるとともに, テンソル積に対する braiding と associativity constraint を構成する[9]。[III] では generic case におけるテンソル圏同値 $\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ を構成する。ここで, $\mathcal{D}$ は形式的巾級数環上の単純 Lie 環の有限次元表現の圏に KZ 方程式を用いてテンソル圏の構造を導入したものであり, $\mathcal{E}$ は同じ形式的巾級数環上の量子展開環の有限次元表現の圏である[10]。これは, Drinfeld によって存在だけが証明されていたテンソル圏同値を構成的に与えるものである。[IV] では, κ を動かしたときに圏 $\mathcal{O}_\kappa$ がどう振る舞うかを調べ, κ を特殊化する操作で安定な性質を検討する。次に $\mathcal{O}_\kappa$ が, [II] で与えた braiding と associativity constraint に関して rigid braided monoidal category の公理をみたすことを証明する。ここで, rigid であることの証明は, 結局はケース・バイ・ケースの計算に帰着するが, κ について例外的な値を除かなければならない。最後に, これらの結果に基づいて [III] で与えた圏同値関手 $\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ を特殊化し, special case のテンソル圏同値 $\mathcal{O}_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_q$ を構成する。なお, [III] 以外は ADE 型に話を限っている。

以上の内容が総計 220 頁を越す論文に詳細に述べられている。そのうち, 記号が独特である点を除けば, [I][II][III] は非常に読みやすく明解に書かれているが, 正直申し上げて [IV] は私には理解不能である。実際のところ, [IV] に限っては論文の記述が不明瞭で, 誤りを大量に含んでいることが[11] その主たる原因であると断言できる。というわけで, この論説でも [IV] に相当する内容はよく理解せずに書いていることをお断りすると同時に, 読者の皆様に深くお詫びする次第である。ところで, 原論文を試みに読んでみようという方には, まずもっとも明解な [III] を読み, 次にアナウンスメントを読んで状況を把握したら [I]⇒[II] の順に読み, [IV] は (人生の貴重な時間を浪費しないために) 読まないことをお薦めする。

さて, この論説では, 分かり易く手短かに述べるため, 述べる順序を原論文とは大幅に変更した。まず §1 では, テンソル圏の一般論を解説し, [IV] の Appendix に述べられてい

7. V.G. Drinfel'd: Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. **1** (1990)
8. Coinvariants の空間。その双対がいわゆる conformal block の空間である。
9. Braiding は $A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$ なる同型, Associativity Constraint は $(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$ なる同型で, これらがしかるべき公理をみたすとき, 圏は Braided Monoidal であるといわれる。
10. 形式的巾級数環は体ではないが, 用語の濫用により "有限次元" と呼ぶ。
11. [I][II][III] と [IV] では実際に書いた人物が異なると推察される。また, プレプリントと実際に出版されたものとは, TEX のミスまで含めほとんど完全に同一であって, 出版にあたって校正を行わなかったことがうかがわれる。

ることをまとめる。次に §2 では Drinfeld の圏同値 $\mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{E}$ を具体的に構成する方法を説明する ([III])。§3 ではアフィン Lie 環についての準備をした後, アフィン Lie 環のレベル $\kappa - h^\vee$ の表現の圏 $\mathcal{O}_\kappa$ を導入し, その性質を述べる ([I] の前半 と [IV] の一部)。次に §4 では圏 $\mathcal{O}_\kappa$ の対象に対してテンソル積を構成するが ([I] の後半と [II]), 原論文と同様にブレイド圏の公理を満たすことの確認は後回しとし, ここでは行わない。§5 では $\mathcal{O}_\kappa$ と §2 で導入した Drinfeld の圏 $\mathcal{D}$ を関係付けるために, 種々の圏 $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{A}$ を導入し, それらの間の関係を調べる ([IV])。§6 では §5 の結果を用いて $\mathcal{O}_\kappa$ がブレイド圏になることを述べる。また, $\mathcal{O}_\kappa$ がリヂッドとなる条件を調べ, 最後に special case の圏同値 $\mathcal{O}_\kappa \rightleftarrows \mathcal{C}_q$ の構成を行う ([IV])。

なお, この論説では, 原論文とは異なる記号を用いている。自分では標準的な記号のつもりであるが, 読みにくくしてしまったかも知れない。また, 思わぬ誤りなどがあるかも知れないが, ご容赦願いたい。

§1　テンソル圏の一般論

ここで考えるのは, 加群のテンソル積の性質を抽象化して得られる公理系をみたす構造を持った圏のことである[12]。大雑把に言うと, テンソル積に関する結合法則および単位元の存在をゆるめて抽象化した公理をみたすものがモノイド圏 (monoidal category) , さらに交換法則をゆるめて抽象化した公理をみたすものがブレイド圏 (braided monoidal category または quasi-tensor category) である。また, 双対加群の存在を抽象化した公理をみたすモノイド圏がリヂッド (rigid) なモノイド圏である[13]。[IV Appendix] の他に, 基本的な文献として [JS][14] [D1][15] がある。テンソル圏の一般論については, 最近出版された [Kas][16] の p.275 以降を参照していただきたい。

$\mathcal{C}$ を圏とし, ある双関手

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \\ (X\,,Y) \longmapsto X \otimes Y \end{array}$$

が与えられているとする。特に, 任意の射 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ に対して, 射 $f \otimes g : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ が定義されていて, 射の合成に対して自然である。

12. このような圏をテンソル圏と呼びたいのはやまやまだが, テンソル圏 (tensor category) という用語は文献によって定義がかなり食い違っているので, この用語は章の表題だけに用いて本文では避けることにする。
13. なお, ブレイド圏の理論では balancing と呼ばれる重要な概念があり, [IV] でも使われているが, ここでは省略する。Balancing については例えば [IV p.450] および下にあげた [Kas p.348] を参照せよ。[Kas] では balancing を twist と呼び, それを持つブレイド圏を ribbon category と呼んでいる。
14. A. Joyal and R. Street, The geometry of tensor calculus I, Adv. in Math. **88** (1991)
15. V.G. Drinfel'd, Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. **1** (1990)
16. C. Kassel, Quantum groups, GTM 155, Springer 1995

1.1 結合拘束

定義 1.1.1 (結合拘束) 任意の対象 X, Y, Z に対して, 自然な同型射

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$$

が与えられていて, 図式

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

を可換にするとき, 同型射の族 $\{a_{X,Y,Z}\}$ を $\otimes$ に対する $\mathcal{C}$ の結合拘束 (associativity constraint) と呼ぶ。

この図式で, 射は明示していないが明らかであろう。この図式の可換性を五角形関係式 (pentagon relation) という。結合拘束 $a_{X,Y,Z}$ が X, Y, Z について自然 (関手的) であるということは, 任意の射 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, $h : Z \to Z'$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\
(X' \otimes Y') \otimes Z' \arrow[r] & X' \otimes (Y' \otimes Z')
\end{tikzcd}$$

が可換になることを意味する。従って, 例えば, 結合拘束に対する図式

$$\begin{tikzcd}
(((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes A) \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & ((X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes A) \otimes B \arrow[d] \\
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes (A \otimes B) \arrow[r] & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes (A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

は可換である。

定理 1.1.2 (MacLane)[17] $X_1, \cdots, X_m$ を結合拘束を持つ圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象とすると, $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ の 2 通りの括弧の付けかたの間に, 結合拘束を繰り返し用いて作られる同型射は, 一意的である。

17. S. MacLane, Natural associativity and commutativity, Rice Univ. Stud. **49** (1963)

1.2 モノイド圏

定義 1.2.1 (単位対象) $(\mathcal{C},\otimes)$ は結合拘束 $\{a_{X,Y,Z}\}$ を持つとする。このとき，ある対象 $I\in\mathcal{C}$ であって，任意の対象 $X\in\mathcal{C}$ に対する自然な同型

$$l_X : I\otimes X \xrightarrow{\sim} X, \quad r_X : X\otimes I \xrightarrow{\sim} X$$

が存在して，結合拘束との間に可換図式

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[r] \arrow[d] & X\otimes Y \arrow[d, equal] \\
X\otimes(I\otimes Y) \arrow[r] & X\otimes Y
\end{tikzcd}$$

が成立するものを単位対象 (unit object) という。

定義 1.2.2 (モノイド圏) $(\mathcal{C},\otimes)$ が結合拘束と単位対象を持つとき，$\mathcal{C}$ はモノイド圏 (monoidal category) という。

命題 1.2.3 (Kelly)[18] $\mathcal{C}$ はモノイド圏であるとする。このとき，単位対象 I について $l_I = r_I$ が成立し，また図式

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes I \arrow[r] \arrow[d, "r_{X\otimes Y}"'] & X\otimes(Y\otimes I) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes r_Y"] \\
X\otimes Y \arrow[r, equal] & X\otimes Y,
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
(I\otimes X)\otimes Y \arrow[r] \arrow[d, "l_X\otimes\mathrm{id}"'] & I\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "l_{X\otimes Y}"] \\
X\otimes Y \arrow[r, equal] & X\otimes Y
\end{tikzcd}$$

は可換である。

なお，モノイド圏において，単位対象は同型を除いて一意的である[19]。以下では，図式において明らかな場合には結合拘束を省略して記すことにする。

1.3 ブレイド圏

モノイド圏にテンソル積の左右の入れ替えの関係を付け加えたものがブレイド圏である。

圏 $\mathcal{C}$ は $(\otimes, a, I, l, r)$ によってモノイド圏の構造を持っていると仮定する。

定義 1.3.1 (交換拘束) 任意の対象 X, Y に対して，自然な同型射

$$c_{X,Y} : X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X$$

であって，任意の $X, Y, Z\in\mathcal{C}$ に対して，図式

18. G.M. Kelly, On MacLane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc. J. Alg. **1** (1964)
19. [D1 p.1425]

$$\begin{array}{ccccc}
(X\otimes Y)\otimes Z & \longrightarrow & (Y\otimes X)\otimes Z & \longrightarrow & Y\otimes(X\otimes Z)\\
\downarrow & & & & \downarrow\\
X\otimes(Y\otimes Z) & \longrightarrow & (Y\otimes Z)\otimes X & \longrightarrow & Y\otimes(Z\otimes X)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
X\otimes(Y\otimes Z) & \longrightarrow & X\otimes(Z\otimes Y) & \longrightarrow & (X\otimes Z)\otimes Y\\
\downarrow & & & & \downarrow\\
(X\otimes Y)\otimes Z & \longrightarrow & Z\otimes(X\otimes Y) & \longrightarrow & (Z\otimes X)\otimes Y
\end{array}$$

を可換にするとき，同型射の族 $\{c_{X,Y}\}$ を $\otimes$ に対する $\mathcal{C}$ の交換拘束 (commutativity constraint, braiding) と呼ぶ。

上の図式の可換性を六角形関係式 (hexagon relation) という。なお, $c_{Y,X}\circ c_{X,Y}$ は $\mathrm{id}_{X\otimes Y}$ と等しいとは限らない[20]。

定義 1.3.2 (ブレイド圏) 交換拘束を持つモノイド圏をブレイド圏 (braided monoidal category) という[21]。

命題 1.3.3 ブレイド圏において, 図式

$$\begin{array}{ccc}
X\otimes I & \longrightarrow & I\otimes X\\
\downarrow & & \downarrow\\
X & = & X
\end{array}\quad,\quad
\begin{array}{ccc}
I\otimes X & \longrightarrow & X\otimes I\\
\downarrow & & \downarrow\\
X & = & X
\end{array}$$

は可換である。

命題 1.3.4 (Yang-Baxter 関係式) ブレイド圏において, 図式

$$\begin{array}{ccccc}
X\otimes Y\otimes Z & \longrightarrow & Y\otimes X\otimes Z & \longrightarrow & Y\otimes Z\otimes X\\
\downarrow & & & & \downarrow\\
X\otimes Z\otimes Y & \longrightarrow & Z\otimes X\otimes Y & \longrightarrow & Z\otimes Y\otimes X
\end{array}$$

は可換である。ただし, 結合拘束は省略した。

---

20. 昔は別の目的 (モチーフの理論) のためにテンソル圏の一般論が展開されていて, $c_{Y,X}\circ c_{X,Y}=\mathrm{id}_{X\otimes Y}$ の場合だけが考察されており, そのときに $c_{X,Y}$ は commutativity constraint と呼ばれていた。そうでない場合を含め braiding と呼ぶ訳だが, ここでは結合拘束という言葉との整合性から, braiding のことをも交換拘束と呼ぶことにする。昔の定式化については例えば, 次を参照。
P. Deligne and J. Milne, Tannakian categories, in LNM 900, Springer 1982
21. [D1] では quasi-tensor category と呼んでいる。

1.4 リヂッドなモノイド圏

$\mathcal{C}$ をモノイド圏とし, I を単位対象とする。

定義 1.4.1 (双対対象) $\mathcal{C}$ の対象 A, B に対して, 射

$$\varepsilon_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow I$$
$$\eta_{B,A} : I \longrightarrow B \otimes A$$

であって, 射の列

$$A \xleftarrow{\sim} A \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta_{B,A}} A \otimes (B \otimes A) \xleftarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes A \xrightarrow{\varepsilon_{A,B}\otimes\mathrm{id}} I \otimes A \xrightarrow{\sim} A$$

$$B \xleftarrow{\sim} I \otimes B \xrightarrow{\eta_{B,A}\otimes\mathrm{id}} (B \otimes A) \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{A,B}} B \otimes I \xrightarrow{\sim} B$$

の合成がそれぞれ id_A と id_B に等しいようなものが存在するとき, A は B の左双対対象, B は A の右双対対象という。

左双対対象および右双対対象は, それぞれ存在すれば同型を除いて一意的に定まるので[22] $A = B^*$, $B = {}^*A$ と表す。さて, 双対対象という名称の所以は, 次の命題にある。

命題 1.4.2 上の状況で, 任意の対象 X, Y に対して, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B \otimes Y)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes B, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes A)$$

が存在する。

すなわち, 関手 $A\otimes$ が 関手 $B\otimes$ の左随伴関手に, 関手 $\otimes A$ が 関手 $\otimes B$ の右随伴関手になっている。

定義 1.4.3 (リヂッドなモノイド圏) モノイド圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象が左双対対象と右双対対象をともに持つとき, $\mathcal{C}$ はリヂッドなモノイド圏であるという[23]。さらにブレイド圏であれば, リヂッドなブレイド圏であるという[24]。

モノイド圏 $\mathcal{C}$ がリヂッドならば, 任意の対象 A に対して同型 ${}^*(A^*) \xrightarrow{\sim} A \xrightarrow{\sim} ({}^*A)^*$ が存在する。

さて, モノイド圏 $\mathcal{C}$ がリヂッドならば, 関手

$$\begin{aligned} F_B : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{S}ets \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes B, I) \end{aligned}$$

が左双対対象 $A = B^*$ で表現される。すなわち, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes B, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$$

---

22. [D1 p.1426]
23. リヂッドという性質の意味は, 昔の流儀では, $\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} A^* \otimes B$ となるような双関手 $\mathrm{Hom} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ がうまく定義できるという感じのものであったが, 結果的にここで述べた定義と一致する。
24. ブレイド圏に対しては, 左 (右) 双対対象は自動的に右 (左) 双対対象にもなる。

が存在する。さらに, リヂッドなモノイド圏に対しては, 対象 B にその左双対対象 B^* を対応させる関手は反圏同値になる。[IV] では, (この状況に基づき) リヂッドの条件を弱めた概念を定義している。

定義 1.4.4 (弱リヂッドなモノイド圏) [Def A.4] モノイド圏 $\mathcal{C}$ とその対象 B に対して関手 F_B が表現可能になるときに, 対象 B は弱リヂッド (weakly rigid) であると呼ぶ。このとき F_B を表現する対象を B^* と定義し, 任意の対象が弱リヂッドで, 関手 $B \mapsto B^*$ が反圏同値となるとき, モノイド圏 $\mathcal{C}$ は弱リヂッドであると定義する。

定義 1.4.5 (リヂッドな対象) [Def A.5] モノイド圏 $\mathcal{C}$ は弱リヂッドであるとする。$\mathcal{C}$ の対象 B が (Kazhdan-Lusztig の意味で) リヂッドであるとは, B が左双対対象を持つことである[25]。

1.5 Abel 圏の場合

定義 1.5.1 (Frobenius 圏) [Def A.9] 弱リヂッドなモノイド圏 $\mathcal{C}$ が同時に Abel 圏であって,

(1) テンソル積 $\otimes$ は双加法的で右完全な関手である。

(2) $\mathcal{C}$ は弱リヂッドで, 左双対対象を対応させる関手は完全関手である。

(3) 単位対象 I は Abel 圏としての単純対象である。

(4) $\mathcal{C}$ は射影的対象および入射的対象を充分に持つ。

(5) ある対象が射影的であることと入射的であることは同値で, そのような対象は常にリヂッドである。

なる条件をみたすとき, $\mathcal{C}$ は Frobenius 圏であるという。

予想 1.5.2 [Conj A.1] $\mathcal{C}$ が Frobenius 圏で, $X \otimes Y$ がリヂッドならば X と Y はリヂッドである。

この予想は, 特別な状況では証明することができる。R を可換環とする。

定義 1.5.3 (環上のモノイド圏) [IV p.448] $\mathcal{C}$ を Abel 圏とすると, 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, 射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は加法群の構造を持っているが, これがさらに R-加群の構造を持ち, 射の合成から得られる写像が R-加群準同型になっているとき, $\mathcal{C}$ は R 上

25. [IV] では弱リヂッドなモノイド圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象がリヂッドであるときにモノイド圏 $\mathcal{C}$ はリヂッドであると定義しているが, 実はこれは定義 1.4.1 と一致する。実際, 任意の対象が左双対対象を持つようなモノイド圏に対して, 関手 $X \mapsto X^*$ は常に充満的忠実であるが, これが反圏同値になるための必要十分条件は $\mathcal{C}$ の任意の対象が右双対対象を持つことである。

の Abel 圏 (R-category) と呼ぶ[26]。さらに, $\mathcal{C}$ がモノイド圏で, 双関手 $\otimes$ が R-加群構造と両立し, 結合拘束が R-加群準同型であるときに, $\mathcal{C}$ は R 上のモノイド圏 (monoidal R-category) であると呼ぶ。

特に $R = \mathbb{C}[[\varpi]]$, $F = \mathbb{C}((\varpi))$ とし, 標準的な写像

$$\pi : R \twoheadrightarrow \mathbb{C}, \quad j : R \hookrightarrow F$$

を考える。$\mathcal{D}$ を R 上の Abel 圏とするとき, 対象は $\mathcal{D}$ と同じで, 射の集合が

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \otimes_R F, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \otimes_R \mathbb{C}$$

となっているような Abel 圏を考えると, それぞれ F 上, $\mathbb{C}$ 上の Abel 圏である。これらを, それぞれ $\mathcal{D}_F$, $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ と書くことにすると, 標準的な関手

$$\mathcal{D}_F \longleftarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$$

がある。ここで, $\mathcal{D}$ が R 上のモノイド圏であれば, 対応して $\mathcal{D}_F$ と $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ 上にモノイド圏の構造が誘導される。

さて R 上の Abel 圏 $\mathcal{D}$ の対象 X がねじれていない (torsion free) とは, X 上で ϖ 倍する射 $\varpi\,\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,X)$ が単射であることと定義する。

補題 1.5.4 [Lem A.12] $\mathcal{D}$ は R 上の Frobenius 圏であって, 任意の対象はねじれていないとする。$\mathcal{D}$ の対象 X がリヂッドであるための必要十分条件は, 対応する $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ の対象 $\bar{X}$ がリヂッドであることである。

命題 1.5.5 [Prop A.3] $\mathcal{D}$ は R 上の Frobenius 圏であって, 任意の対象はねじれていないとする。また $\mathcal{D}_F$ はリヂッドであると仮定する。このとき $\mathcal{D}$ の対象 $X \otimes Y$ がリヂッドならば X と Y はリヂッドである。

これらの結果は, 後に圏 $\mathcal{O}_\kappa$ がリヂッドであることを示すのに利用する[27]。

1.6 ブレイド関手

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ をブレイド圏とする。

定義 1.6.1 (ブレイド関手) [Def A.12] $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'$ へのブレイド関手とは, ある関手 $\mathbf{X} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と関手的な同型射 $m_{A,B} : \mathbf{X}(A) \otimes \mathbf{X}(B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(A \otimes B)$ の族 $\{m_{A,B}\}$ の組であって, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}(A) \otimes \mathbf{X}(B) \arrow[r, "c_{\mathbf{X}(A),\mathbf{X}(B)}"] \arrow[d, "m_{A,B}"'] & \mathbf{X}(B) \otimes \mathbf{X}(A) \arrow[d, "m_{B,A}"] \\
\mathbf{X}(A \otimes B) \arrow[r, "\mathbf{X}(c_{A,B})"] & \mathbf{X}(B \otimes A)
\end{tikzcd}$$

26. ここでは Abel 圏であることを強調してこのように呼ぶことにする。
27. はずなのだが, よく理解できない。

$$\begin{CD}
(\mathbf{X}(A)\otimes\mathbf{X}(B))\otimes\mathbf{X}(C) @>{a_{\mathbf{X}(A),\mathbf{X}(B),\mathbf{X}(C)}}>> \mathbf{X}(A)\otimes(\mathbf{X}(B)\otimes\mathbf{X}(C))\\
@V{m_{A,B}\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{X}(C)}}VV @VV{\mathrm{id}_{\mathbf{X}(A)}\otimes m_{B,C}}V\\
\mathbf{X}(A\otimes B)\otimes\mathbf{X}(C) @. \mathbf{X}(A)\otimes\mathbf{X}(B\otimes C)\\
@V{m_{A\otimes B,C}}VV @VV{m_{A,B\otimes C}}V\\
\mathbf{X}((A\otimes B)\otimes C) @>{\mathbf{X}(a_{A,B,C})}>> \mathbf{X}(A\otimes(B\otimes C))
\end{CD}$$

を可換にし, かつ単位対象を単位対象に写すようなものである。

補題 1.6.2 [Lem A.14] $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ がリジッドなブレイド Abel 圏で, $\mathbf{X}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ が左完全なブレイド関手であるならば,

(1) 任意の対象 $A\in\mathcal{C}$ に対して, その左双対対象 A^* の像 $\mathbf{X}(A^*)$ は $\mathbf{X}(A)$ の左双対対象である。

(2) 関手 $\mathbf{X}$ は完全かつ忠実な関手である。

1.7 圏同値の証明法

最後に, 圏同値を示すための論法を紹介しておく。この部分ではブレイド関手であることは必要ない。

定義 1.7.1 (Artin 圏) [Def A.13] Abel 圏 $\mathcal{C}$ が Artin 圏であるとは, 任意の対象が, 有限フィルター付けであって, 各部分商が単純対象となるようなものを持つことである。

定義 1.7.2 (豊富な射影系) [Def A.13] Artin 圏 $\mathcal{C}$ の射影的対象の族 $\{P_j\,|\,j\in J\}$ が豊富 (ample) であるとは, 任意の単純対象 $L\in\mathcal{D}$ に対してある番号 $j_0\in J$ が存在して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(P_{j_0},L)\neq 0$ となることである。

このとき

補題 1.7.3 [Lem A.15] $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ は Artin 圏とする。$\{P_j\}$ は $\mathcal{C}$ の豊富な射影系であって, 完全かつ忠実な関手 $\mathbf{X}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ によって $\mathcal{C}'$ の豊富な射影系に写されるものとする。もし, 任意の番号 j,k に対して, 関手 $\mathbf{X}$ が同型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_j,P_k)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathbf{X}(P_j),\mathbf{X}(P_k))$$

を与えるならば, $\mathbf{X}$ は圏同値である。

§2 Дринфельд の圏同値

この章では, Дринфельд (Drinfeld) の圏同値について, 論文 [III] に従って解説する。まず, 複素数体上の半単純 Lie 環について復習してから, 形式的巾級数環 $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上の[28] Lie 環 $\mathfrak{g}[[\varpi]]$ の有限次元表現の圏 $\mathcal{D}$ を考え, KZ 方程式を用いて結合拘束を定義することにより, リヂッドなブレイド圏の構造を導入する。この圏と Дринфельд の意味の量子展開環[29] の有限次元表現の圏 $\mathcal{E}$ との間の圏同値関手を具体的に構成する。この二つの圏の同値性は, quasi-Hopf 代数の議論とコホモロジーの消滅の議論で Дринфельд によって証明されていたことであるが[30], ここでは直接的に圏同値関手を構成する。

文献としては, 複素半単純 Lie 環については標準的な教科書 [Hu][31] を参照していただきたい。また, $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上での議論については [III] の他に, 既にあげた [D1] および [Kas p.385] をみていただきたい。さらに, 量子展開環については [L1][32] の Part I も参照していただきたい。

2.1 $\mathbb{C}$ 上の半単純 Lie 環

用語をまとめるため, 半単純 Lie 環の復習から始める。$\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純 Lie 環とし, Cartan 部分環を $\mathfrak{h}$ とする。$\mathfrak{g}$ の不変な対称双線型形式 $(-|-)$ の $\mathfrak{h}$ への制限は非退化で, $\mathfrak{h}^*$ に誘導する内積を同じ記号で表す。このとき $\mathfrak{g}$ はルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha \right), \ \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [H, X] = \alpha(H)X\}$$

を持つ。$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \,|\, \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ とおくと Δ は被約なルート系をなす。Δ で生成された $\mathbb{Z}$-加群をルート格子といい, Q と表す。Δ は正ルートの集合 Δ^+ と負ルートの集合 $\Delta^- = -\Delta^+$ に分けることができ, ある単純ルートの集合 $\Pi \subset \Delta^+$ が存在して, 任意の正ルートは Π の元の非負整数係数の一次結合で表される。さて, $\mathfrak{g}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$ とする。さらに, $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とするとき,

$$a_{i,j} = \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_i|\alpha_i)}$$

と定めると, 行列 $(a_{i,j})_{i,j=1}^r$ は Cartan 行列である。

定理 2.1.1 (Serre)[33] $\mathfrak{g}$ は $\{e_i, f_i, h_i \,|\, i = 1, \cdots, r\}$ で生成された自由 Lie 環を, 関係式

$$[h_i, e_j] = a_{i,j} e_j, \ [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j, \ [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i$$
$$(\mathrm{ad} e_i)^{-a_{i,j}+1}(e_j) = 0, \ (\mathrm{ad} f_i)^{-a_{i,j}+1}(f_j) = 0, \quad (i \neq j)$$

で生成されたイデアルで割って得られる Lie 環に同型である。ただし $(\mathrm{ad}X)(Y) = [X, Y]$ である。

28. Дринфельд は $\varpi = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$ なる不定元 h に関する形式的巾級数環 $\mathbb{C}[[h]]$ 上で議論している。
29. Дринфельд は $U_h(\mathfrak{g})$ と表している。これは我々の場合, 神保の定式化 $U_q(\mathfrak{g})$ において, q が $\mathbb{C}[[\varpi]]$ の元 $q = \exp(\pi\sqrt{-1}\varpi)$ であると考えた場合に相当する。
30. [Kas, p.460] を参照。
31. J.E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and their representation theory, GTM 9, Springer 1972
32. G. Lusztig, Introduction to quantum groups, Birkäuser 1993
33. J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin 1966

この同型で, e_i は $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ の元, f_i は $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ の元, h_i は $\mathfrak{h}$ の元と同一視する。

次に, $\mathfrak{g}$-加群, すなわち $\mathfrak{g}$ の表現を考える。表現が自明でない真部分表現を持たないとき, 既約表現あるいは単純加群という。支配的整ウェイト (dominant integral weight) とは,

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

の元のことである[34]。任意の支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ に対して

$$e_i v_\lambda = 0,\ h_i v_\lambda = \lambda(h_i) v_\lambda$$

をみたすベクトル $v_\lambda (\neq 0)$ を持つ有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathbf{V}_\lambda$ が同型を除いて一意的に存在する。次の古典的な結果は我々にとっても基本的である。

定理 2.1.2 (Cartan-Weyl の分類) 有限次元 $\mathfrak{g}$-加群のなす Abel 圏は半単純 (semi-simple) であり, 単純対象 (simple object) の同型類の集合は, 支配的整ウェイトの集合 P_+ により $\lambda \mapsto \mathbf{V}_\lambda$の同型類 とパラメトライズされる。

言い換えると, 任意の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群は完全可約, つまり既約表現の直和に同型であり, また $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は, ある一意的に定まる $\lambda \in P_+$ に対する $\mathbf{V}_\lambda$ と同型になる。

2.2 Lie 環 $\mathfrak{g}[[\varpi]]$ と圏 $\mathcal{D}$

以下では $\mathfrak{g}$ は単純 Lie 環とする。これに対し

$$\mathfrak{g}[[\varpi]] = \mathbb{C}[[\varpi]] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$$

と定義し, 括弧積を

$$[f(h) \otimes X, g(h) \otimes Y] = f(h)g(h) \otimes [X, Y]$$

と定めて, これを ($\mathbb{C}$ 上ではなく) $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上の Lie 環とみなしたものを考える[35] 。

定義 2.2.1 (圏 $\mathcal{D}$) [19.3] $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群 M であって[36], $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群としては有限階数の自由加群であるようなものを対象とし, $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群準同型を射とする圏を $\mathcal{D}$ とする。

明らかに $\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上の Abel 圏になる。例えば, 有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V に対して,

$$V[[\varpi]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} v_n \varpi^n \mid v_n \in V\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[\varpi]] \otimes_{\mathbb{C}} V$$

と定義すれば, これは自然に $\mathcal{D}$ の対象になり, さらに

$$\begin{array}{ccc} \{\text{有限次元 } \mathfrak{g}\text{-加群の同型類}\} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\mathcal{D} \text{ の対象の同型類}\} \\ V & \longmapsto & V[[\varpi]] \\ M/\varpi M & \longleftarrow & M \end{array}$$

34. 原論文では, 自然数の集合の直積と同一視して $\mathbf{N}^I$, (I は単純ルートの添え字集合) と書いている。
35. 従って, これは単なる係数拡大であって, ループ代数ではない。しかし, $\mathbb{C}[[\varpi]]$ が体でないことから, 表現のなす圏の性質が変わってくる。
36. 原論文では, $\mathfrak{g}[[\varpi]]$ の $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上の展開環 $\mathfrak{U}$ 上の加群という言い方をしている。また [Kas] では $U(\mathfrak{g})[[\varpi]]$-加群という言い方をしている。

なる対応があり[37],

$$\{\text{有限次元既約 } \mathfrak{g}\text{-加群の同型類}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{直既約な } \mathcal{D} \text{ の対象の同型類}\}$$

となっている[38]。特に, M が $\mathcal{D}$ の対象ならばウェイト分解

$$M = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M^\mu, \quad M^\mu = \{v \in M \mid h_i v = \mu(h_i) v\}$$

が存在する。

定義 2.2.2 (組紐作用) [19.4] M を $\mathcal{D}$ の対象とする。各番号 i に対して, $\mathbb{C}[[\varpi]]$-準同型写像 $\theta_i : M \to M$ を $x \in M^\mu$ に対して

$$\theta_i(x) = \sum_{\substack{p,q,r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ p-q+r=\mu(h_i)}} \frac{(-1)^q}{p!q!r!} f_i{}^p e_i{}^q f_i{}^r x$$

と定義し, これを組紐作用 (braid group action) という。また Weyl 群 W の最長元 w_0 の最短表示 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ を用いて

$$\theta_0 = \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_N}$$

と定義する。

$\{\theta_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群に附随した組紐群の表現をなし, θ_0 は w_0 の最短表示のとり方に依らない。また, θ_0 の作用は $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群準同型と可換である。

定義 2.2.3 (ベクトル y_λ, x_λ) [19.4] $\mathbf{V}_\lambda$ の最高ウェイトベクトル y_λ を固定し, 対応する $\mathbf{V}_\lambda[[\varpi]]$ の元 $1 \otimes y_\lambda$ を同じく y_λ で表す：

$$h_i y_\lambda = \lambda(h_i) y_\lambda, \quad e_i y_\lambda = 0$$

また, θ_0 を用いて最低ウェイトベクトル $x_\lambda = \theta_0(y_\lambda)$ を定義する。

定義 2.2.4 (対合 $^-$: $P_+ \to P_+$) [19.1] 支配的整ウェイト λ に対して, $\bar{\lambda} = -w_0 \lambda$ と定義する。

すると, $\mathbf{V}_\lambda$ の最低ウェイトは $\bar{\lambda}$ に他ならない。

補題 2.2.5 [19.5] M, M' が $\mathcal{D}$ の対象ならば, $M \otimes_{\mathbb{C}[[\varpi]]} M'$ は自然に $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群の構造を持ち $\mathcal{D}$ の対象になる。特に, $\mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes_{\mathbb{C}[[\varpi]]} \mathbf{V}_\mu[[\varpi]] = (\mathbf{V}_{\bar{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{V}_\mu)[[\varpi]]$ は $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群としてベクトル $x_{\bar{\lambda}} \otimes y_\mu$ で生成される。

---

37. 射の集合が異なるので当然ながら圏同値ではない。

38. $\mathcal{D}$ の対象 M が直既約とは, M の任意の真部分 $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群 $M_1 \in \mathcal{D}$ に対して $M = M_1 \oplus M_2$ と直和分解するような真部分 $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群 $M_2 \in \mathcal{D}$ が存在しないことを意味する。ここで, V が既約 $\mathfrak{g}$-加群であっても, $V[[\varpi]]$ は既約 $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群ではない。実際, $\varpi V[[\varpi]] \in \mathcal{D}$ は $V[[\varpi]]$ の自明でない真部分 $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群である。しかし, $V[[\varpi]]/\varpi V[[\varpi]] \simeq V$ は自由 $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群ではないから, $\mathcal{D}$ の対象ではない。

2.3 形式的 KZ 方程式

Cartan 行列 $D = (a_{i,j})$ は対称化を持つ。すなわち, $DA = (d_i a_{i,j})$ が対称行列となるような対角行列 $D = \mathrm{Diag}(d_i)$ であって, その各成分 d_i は $1, 2, 3$ のどれかであるようなものが存在する。そのような最小のものをとり, $\mathfrak{h}^*$ の内積を,

$$(\alpha_i|\alpha_j) = d_i a_{i,j} = d_j a_{j,i}$$

と正規化する。また, $\mathfrak{g}$ の Weyl ベクトル $\rho \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta +} \alpha$$

と定義する。

命題 2.3.1 (作用素 t) [19.2,19.6] $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の元 $\mathbf{t}$ であって

$$\mathbf{t} = \sum_{i,j} d_i b_{i,j} h_i \otimes h_j + \sum_i d_i (e_i \otimes f_i + f_i \otimes e_i) + \cdots$$

の形をしており, 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $(x \otimes 1 + 1 \otimes x)\mathbf{t} = \mathbf{t}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$ が $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ の元とみて成立するようなものがただ一つ存在する[39]。ただし, $(b_{i,j})$ は Cartan 行列の逆行列であり, $\cdots$ は (単純でない正ルートベクトル) $\otimes$ (対応する負ルートベクトル) または (単純でない負ルートベクトル) $\otimes$ (対応する正ルートベクトル) からなる項を表す。さらに, v が $\mathbf{V}_\lambda \otimes \mathbf{V}_\mu$ の $\mathbf{V}_\nu$ に同型な部分加群の元であれば,

$$\mathbf{t}(v) = -\frac{1}{2} \left[(\lambda|\lambda + 2\rho) + (\mu|\mu + 2\rho) - (\nu|\nu + 2\rho) \right] v$$

が成立する。

$\mathbf{t}$ を自然に $\mathfrak{g}[[\varpi]] \otimes \mathfrak{g}[[\varpi]]$ の元とみなす。

さて, M_1, M_2, M_3 を $\mathcal{D}$ の対象とし, $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群としてのテンソル積 $M = M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$ を考える。元 $\mathbf{t}$ を二通りの仕方で M に作用させる：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{12} &: M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \xrightarrow{\mathbf{t} \otimes 1} M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \\ \mathbf{t}_{23} &: M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \xrightarrow{1 \otimes \mathbf{t}} M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \end{aligned}$$

定義 2.3.2 (形式的 KZ 方程式) [19.8] 開区間 $(0,1)$ 上で定義された M に値をとる関数 $f : (0,1) \longrightarrow M$ に対する微分方程式

$$\frac{df}{dz} = \varpi \left(\frac{\mathbf{t}_{12}}{z} + \frac{\mathbf{t}_{23}}{z-1} \right) f$$

を形式的 KZ 方程式[40] という。

39. 不変双一次形式 $(-|-)$ に関する $\mathfrak{g}$ の双対基底 $\{J_a\}, \{J^a\}$ をとって $\mathbf{t} = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} J_a \otimes J^a$ と定義したものに他ならない。
40. Knizhnik-Zamolodchikov equation

形式的 KZ 方程式の解 f が解析的であるとは, $M \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[\varpi]] \otimes V_0$ となるような $\mathbb{C}$-部分空間 V_0 を選んで $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\varpi^n$, $(f_n(z) \in V_0)$, と表したときに, 各 $f_n(z)$ が解析的であることと定義する [19.8]。すると, 解析的であるという性質は V_0 のとり方に依らずに定まる。そこで, 形式的 KZ 方程式の解析的な解全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathcal{H}$ と表すことにする[41]。

さて, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して, 対応

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow M \\ R_0 : f &\longmapsto \lim_{z\to 0} z^{-\varpi \mathbf{t}_{12}} f(z) \\ R_1 : f &\longmapsto \lim_{z\to 1} (1-z)^{-\varpi \mathbf{t}_{23}} f(z) \end{aligned}$$

を考える。ただし,

$$z^{-\varpi\mathbf{t}_{12}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\log z)^n \varpi^n \mathbf{t}_{12}^n f(z)}{n!}$$

$$(1-z)^{-\varpi\mathbf{t}_{23}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-\log(1-z)\big)^n \varpi^n \mathbf{t}_{23}^n f(z)}{n!}$$

である。すると, R_0, R_1 は同型写像となる。

2.4 ブレイド圏 $\mathcal{D}$

さて, $\mathcal{D}$ のテンソル積を, $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上のテンソル積 $M_1 \otimes M_2 = M_1 \otimes_{\mathbb{C}[[\varpi]]} M_2$ に通常のように $\mathfrak{g}[[\varpi]]$ を作用させることで定義する:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}[[\varpi]] \times M_1 \otimes M_2 &\longrightarrow M_1 \otimes M_2 \\ (x, v_1 \otimes v_2) &\longmapsto xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes xv_2 \end{aligned}$$

かくして, 双関手

$$\begin{aligned} \otimes : \quad \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (M_1, M_2) &\longmapsto M_1 \otimes M_2 \end{aligned}$$

が定義された。すると, $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$ と $M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$ はともに $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群として $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$ と同型である。これに, わざと (しかし自然に) 自明でない結合拘束と交換拘束を導入して $\mathcal{D}$ をブレイド圏とみなす。

定義 2.4.1 (結合拘束と交換拘束) [19.10,19.12] 結合拘束

$$a_{M_1,M_2,M_3} : (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \longrightarrow M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$$

を, $M = M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$ に対する形式的 KZ 方程式を用いて $a_{M_1,M_2,M_3} = R_1 R_0^{-1}$ と定義する[42]。また, 交換拘束

$$c_{M_1,M_2} : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M_2 \otimes M_1$$

41. 形式的 KZ 方程式について詳しくは [Kas p.455–] を参照していただきたい。
42. これは最近では Drinfeld associator と呼ばれている。

を, $c_{M_1,M_2}(v_1 \otimes v_2) = \exp(\sqrt{-1}\pi\varpi\mathbf{t})(v_2 \otimes v_1)$ と定義する。ただし,

$$\exp(\sqrt{-1}\pi\varpi\mathbf{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varpi^n(\pi\sqrt{-1}\mathbf{t})^n}{n!}$$

である。

定理 2.4.2 (Дринфельд) [D1][43] $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上のテンソル積と結合拘束 $\{a_{M_1,M_2,M_3}\}$ 及び交換拘束 $\{c_{M_1,M_2}\}$ によって, $\mathcal{D}$ はリヂッドなブレイド圏の構造を持つ。

2.5 種々の纏絡作用素 [44] の構成

作用素

$$T_{\lambda,\mu} : \mathbf{V}_{\lambda+\mu}[[\varpi]] \longrightarrow \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]]$$

を, $y_{\lambda+\mu}$ を $y_\lambda \otimes y_\mu$ に写す唯一の $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群準同型とする。また, 作用素

$$S'_\lambda : \mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]] \longrightarrow \mathbb{C}[[\varpi]]$$

を, $x_{\bar\lambda} \otimes y_\lambda$ を 1 に写す唯一の $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群準同型とする。

命題 2.5.1 [20.10] λ に応じてうまく定数 g_λ を選んで, $S_\lambda = g_\lambda S'_\lambda$ とおけば, 任意の λ, μ に対して $\mathcal{D}$ の射の列

$$\mathbf{V}_{\bar\lambda+\bar\mu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu+\lambda}[[\varpi]] \xrightarrow{T_{\bar\lambda,\bar\mu}\otimes T_{\mu,\lambda}} (\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\bar\mu}[[\varpi]]) \otimes (\mathbf{V}_\mu[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]])$$
$$\xrightarrow{\sim} (\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes (\mathbf{V}_{\bar\mu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]])) \otimes \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]]$$
$$\xrightarrow{(1\otimes S_\mu)\otimes 1} (\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbb{C}[[\varpi]]) \otimes \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]] \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]] \xrightarrow{S_\lambda} \mathbb{C}[[\varpi]]$$

の合成が, $\mathcal{D}$ の射

$$\mathbf{V}_{\bar\lambda+\bar\mu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\mu}[[\varpi]] \xrightarrow{S_{\lambda+\mu}} \mathbb{C}[[\varpi]]$$

に一致するようにできる。

さて, 任意の $\lambda, \mu, \nu \in P_+$ に対して, $\mathcal{D}$ の射

$$\mathrm{tr}^\nu_{\lambda,\mu} : \mathbf{V}_{\bar\lambda+\bar\nu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu+\mu}[[\varpi]] \longrightarrow \mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]]$$

を $\mathcal{D}$ の射の列

$$\mathbf{V}_{\bar\lambda+\bar\nu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu+\mu}[[\varpi]] \xrightarrow{T_{\bar\lambda,\bar\nu}\otimes T_{\nu,\mu}} (\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\bar\nu}[[\varpi]]) \otimes (\mathbf{V}_\nu[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]])$$
$$\xrightarrow{\sim} (\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes (\mathbf{V}_{\bar\nu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\nu[[\varpi]])) \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]]) \xrightarrow{S_\nu} \mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]]$$

の合成と定義する。このとき,

補題 2.5.2 [21.3] 次が成立する：$\mathrm{tr}^{\nu_1+\nu_2}_{\lambda,\mu} = \mathrm{tr}^{\nu_1}_{\lambda,\mu} \circ \mathrm{tr}^{\nu_2}_{\lambda+\nu_1,\mu+\nu_1}$

43. [Kas p.471] も参照せよ。
44. 島和久「連続群とその表現」(岩波書店) より借用した "intertwining operator" の訳語で, 「てんらく」と発音する。ただし, 本論説では intertwining という性質を明確な定義の下で考えている訳ではなく, 雰囲気を言い表しているに過ぎない。

さて, 次に $i \in \{1, \cdots, r\}$ を固定し, $\lambda, \mu \in P_+$ は条件 $\lambda(h_i) \geq 1$, $\mu(h_i) \geq 1$ を満たすものとすると, $\lambda + \mu - \alpha_i \in P_+$ が成立する。そこで, 作用素

$$\tau_{i;\lambda,\mu} : \mathbf{V}_{\lambda+\mu-\alpha_i}[[\varpi]] \longrightarrow \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]]$$

を, 次のように定義する。まず, $\tau'_{i;\lambda,\mu} : \mathbf{V}_{\lambda+\mu-\alpha_i}[[\varpi]] \longrightarrow \mathbf{V}_\lambda[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_\mu[[\varpi]]$ を

$$\tau'_{i;\lambda,\mu} : y_{\lambda+\mu-\alpha_i} \longmapsto \lambda(h_i) y_\lambda \otimes f_i y_\mu - \mu(h_i) f_i y_\lambda \otimes y_\mu$$

なる唯一の $\mathfrak{g}[[\varpi]]$-加群準同型とし,

$$\tau_{i;\lambda,\mu} = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda(h_i)\varpi)\Gamma(1+\mu(h_i)\varpi)\Gamma(1-(\lambda(h_i)+\mu(h_i))\varpi)} \tau'_{i;\lambda,\mu}$$

とする。ただし, 各複素数 r に対して, 古典的なガンマ関数を用いて書かれた解析関数 $z \mapsto \Gamma(1+rz)$ の $z=0$ における巾級数展開に形式的に $z = \varpi$ を代入して得られる $\mathbb{C}[[\varpi]]$ の元を $\Gamma(1+r\varpi)$ と表した。

2.6 関手 X の構成

q は $\mathbb{C}[[\varpi]]$ の元 $q = \exp(\pi\sqrt{-1}\varpi)$ を表すものとする。任意の非負整数 n に対して

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! = [n]_q \cdots [1]_q$$

と定める。これらは $\mathbb{C}[[\varpi]]$ の元である。また, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$q^z = \exp(\pi\sqrt{-1}z\varpi)$$

とおく。

$\beta \in P$ を固定する。$\lambda + \beta \in P_+$ となる $\lambda \in P_+$ をとり, 任意の $M \in \mathcal{D}$ に対して

$$M_\beta^{(\lambda)} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\beta}[[\varpi]], M)$$

とおく。ここで, $\nu \in P_+$ ならば, $\mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\beta}[[\varpi]] \xrightarrow{f} M$ に対して写像の列

$$\mathbf{V}_{\overline{\lambda+\nu}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\nu+\beta}[[\varpi]] \xrightarrow{\mathrm{tr}^\nu_{\lambda,\lambda+\beta}} \mathbf{V}_{\bar\lambda}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\beta}[[\varpi]] \xrightarrow{f} M$$

の合成を対応させる写像

$$\begin{aligned} \psi : M_\beta^{(\lambda)} &\longrightarrow M_\beta^{(\lambda+\nu)} \\ f &\longmapsto f \circ \mathrm{tr}^{\lambda+\nu+\beta}_{\lambda+\nu,\nu} \end{aligned}$$

を考える。すると,

補題 2.6.1 [25.2] $\mathbb{C}[[\varpi]]$-準同型の族 $\left\{M_\beta^{(\lambda)} \xrightarrow{\psi} M_\beta^{(\lambda+\nu)}\right\}_{\lambda,\nu \in P_+}$ は帰納系をなし, しかも, λ が十分大きければ ψ は同型写像になる。

定義 2.6.2 ($\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群 $\mathbf{X}(M)^\beta$) [25.3] $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群 $\mathbf{X}(M)$ を

$$\mathbf{X}(M) = \sum_{\beta \in \mathfrak{h}^*} \mathbf{X}(M)^\beta, \quad \mathbf{X}(M)^\beta = \varinjlim_{\lambda} M_\beta^{(\lambda)}$$

と定義する。

注意 2.6.3 $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群としては $\mathbf{X}(M) \simeq M$ であるが, 以下で作用素 E_i, F_i を標準的に与えるために定義 2.6.2 のような記述をするのである。

さて, $i \in \{1, \cdots, r\}$ を固定し, $\lambda(h_i) \geq 1$, $\mu(h_i) \geq 1$ とする。各 $\nu \in P$ に対して, 写像

$$\Phi^{\nu}_{i;\lambda,\mu} : \mathbf{V}_{\bar{\lambda}+\bar{\nu}-\bar{\alpha}_i}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu+\mu}[[\varpi]] \longrightarrow \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu}[[\varpi]]$$

を, 写像の列

$$\mathbf{V}_{\bar{\lambda}+\bar{\nu}-\bar{\alpha}_i}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu+\mu}[[\varpi]] \xrightarrow{[\nu(h_i)]_q^{-1}\tau_{i;\bar{\lambda},\bar{\nu}} \otimes T_{\nu,\mu}} \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\bar{\nu}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu}[[\varpi]] \xrightarrow{1 \otimes S_\nu \otimes 1} \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu}[[\varpi]]$$

の合成で定義する。また, 写像

$$\Psi^{\nu}_{i;\lambda,\mu} : \mathbf{V}_{\bar{\lambda}+\bar{\nu}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu+\mu-\alpha_i}[[\varpi]] \longrightarrow \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu}[[\varpi]]$$

を, 写像の列

$$\mathbf{V}_{\bar{\lambda}+\bar{\nu}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu+\mu-\alpha_i}[[\varpi]] \xrightarrow{[\nu(h_i)]_q^{-1} T_{\bar{\lambda},\bar{\nu}} \otimes \tau_{i;\nu,\mu}} \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\bar{\nu}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\nu}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu}[[\varpi]] \xrightarrow{1 \otimes S_\nu \otimes 1} \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\mu}[[\varpi]]$$

の合成で定義する。

定義 2.6.4 (準同型 E_i, F_i) [25.11] M を $\mathcal{D}$ の対象, $\beta \in P$ とする。$M^{(\lambda)}_\beta = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\beta}[[\varpi]], M)$ の元 f に対して写像の列

$$\mathbf{V}_{\bar{\lambda}+\bar{\nu}-\bar{\alpha}_i}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{(\lambda+\nu-\alpha_i)+(\beta+\alpha_i)}[[\varpi]] \xrightarrow{\Phi^{(\nu)}_{i;\lambda,\lambda+\beta}} \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}[[\varpi]] \otimes \mathbf{V}_{\lambda+\beta}[[\varpi]] \xrightarrow{f} M$$

の合成を対応させ, 帰納極限をとることにより, 準同型

$$E_i : \mathbf{X}(M)^\beta \longrightarrow \mathbf{X}(M)^{\beta+\alpha_i}$$

を定義する。同様に, Ψ を用いて準同型

$$F_i : \mathbf{X}(M)^\beta \longrightarrow \mathbf{X}(M)^{\beta-\alpha_i}$$

を定義する。

2.7 量子展開環の有限次元表現の圏 $\mathcal{E}$ との圏同値

前節で定めた E_i, F_i がいわゆる Drinfeld の量子展開環 $U_\varpi(\mathfrak{g})$ の関係式を満足する訳なのだが, それを見る前に量子展開環の有限次元表現のなす圏を定式化しておく。

Cartan 行列の対称化 $D = \mathrm{Diag}(d_i)$ (2.3 節) を再び用いて,

$$q_i = q^{d_i} = \exp(\pi\sqrt{-1}d_i\varpi)$$

とおく。

定義 2.7.1 (圏 $\mathcal{E}$) [24.1] 自由 $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群による直和分解 $V = \bigoplus_{\beta\in P} V^\beta$ が与えられた有限階数の $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群 V であって, $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群準同型 $E_i, F_i : V \to V$, $(i = 1, \cdots, r)$, が与えられ, 条件

(1) $$E_i(V^\beta) \subset V^{\beta+\alpha_i},\ F_i(V^\beta) \subset V^{\beta-\alpha_i}$$

(2) $$(E_iF_i - F_iE_i)(x) = \delta_{i,j}[\beta(h_i)]_{q_i}x, \quad (x \in V^\beta)$$

(3) $i \neq j$ のとき,

(3-1) $$\sum_{m+n=1-a_{i,j}} (-1)^n \frac{1}{[m]_{q_i}![n]_{q_i}!} E_i{}^m E_j E_i{}^n = 0,$$

(3-2) $$\sum_{m+n=1-a_{i,j}} (-1)^n \frac{1}{[m]_{q_i}![n]_{q_i}!} F_i{}^m F_j F_i{}^n = 0,$$

を満たすものを対象とし, $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群準同型 $V \to V'$ であって, 直和分解と $E_i, F_i, (i,j = 1,\cdots,r)$, の作用と可換なものを射とする圏を $\mathcal{E}$ とする。

定義 2.7.2 ($\mathcal{E}$ のモノイド圏構造) [24.3] $\mathcal{E}$ の任意の対象 V_1, V_2 に対して, $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ を考え, 直和分解を $(V_1 \otimes V_2)^\beta = \bigoplus_{\beta_1+\beta_2=\beta} (V_1{}^{\beta_1} \otimes V_2{}^{\beta_2})$ で, 準同型 E_i, F_i を $V_1{}^{\beta_1} \otimes V_2{}^{\beta_2}$ 上で

$$E_i(x_1 \otimes x_2) = E_i(x_1) \otimes x_2 + q_i^{\beta_1(h_i)} x_1 \otimes E_i(x_2)$$
$$F_i(x_1 \otimes x_2) = q_i^{-\beta_2(h_i)} F_i(x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes F_i(x_2)$$

と与えると, $V_1 \otimes V_2$ は $\mathcal{E}$ の対象とみなされる。すると, 通常の $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群準同型

$$\begin{array}{ccc} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \longrightarrow & V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \\ (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 & \longmapsto & x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) \end{array}$$

によって結合拘束が定義される。最後に, $I = \mathbb{C}[[\varpi]]$ とし E_i, F_i を 0 で作用させると, これは単位対象となり, $\mathcal{E}$ にモノイド圏の構造が定義された。

命題 2.7.3 (普遍 R-行列の Lusztig による特徴づけ) [24.5] 次の性質を満たす $\mathcal{E}$ の同型射 $D_{V_1,V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ の族 $\{D_{V_1,V_2}\}$ であって, 次の条件を満たすものは一意的である。

(1) D_{V_1,V_2} は V_1 と V_2 について関手的である。

(2) $x \in V_1{}^{\beta_1}$ がすべての F_i で消され, $y \in V_2{}^{\beta_2}$ がすべての E_i で消されるならば,

$$D_{V_1,V_2}(x \otimes y) = q^{(\beta_1|\beta_2)} y \otimes x$$

である。

Дринфельд の普遍 R 行列の構成により, このような族 $\{D_{V_1,V_2}\}$ は存在し, $c_{V_1,V_2} = D_{V_1 \otimes V_2}$ とおけば, $\{c_{V_1,V_2}\}$ はモノイド圏 $\mathcal{E}$ の交換拘束をなす。かくして, Дринфельд による次の命題を得る。

命題 2.7.4 ($\mathcal{E}$ のブレイド圏構造) [24.4] 自明な結合拘束と, 交換拘束 $\{c_{V_1,V_2}\}$ により, $\mathcal{E}$ はリヂッドなブレイド圏をなす。

以上の準備の下で, この章の主定理は次のように述べられる。

定理 2.7.5 (圏同値 $\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$) [25.23] 任意の $\mathcal{D}$ の対象 M に対して,

$$\mathbf{X}(M) = \bigoplus_{\beta \in P} \mathbf{X}(M)^{\beta}$$

とおき, $E_i, F_i : \mathbf{X}(M) \to \mathbf{X}(M)$ を前節のように定義すれば, $\mathbf{X}(M)$ は圏 $\mathcal{E}$ の対象になり, 関手 $\mathbf{X}$ はブレイド圏の同値

$$\mathbf{X} : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

を与える。

関係式 $(E_iF_i - F_iE_i)(x) = \delta_{i,j}[\beta(h_i)]_{q_i}x$ の証明には, $\mathfrak{Gau\ss}$ の超幾何関数の接続公式を用いる[45]。

§3 アフィン Lie 環の表現の圏 $\mathcal{O}_\kappa$

この章では, 単純 Lie 環に附随したアフィン Lie 環を導入し, その表現論を展開する。特に, アフィン Lie 環のある種の表現からなる圏 $\mathcal{O}_\kappa$ を定義し, その性質を詳しく調べる。基本的な文献は [I] および [Kac][46] である。

3.1 $\mathbb{C}$ 上のアフィン Lie 環

$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数 $h^\vee$ とは, 最高ルート (highest root または maximal root) θ と Weyl ベクトル ρ を用いて $h^\vee = \dfrac{(\theta|\theta+2\rho)}{(\theta|\theta)}$ と定義される整数である。

さて, Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の内積を, 最高ルート θ に対して $(\theta|\theta) = 2$ と正規化する[47]。また, 対応して $\mathfrak{g}$ の内積も正規化する。このとき, $h^\vee$ は, $h^\vee = (\theta|\rho) + 1$ とかける。

このとき, ξ を不定元として, $\mathbb{C}$ 加群

$$\hat{\mathfrak{g}} = \Big(\mathbb{C}((\xi)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}\Big) \oplus \mathbb{C}K$$

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \Big(\mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}\Big) \oplus \mathbb{C}K$$

を考える。ただし, $\mathbb{C}K$ は K を基底とする 1 次元の $\mathbb{C}$-ベクトル空間を表す。また,

$$\mathbb{C}((\xi)) = \{ \sum_{n=-N}^{\infty} c_n \xi^n \mid N \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{C} \}$$

45. その計算の本質的部分は [22.8] に書かれている。
46. V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Third Ed., Cambridge, 1990
47. ADE では前章で行った正規化と一致する。

は, 形式的 Laurent 級数のなす体である。このとき, 括弧積を $f(\xi), g(\xi) \in \mathbb{C}((\xi))$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[f(\xi)\otimes X, g(\xi)\otimes Y] = f(\xi)g(\xi)\otimes[X,Y] + (X|Y)\operatorname*{Res}_{\xi=0} g df\cdot K, \quad [K,\hat{\mathfrak{g}}]=0$$

と定義し, 双線型に拡張すると, $\hat{\mathfrak{g}}$ は Lie 環になり, $\tilde{\mathfrak{g}}$ はその部分 Lie 環になる。この $\tilde{\mathfrak{g}}$ は, $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形から作られた拡大 Dynkin 図形に対応する (non-twisted なアフィン型の) 一般 Cartan 行列 (GCM) に対応する Kac-Moody Lie 環と同型である[48]。

次に表現を考える。

定義 3.1.1 (表現のレベル) $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群のレベル (level) が k であるとは, 中心 K が複素数 k で作用することと定義する。以下, $\kappa = k + h^\vee$ とする。

さて, $\tilde{\mathfrak{g}}$ の展開環の部分ベクトル空間を次のように定める。

定義 3.1.2 ($Q_N, Q_N^\sharp$ の定義) [1.7] 次のように定義する。

$$\begin{aligned} Q_N &= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{(X_1\otimes\xi)\cdots(X_N\otimes\xi)\,|\,X_i\in\mathfrak{g}\} \\ Q_N^\sharp &= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{(X_1\otimes\xi^{-1})\cdots(X_N\otimes\xi^{-1})\,|\,X_i\in\mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

そこで, 任意の $\tilde{\mathfrak{g}}$ 加群 M に対して

$$M(\infty) = \bigcup_{N=0}^{\infty} M(N), \quad M(N) = \{v\in M\,|\,Q_N v = 0\}$$

とおく。また

$$M(-\infty) = \bigcup_{N=0}^{\infty} M(-N), \quad M(-N) = \{v\in M\,|\,Q_N^\sharp v = 0\}$$

と定める。

定義 3.1.3 (スムース $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群) [1.9] $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M に対して, $M(\infty)$ を M のスムース部分 (smooth part) という。また, $M = M(\infty)$ が成立するとき, M はスムース (smooth) であるという。

$\mathfrak{g}$ は単純だから $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ である。これを用いれば, 帰納法によって $X\otimes\xi^N$ が Q_N に属することが分かる。従って, 次が成立する。

命題 3.1.4 [1.11] $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M がスムースならば, M への $\tilde{\mathfrak{g}}$ の作用は, 自然に $\hat{\mathfrak{g}}$ の作用に延長される。

---

48. 従って Kac-Moody Lie 環の表現の一般論が使える訳だが, 以下ではそれを用いないで議論を展開する。

定義 3.1.5 (関手 $\sharp$) [1.5] $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 $\pi : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ に対して, $\mathbb{C}$-ベクトル空間 M に $\tilde{\mathfrak{g}}$ の作用を

$$(X \otimes \xi^n)v = \pi(X \otimes (-\xi)^{-n})(v), \quad Kv = -\pi(K)(v)$$

と定義し直して得られる $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群を $M^\sharp$ とおく。

また, $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M に対して, $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$ に $\tilde{\mathfrak{g}}$ の作用を

$$((X \otimes \xi^n)\varphi)(v) = -\varphi(\pi(X \otimes (-\xi)^{-n})v), \quad (K\varphi)(v) = \varphi(Kv)$$

と定義して得られる $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群を考える。すなわち, M の反傾表現に $\sharp$ を施したものであるが, これは, M がスムースであっても, スムースにならない。そこで次のように定義する。

定義 3.1.6 (関手 D) [1.16] 任意の $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M に対して, M の反傾表現に $\sharp$ を施したもののスムース部分からなる $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群を $D(M)$ と定める。

これにより, D は, スムース $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群の圏からそれ自身への共変関手になる。また, M がレベル k の表現であれば, $D(M)$ もそうである。

3.2 菅原構成法

k は双対 Coxeter 数 $h^\vee$ に対して $k \neq -h^\vee$, すなわち $\kappa \neq 0$ をみたす複素数とし, M をレベル k のスムース $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群とする。 このとき, 各整数 n に対して, $\mathbb{C}$-ベクトル空間の準同型写像 $M \xrightarrow{L_n} M$ を

$$L_n(v) = \frac{1}{2\kappa}\Big\{ \sum_{j \geq -n/2} \sum_a (J_a \otimes \xi^{-j})(J^a \otimes \xi^{j+n})v + \sum_{j < -n/2} \sum_a (J^a \otimes \xi^{j+n})(J_a \otimes \xi^{-j})v \Big\}$$

と定める[49]。ただし, $\{J_a\}$ と $\{J^a\}$ は $\mathfrak{g}$ の正規化された内積に関する双対基底である。M がスムースであることから, 和は各 v を固定すると有限和になる。また, L_n は基底 $\{J_a\}$, $\{J^a\}$ のとり方に依らずに定まる。このとき, L_n は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ の元として次の関係式を満足する。

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\,\delta_{m+n,0}\, c$$

ただし, $c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee}$ である。すなわち, $\{L_n\}$ は M 上に中心電荷 c の Virasoro 代数の表現をなす。一方,

$$[L_m, X \otimes \xi^n] = -nX \otimes \xi^{m+n}$$

が成立する。特に $m = 0$ とすれば $[L_0, X \otimes \xi^n] = -nX \otimes \xi^n$ であるから, M における L_0 の固有ベクトルに $X \otimes \xi^n$ を作用させることは, L_0 の固有値を $-n$ だけずらす効果がある。そこで,

---

49. $k = -h^\vee$ (critical level) の場合は, 菅原構成法は分母が 0 になってうまくいかないが, 一方でこのことは展開環 (のある種の完備化) の中心がこの場合に大きくなることの原因であって, 重要な意味を持つ。これについては 林孝宏, Malikov, Goodman-Wallach, Feigin-Frenkel らの研究がある。

定義 3.2.1 (L_0-固有空間) [2.6] スムースな $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M と複素数 d に対して

$$M_d = \{v \in M \mid L_0(v) = dv\}$$

と定める。

3.3 Weyl 加群と既約 $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群

複素数 k を固定し $\kappa = k + h^\vee$ とする。有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ をとり, 最高ウェイト λ の有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathbf{V}_\lambda$ を考える。$\mathbb{C}[\xi]\xi \otimes \mathfrak{g}$ を 0 で, K を k で作用させることにより, $\mathbf{V}_\lambda$ を $\tilde{\mathfrak{g}}_+ = (\mathbb{C}[\xi] \otimes \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}K$ の表現とみなす。

定義 3.3.1 (Weyl 加群) [2.4] $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト $\lambda \in P_\lambda$ に対して, $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群

$$\mathbf{M}_\lambda^\kappa = U(\tilde{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{g}}_+)} \mathbf{V}_\lambda$$

を[50], 最高ウェイト λ, レベル k の Weyl 加群 (Weyl module) という[51]。また, $D(\mathbf{M}_\lambda^\kappa)$ を co-Weyl 加群という。

命題 3.3.2 [2.7] 任意の $\lambda \in P_+$, $k \in \mathbb{C}$ に対して, Weyl 加群 $\mathbf{M}_\lambda^\kappa$ はスムースであって, L_0-固有空間分解

$$\mathbf{M}_\lambda^\kappa = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbf{M}_\lambda^\kappa)_{\Delta_\lambda + n}$$

が成立する。ただし, $\Delta_\lambda = \frac{(\lambda|\lambda+2\rho)}{2\kappa}$ である。

さて, $\tilde{\mathfrak{g}}$ の既約表現を Weyl 加群からスタンダードな方法で作ることができる。すなわち, 任意の $\lambda \in P_+$, $k \in \mathbb{C}$ に対して, Weyl 加群 $\mathbf{M}_\lambda^\kappa$ は一意的な極大真部分加群を持ち, 従って一意的な既約商加群を持つ。

定義 3.3.3 (既約 $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群) [2.8] こうして得られた既約商加群を $\mathbf{L}_\lambda^\kappa$ と表し, 最高ウェイト λ, レベル k の 既約最高ウェイト $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 (irreducible highest weight $\tilde{\mathfrak{g}}$-module) という[52]。

命題 3.3.4 [2.9] 写像の列 $\mathbf{V}_\lambda \hookrightarrow \mathbf{M}_\lambda^\kappa \twoheadrightarrow \mathbf{L}_\lambda^\kappa$ の合成は単射であり, 同型写像 $\mathbf{V}_\lambda \rightleftarrows (\mathbf{L}_\lambda^\kappa)(1)$ を得る。特に, $\mathbf{L}_\lambda^\kappa$ と $\mathbf{L}_\mu^\kappa$ が同型になるのは $\lambda = \mu$ になるときに限る。また, $D(\mathbf{L}_\lambda^\kappa) = \mathbf{L}_{\bar{\lambda}}^\kappa$ が成立する。ただし, $\bar{\lambda} = -w_0(\lambda)$ で, w_0 は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の最長元である。

---

50. 原論文では $\mathbf{V}_a^\kappa$, $(a \in \mathbf{N})$, と表している。
51. これは一般 Verma 加群 (generalized Verma module) の一種であるが, [TK] では単に Verma 加群と呼んでいる。Weyl 加群という名称は [I] によるが, これは Chevalley 群のモヂュラー表現における対応物からの類推で付けられた名称である。なお, 原論文では, generalized Weyl module という概念も定義している。技術的に必要な概念だが, この論説では省略する。
52. $\lambda \in P_+$ であって, レベル k が非負整数, かつ, 最高ルート θ に対して $(\theta|\lambda) \leq k$ ならば $\mathbf{L}_\lambda^\kappa$ は可積分 (integrable) $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群となるが, ここで考えたいのはそのような場合ではない。

3.4 既約性の判定法

Weyl 加群 $\mathbf{M}_\lambda^\kappa$ がいつ既約になるか, つまり, いつ $\mathbf{M}_\lambda^\kappa = \mathbf{L}_\lambda^\kappa$ になるかを調べる。実際, L_0-固有空間分解の様子と, 有限次元 $\mathfrak{g}$-加群の完全可約性 (定理 2.1.2) を用いることによって次の命題を得る。

命題 3.4.1 (既約性の判定法 I) [2.12] 次の (1) (2) のいずれかが成立すれば $\mathbf{M}_\lambda^\kappa$ は既約である。

(1) κ は有理数でない。

(2) κ は負の有理数で, かつ $(\lambda|\lambda+2\rho) < -2\kappa$ である。

特に, κ が負の有理数のとき $\mathfrak{g}$ の自明表現 $\mathbf{V}_0$ に対応する Weyl 加群 $\mathbf{M}_0^\kappa$ は既約である。

さて, κ は負の有理数とし, $\kappa = -\frac{p}{p'}$, (p, p' は互いに素な正整数) とする。とおく。すると, もう少し詳しく, 次が成立する。

命題 3.4.2 (既約性の判定法 II) [27.4] λ が, ある $\mu \in P_+$ を用いて

$$\lambda = p\mu + (p-1)\rho$$

表されるならば, $\mathbf{M}_\lambda^\kappa$ は既約である。ただし, ρ は $\mathfrak{g}$ の Weyl ベクトル, つまり $\mathfrak{g}$ の正ルートの和の半分である。

証明にはいわゆる行列式公式 (determinant formula) を用いる[53]。この条件をみたす支配的整ウェイトの集合を P_+^κ と表すことにする[54] :

$$P_+^\kappa = \begin{cases} P_+ & (\kappa \text{ が有理数でないとき}) \\ \{p\mu + (p-1)\rho \,|\, \mu \in P_+\} & (\kappa = -\frac{p}{p'} \text{ と書けるとき}) \end{cases}$$

この集合は後に重要な役割を担うことになる。

3.5 圏 $\mathcal{O}_\kappa$

κ は正の有理数ではないものとする。いよいよ, 我々の考察の中心となる圏 $\mathcal{O}_\kappa$ を定義する。

定義 3.5.1 (圏 $\mathcal{O}_\kappa$) [2.15] 長さ有限で, 各組成因子がある $\lambda \in P_+$ に対する $\mathbf{L}_\lambda^\kappa$ と同型になるような組成列を持つ, レベル $k(=\kappa - h^\vee)$ の $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M のなす圏を $\mathcal{O}_\kappa$ と表す。ただし, 射の集合は $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群としての射全体とする。

53. V. Kac and D. Kazhdan, Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras, Adv. Math. 34 (1979)
54. 原論文 [IV] では $\mathbf{N}_0$ と書いている。

明らかに, $\mathcal{O}_\kappa$ は $\mathbb{C}$ 上の Abel 圏の構造を持つ。また, $\mathcal{O}_\kappa$ の対象に関手 D を施した場合の振る舞いは, 次のようになる。

命題 3.5.2 [2.25] 関手 D は $\mathcal{O}_\kappa$ から $\mathcal{O}_\kappa$ への完全関手である。

さて, 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ の対象は, 次のように特徴付けることができる。

定理 3.5.3 [3.2] レベル k の $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 M について, 次の条件は同値である。

(1) M は圏 $\mathcal{O}_\kappa$ の対象である。

(2) M はスムースであって, $M(1)$ は有限次元である。

(1) $\Rightarrow$ (2) は比較的容易である。逆の証明には, 次節の BGG 相互律を用いて, 加群の長さを評価する。

注意 3.5.4 明らかに $\mathbf{L}^\kappa_\lambda$ 及び $\mathbf{M}^\kappa_\lambda$ は $\mathcal{O}_\kappa$ の対象である。しかし, $\tilde{\mathfrak{g}}$ を Kac-Moody Lie 環とみたときの Verma 加群は $\mathcal{O}_\kappa$ の対象ではない。実際, Verma 加群 M はスムースであるが, $M(1)$ が無限次元である。また, κ は正の有理数ではないとしているので, $\mathcal{O}_\kappa$ の対象は, Kac-Moody Lie 環の表現として決して可積分にはならない。

$\mathcal{O}_\kappa$ の単純対象の同型類全体は, 単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現の圏と同様に, $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト P_+ でパラメトライズされている。$\mathcal{O}_\kappa$ の圏論的構造は κ に依存するが, κ が有理数であれば半単純でない, つまり $\mathcal{O}_\kappa$ に属する表現が完全可約でない, 言い換えれば単純対象の自明でない拡大が有り得る[55]。

3.6 $\mathcal{O}_\kappa$ の射影的対象

前節で述べた BGG 相互律 (Bernstein-Gelfand-Gelfand reciprocity)[56] は, 我々の場合に即して述べると次のようになる。

定理 3.6.1 [3.9] 各 $\lambda \in P_+$ に対して, ある $\mathcal{O}_\kappa$ の射影的対象 $\mathbf{P}^\kappa_\lambda$ であって, 以下の条件をみたすものが存在する。

(1) $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\kappa}(\mathbf{P}^\kappa_\lambda, \mathbf{L}^\kappa_\mu) = \delta_{\lambda,\mu}$

(2) $\mathbf{P}^\kappa_\lambda$ は有限フィルター付けであって, 各部分商がある $(\mu|\mu+2\rho) \leq (\lambda|\lambda+2\rho)$ をみたす μ に対する $\mathbf{M}^\kappa_\mu$ に同型であるようなものを持つ。

(3) $[\mathbf{P}^\kappa_\lambda : \mathbf{M}^\kappa_\mu] = [\mathbf{M}^\kappa_\mu : \mathbf{L}^\kappa_\lambda]$

ただし, 左辺は $\mathbf{P}^\kappa_\lambda$ のフィルター付けの部分商として $\mathbf{M}^\kappa_\mu$ が現れる回数, 右辺は $\mathbf{M}^\kappa_\mu$ の組成列の組成因子として $\mathbf{L}^\kappa_\lambda$ が現れる回数を表す。

55. この辺りの事情は, まさに量子展開環で q が 1 の巾根の場合や, Chevalley 群のモヂュラー表現の場合とそっくりである。

56. Brauer reciprocity または Humphreys reciprocity とも呼ばれる。これらの方が古く, 由緒正しい名称であるが, 主観的理由によりこう呼ばせていただく。

証明では, Soergel によって与えられた, Abel 圏において BGG 相互律が成立するための圏論的な充分条件[57] を $\mathcal{O}_\kappa$ の場合に確かめる。実際には, 任意の $\lambda \in P_+$ に対して, $t = (\lambda|\lambda + 2\rho)$ とおき, $F^t = \{\mu \in P_+ \,|\, (\mu|\mu + 2\rho) \leq t\}$ なる有限集合を考え, 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ の対象であって, すべての組成因子が $\mathbf{L}_\mu^\kappa$, $(\mu \in F^t)$, の形をしているもののなす充満部分圏 $\mathcal{O}_\kappa^t$ に対して定理を証明する。

ところで次の命題は後に重要となる。

命題 3.6.2 [27.4] λ は P_+^κ に属する支配的整ウェイトとする。このとき, Weyl 加群 $\mathbf{M}_\lambda^\kappa$ は $\mathcal{O}_\kappa$ の対象として, 単純かつ射影的である。

3.7 Weyl フィルター付けを持つ加群

定義 3.7.1 (Weyl フィルター付け) [IV p.388] $\mathcal{O}_\kappa$ の対象の Weyl フィルター付けとは, 部分商が Weyl 加群となるような有限フィルター付けのことである。

技術的理由により, Weyl フィルター付けを持つ対象のなす部分圏を考えることが後に必要となる。すなわち

定義 3.7.2 (圏 $\mathcal{A}_\kappa$) [Lem 27.1 の Cor.1] 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ に属する Weyl フィルター付けを持つ加群を対象とする $\mathcal{O}_\kappa$ の充満部分圏を $\mathcal{A}_\kappa$ とする。

命題 3.4.1 により, 自明表現 $\mathbf{V}_0$ に対応する Weyl 加群 $\mathbf{M}_0^\kappa$ は既約であり, 従って $\mathbf{L}_0^\kappa$ は[58] $\mathcal{A}_\kappa$ に属することを注意しておく。

定義 3.7.3 (tilting module) [IV p.390] $\mathcal{O}_\kappa$ の対象 T が tilting module[59] であるとは, T および $D(T)$ がともに $\mathcal{A}_\kappa$ に属することである。

次の定理は, 後に $\mathcal{O}_\kappa$ がリヂッドであることの証明に用いられる。

定理 3.7.4 [Prop 27.2] 任意の支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ に対して, ある直既約な tilting module $\mathbf{T}_\lambda^\kappa$ が $\mathcal{O}_\kappa$ に存在して,

$$[\mathbf{T}_\lambda^\kappa] = [\mathbf{M}_\lambda^\kappa] + \sum_{\mu<\lambda} c_\mu [\mathbf{M}_\mu^\kappa], \quad (c_\mu \in \mathbb{Z})$$

が $\mathcal{O}_\kappa$ の Grothendieck 群で成立する。

57. W. Soergel, Construction of projectives and reciprocity in an abstract setting, preprint.
58. これが, 将来 $\mathcal{O}_\kappa$ にモノイド圏の構造を入れた場合に単位対象になるべきものである。
59. 元来は多元環の表現論の分野に現れた重要な概念である。

証明には Ringel の最近の結果[60] を使う。参考までに記せば, BGG 相互律で存在が示された射影的対象 $\mathbf{P}_\mu^\kappa$ をすべての $\mu \in F^t$, $(t = (\lambda|\lambda + 2\rho))$, に渡って直和したもの自己準同型環 $A = \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\kappa}(\bigoplus_{\mu \in F^t} \mathbf{P}_\mu^\kappa)$ を考えると, 有限生成 A-加群の圏は $\mathcal{O}_\kappa^t$ と圏同値であり, かつ A は quasi-hereditary になる。これに Ringel の結果をあてはめることにより, 条件を満たすような tilting 加群の存在が示されるのである。

§4 余不変式の空間と $\mathcal{O}_\kappa$ のテンソル積

$\mathbb{P}^1$ を複素 1 次元射影空間すなわち Riemann 球面とし, $\mathbb{P}^1$ とその N 個の点 $P_1, \cdots, P_N$ および P_i における座標 z_i の組 C をとる。ここでは, アフィン Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現 $M_1, \cdots, M_N$ に附随した余不変式の空間 $\langle M_1, \cdots, M_N \rangle_C$ を定義し, 次元 $\dim_{\mathbb{C}} \langle M_1, M_2, M_3 \rangle$ を "表現する" ようなテンソル積を $\mathcal{O}_\kappa$ に定義する。まずは C の点と座標を固定した場合に定義し, 次に点と座標を動かした場合の挙動を調べる。ここで, 余不変式の空間の双対がいわゆる共形ブロック (conformal block) の空間であり, $N = 3$ の場合のその次元がいわゆるフュージョン・ルール (fusion rule) に他ならない。基本的な文献は, 原論文 [I][II] および [TUY][61] である。[TUY] は最高ウェイト可積分表現の場合を扱っており, 従ってレベル k は非負整数である。一方 [I][II] は $\kappa = k + h^\vee$ が正の有理数でない場合であるから, 両者は相容れないが, 共形ブロックの空間の考え方はまったく同様である[62]。

4.1 $\mathbb{P}^1$ 上の有理型関数とアフィン Lie 環

$\mathbb{P}^1$ を Riemann 球面とし, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみて, その座標を z とする。$\mathbb{P}^1$ 上の N 個の点 $P_1, \cdots, P_N$ をとり, さらに, P_i を原点とする局所座標 z_i であって, $z \mapsto z_i$ が $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ なる大域的な正則写像に延長されるようなものを固定する[63]。このようなものの組 $(\mathbb{P}^1; P_1, \cdots, P_N; z_1, \cdots, z_N)$ を C と表し, 点付き Riemann 球面ということにする。このとき,

$$\mathfrak{g}_C = \mathfrak{g} \otimes R_C, \quad R_C = \{\mathbb{P}^1 \text{ 上の有理型関数で}, P_1, \cdots, P_N \text{ のみに極を持つもの }\}$$

と定める。するとこれは,

$$[X \otimes f(z), Y \otimes g(z)] = [X, Y] \otimes f(z)g(z)$$

60. C.M. Ringel, The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, Math. Z. **6** (1993).
61. A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries, Adv. Stud. in Pure Math. **19** (1989)
62. [TUY] では, 一般の Riemann 面上で $\tilde{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト可積分表現に対する共形ブロックの空間を定義してその性質を調べている。表現が可積分でない場合には, 高種数では共形ブロックの空間の有限次元性が崩れるので, [I][II] の結果をそのまま高種数に一般化しようとしても無意味である。
63. 技術的な理由で z_i を大域的な座標にとっておく。なお 4.1 の内容については $\mathbb{P}^1$ を一般の Riemann 面に取り替えても成立する。

によって自然な Lie 環の構造を持つ。

さて $\mathfrak{g}$ のコピーを N 個用意し,

$$\hat{\mathfrak{g}}^{(N)} = \Bigl(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}((\xi_i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}\Bigr) \oplus \mathbb{C}K$$

と定義する。中心 K は一つだけであることに注意されたい。これは, $f_i(\xi_i), g_i(\xi_i) \in \mathbb{C}((\xi))$, $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\Bigl[\sum_i f_i(\xi_i) \otimes X_i, \sum_i g_i(\xi_i) \otimes Y_i\Bigr] = \sum_{i=1}^{N} f_i(\xi_i) g_i(\xi_i) \otimes [X_i, Y_i] + \Bigl(\sum_{i=1}^{N} (X_i|Y_i) \operatorname*{Res}_{\xi_i=0} g_i df_i\Bigr) \cdot K$$

と定義し, 双線型に拡張することにより Lie 環になる。

さて $\mathbb{P}^1$ 上の有理型関数 $f(z)$ を P_i の周りの座標 z_i で Laurent 展開したものを考え, z_i を ξ_i とおいて形式的 Laurent 級数とみなしたものを $f^{(i)}(\xi_i)$ とおくことにする。このとき

命題 4.1.1 [4.6] 写像

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_C & \hookrightarrow & \hat{\mathfrak{g}}^{(N)} \\ X \otimes f(z) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{N} X \otimes f^{(i)}(\xi_i) \end{array}$$

によって, $\mathfrak{g}_C$ は $\hat{\mathfrak{g}}^{(N)}$ の部分 Lie 環になる。特に, $\mathfrak{g}_C$ は中心 K を含んでいない。

4.2 $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群に附随した $\mathbb{P}^1$ 上の余不変式の空間

前節の状況に加え, $M_1, \cdots, M_N$ をスムース $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群とする。これは $\hat{\mathfrak{g}}$-加群に延長される。そこで, 通常のベクトル空間のテンソル積 $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_N$ を考える。これは自然に $\hat{\mathfrak{g}}^{(N)}$-加群とみなせ, さらに命題 4.1.1 の準同型 $\mathfrak{g}_C \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}}^{(N)}$ によって $\mathfrak{g}_C$-加群ともみなせる。

定義 4.2.1 (余不変式の空間) スムース $\tilde{\mathfrak{g}}$-加群 $M_1, \cdots, M_N$ に対して,

$$\langle M_1, \cdots, M_N \rangle_C = M / \mathfrak{g}_C M$$

と定め, C および $M_1, \cdots, M_N$ に附随した余不変式の空間 (space of coinvariants) という。

定理 4.2.2 $M_1, \cdots, M_N$ を $\mathcal{O}_\kappa$ の対象とする。このとき, $\langle M_1, \cdots, M_N \rangle_C = M/\mathfrak{g}_C M$ は有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間である[64]。

64. 既に述べたが, ここでは κ が正の有理数でない場合を考えているので, $M_1, \cdots, M_N$ は可積分表現ではない。従って, この定理は種数 0 の特殊事情である。

ここで, $\langle M_1,\cdots,M_N\rangle_C$ は $\mathbb{P}^1$ 上の N 点 $\{P_i\}$ および座標 $\{z_i\}$ のとり方に依存している。後で, 点と座標を動かしたときに $\langle M_1,\cdots,M_N\rangle_C$ がどう変化するかを調べることになる。

特に, 2 点の場合は, $\langle M_1, D(M_2)\rangle_C = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\kappa}(M_1, M_2)$ となる。また 3 点の場合, すなわち $\langle M_1, M_2, M_3\rangle$ の場合は頂点作用素 (Vertex Operator) の空間ともいうが, その次元をフュージョン・ルール (fusion rule) という。

4.3 テンソル積の暫定的定義

以下では, フュージョン・ルールを表現するような, 正確には, 集合の圏 $\mathcal{S}ets$ への関手

$$\mathcal{O}_\kappa \longrightarrow \mathcal{S}ets$$

$$M \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\langle M_1, M_2, D(M)\rangle_C, \mathbb{C})$$

を表現するような $\mathcal{O}_\kappa$ の対象 $M_1 \dot{\otimes} M_2$ を定義したい。より一般に, 与えられた $\mathcal{O}_\kappa$ の対象 $M_1,\cdots,M_N$ に対して, 自然な同型

$$\langle M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N, M\rangle \xrightarrow{\sim} \langle M_1,\cdots,M_N, M\rangle$$

が任意の $\mathcal{O}_\kappa$ の対象 M に対して成立するような対象 $M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N$ を定義したい。

点付き Riemann 球面 $(\mathbb{P}^1; P_0,\cdots,P_N; z_0,\cdots,z_N)$ を C とする。このとき, R_C を前と同様に

$$R_C = \{\mathbb{P}^1 \text{ 上の有理型関数で, } P_0,\cdots,P_N \text{ のみに極を持つもの }\}$$

とする。次に, $\mathfrak{g}_C$ の代わりに,

$$\Gamma = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R_C) \oplus \mathbb{C}K$$

とおき, 括弧積を (P_0 を特別視して)

$$[X \otimes f(z), Y \otimes g(z)] = [X,Y] \otimes f(z)g(z) + (X|Y) \operatorname*{Res}_{\xi=0} g^{(0)}(\xi) df^{(0)}(\xi) \cdot K$$

とし, 線型に拡張する。ただし $f^{(0)}(z)$ は, 有理型関数 $f(z)$ を P_0 において座標 z_0 で Laurent 展開したものである。

補題 4.3.1 このとき, 2 つの写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \Gamma & \longrightarrow & \left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}((\xi_i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}\right) \oplus \mathbb{C}K \quad (= \hat{\mathfrak{g}}^{(N)}) \\ & X \otimes f(z) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{N} X \otimes f^{(i)}(\xi_i) \\ & K & \longmapsto & -K \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \psi: & \Gamma & \longrightarrow & (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((\xi))) \oplus \mathbb{C}K \quad (= \hat{\mathfrak{g}}) \\ & X \otimes f(z) & \longmapsto & X \otimes f^{(0)}(\xi_0) \\ & K & \longmapsto & K \end{array}$$

はともに Lie 環の準同型である。

という訳で, Lie 環の準同型の列ができた：

$$\hat{\mathfrak{g}}^{(N)} \xleftarrow{\varphi} \Gamma \xrightarrow{\psi} \hat{\mathfrak{g}}$$

これを用いてテンソル積を定義する。$\mathcal{O}_\kappa$ の対象 $M_1, \cdots, M_N$ を固定する。$W = M_1 \otimes \cdots \otimes M_N$ とおくと, これは自然に $\hat{\mathfrak{g}}^{(N)}$-加群になる。これを φ によって自然に Γ-加群とみなす。そこで ψ による引き戻しが W になるような $\hat{\mathfrak{g}}$-加群を自然に定義したいところだが, それはできない。しかし, W のうまい完備化 $\hat{W}$ をとれば, その上の $\hat{\mathfrak{g}}$-加群構造であって, ψ による引き戻しが $\hat{W}$ の自然な Γ-加群構造になるようなものは作ることができる：

$$\begin{array}{lccccc} \text{Lie 環} & \hat{\mathfrak{g}}^{(N)} & \xleftarrow{\varphi} & \Gamma & \xrightarrow{\psi} & \hat{\mathfrak{g}} \\ \text{表現} & W & \xmapsto{\varphi^*} & W & & \\ & & & \hat{W} & \xleftarrow{\psi^*} & \hat{W} \end{array}$$

すなわち, Lie 環 Γ の展開環 $U(\Gamma)$ の部分環

$$G_n = \{(X_1 \otimes f_1) \cdots (X_n \otimes f_n) \mid f_1, \cdots, f_n \in R_1\}$$

$$\text{ただし}\, R_n = \{f \in R_C \mid f^{(0)}(z) \in z^n[[z]]\}$$

を考え,

$$\hat{W} = \varprojlim_n W/G_nW$$

と定義すると, これは自然に Γ-加群になる。一方, $\hat{W}$ の元を W で, $\hat{\mathfrak{g}}$ の元を Γ で近似することができ, Γ の W への作用の極限として $\hat{\mathfrak{g}}$ の $\hat{W}$ への作用を定義することができる。かくして

命題 4.3.2 [4.10,4.11] $\hat{W}$ 上の $\hat{\mathfrak{g}}$-加群の構造であって, 写像 $\Gamma \xrightarrow{\psi} \hat{\mathfrak{g}}$ によって Γ-加群とみると, それが $\hat{W}$ のもとの Γ-加群構造と一致するようなものが一意的に存在する。

さて, そこで

定義 4.3.3 (テンソル積の暫定的定義) [4.11] $\hat{W}$ の $\hat{\mathfrak{g}}$-加群構造を $\tilde{\mathfrak{g}}$ に制限したものに $\sharp$ を施し, スムース部分をとったものを $M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N$ と定義する。

原論文では, $\hat{W}$ の $\hat{\mathfrak{g}}$-加群構造を $\tilde{\mathfrak{g}}$ に制限したものを同じ記号 $\hat{W}$ で表し, $T(W) = \hat{W}(-\infty)$ とおいている。従って, $T(W)^\sharp = M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N$ である。

定理 4.3.4 [7.10] $M_1, \cdots, M_N$ が $\mathcal{O}_\kappa$ の対象ならば, $M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N$ もそうである。また, 任意の $\mathcal{O}_\kappa$ の対象 M に対して,

$$T(W) \otimes M/\tilde{\mathfrak{g}}(T(W) \otimes M) \xrightarrow{\sim} W \otimes M/\Gamma(W \otimes M)$$

なる有限次元ベクトル空間の自然な同型が存在する。

なお, 定理の同型を書き直すと

$$\langle M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N, M\rangle \xrightarrow{\sim} \langle M_1, \cdots, M_N, M\rangle$$

となる。双対をとって, 特に $N=2$ とし, M を $D(M)$ で置き換えれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\kappa}(M_1 \dot{\otimes} M_2, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\langle M_1, M_2, D(M)\rangle, \mathbb{C})$$

となり, テンソル積 $\dot{\otimes}$ がフュージョン・ルールを表現していることが分かる ([13.4]) 。

注意 4.3.5 テンソル積 $\dot{\otimes}$ の定義は点付き Riemann 球面 C のとり方に依存するので, 本論説では暫定的定義と呼ぶことにする[65]。

4.4 点付き Riemann 球面のファミリーと余不変式の空間

さて, テンソル積の座標依存性を調べるために, 点付き Riemann 球面のファミリーに対して余不変式の空間の振る舞いを調べる。

射影変換群 $PGL_2(\mathbb{C})$ を考える。その元を $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} : z \longmapsto \frac{rz+s}{tz+u}$$

と作用させる。次の空間を考える。

$$B_0 = \{(\gamma_0, \cdots, \gamma_N) \in PGL_2(\mathbb{C})^{N+1} \mid \gamma_i(0) \text{ は互いに異なる}\}$$
$$F_0 = \{(\gamma_0, \cdots, \gamma_N, z) \in PGL_2(\mathbb{C})^{N+1} \times \mathbb{P}^1 \mid \gamma_i(0) \text{ および } z \text{ は互いに異なる}\}$$

自然な射影 $F_0 \twoheadrightarrow B_0$ がある。これらの空間には $PGL_2(\mathbb{C})$ が対角的に作用するので, その作用での商空間をそれぞれ B, F とする。これらは自然にアフィン代数多様体の構造を持つので, 座標環をそれぞれ $\mathbb{C}[B]$, $\mathbb{C}[F]$ とおく[66]。作り方から, 代数多様体の全射 $F \twoheadrightarrow B$ は, ファイバーが点付き Riemann 球面 $(\mathbb{P}^1; \gamma_1(0), \cdots, \gamma_N(0); \gamma_1^{-1}(z), \cdots, \gamma_N^{-1}(z))$ であるようなファミリーである。対応する環準同型 $\mathbb{C}[B] \to \mathbb{C}[F]$ によって, $\mathbb{C}[F]$ は環 $\mathbb{C}[B]$ 上の代数とみなされる。

そこで, Lie 環 $\mathfrak{g}_C$ のファミリー版を

$$\mathfrak{g}_F = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[F]$$

と定義し, 括弧積は

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg$$

とする。従って, $\mathfrak{g}_F$ は $\mathbb{C}[B] \to \mathbb{C}[F]$ によって環 $\mathbb{C}[B]$ 上の Lie 環とみなされる。このとき, 命題 4.2.1 のファミリー版が成立する。

65. 原論文では, テンソル積を構成する方法をこれ以外に 2 通り説明しているが, ここでは省略する。
66. 原論文では B を $\mathcal{V}$ と, F を $\mathcal{V}'$ と表し, $\mathbb{C}[B]$ を A と, $\mathbb{C}[F]$ を A' と表している。

命題 4.4.1 [9.9] 写像

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}_F & \hookrightarrow & \left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[B]((\xi_i))\right) \oplus \mathbb{C}[B]K \\ X \otimes f & \longmapsto & \sum_{i=1}^{N} X \otimes f^{(i)}(\xi_i) \end{array}$$

は $\mathbb{C}[B]$ 上の Lie 環の準同型である。ただし, $f^{(i)}(\xi_i)$ は, 関数 $f \in \mathbb{C}[F]$ をファイバーごとに $\gamma_i^{-1}(z)$ で Laurent 展開したものである[67]。

さて, 任意の $\mathcal{O}_\kappa$ の対象 $M_1, \cdots, M_N$ に対して $\mathcal{M}_i = M_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[B]$, $\mathcal{W} = \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{C}[B]} \cdots \otimes_{\mathbb{C}[B]} \mathcal{M}_N$ とおき, 余不変式の空間のファミリー版を

$$\langle M_1, \cdots, M_N \rangle_F = \mathcal{W}/\mathfrak{g}_F \mathcal{W}$$

と定義する。これは自然に $\mathbb{C}[B]$-加群の構造を持つ。

定理 4.4.2 [12.12] $\langle M_1, \cdots, M_N \rangle_F$ は階数有限な射影的 $\mathbb{C}[B]$-加群である。

証明には $\langle M_1, \cdots, M_N \rangle_F$ が Virasoro 代数の作用により自然な可積分接続[68] を持つことを利用する[69]。

言い換えれば, 対応する B 上の擬連接層が局所自由になり, よってベクトル束を定めることになる。このベクトル束を $\mathcal{V}$ とおく。

4.5 巡回的順序による自明化とテンソル積

集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ にスタンダードな巡回的順序 (cyclic order) $1 < 2 < \cdots < N < 1$ を与える。いま, 実 1 次元射影空間 $\mathbb{RP}^1(\approx S^1)$ を Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ に自然に埋め込み, 子午線と呼ぶことにする。子午線上で正の向きに $\gamma_1(0), \cdots, \gamma_N(0)$ がこの順序で並んでいるものからなる B の部分集合を $B_{\mathbb{R}}$ とする。$B_{\mathbb{R}}$ に (Zariski 位相でなく) 通常の Haussdorff 位相を与えるとき,

補題 4.5.1 [13.2] $B_{\mathbb{R}}$ は可縮な実解析的多様体である。

既に述べたように, ベクトル束 $\mathcal{V}$ には, Virasoro 代数の作用から誘導される自然な接続が入る。従って, 補題から, ベクトル束 $\mathcal{V}$ は $B_{\mathbb{R}}$ 上で, 自然な接続に関する実解析的な水平切断の空間によって自明化される。その結果得られたベクトル空間を $\langle M_1, \cdots, M_N \rangle$ とおく。定義から明らかに

$$\langle M_1, \cdots, M_N \rangle = \langle M_2, \cdots, M_N, M_1 \rangle$$

67. 実際, これが $\mathbb{C}[B]((\xi_i))$ に属する。
68. これがまさに Knizhnik-Zamolodchikov 方程式である。
69. この辺りの事情は [TUY] と同様である。

である。つまり, もはや $M_1,\cdots,M_N$ を並べる巡回的順序にしか依存しない。従って, C と C' が $B_{\mathbb{R}}$ のファイバーになっていれば,

$$\langle M_1,\cdots,M_N\rangle_C \xrightarrow{\sim} \langle M_1,\cdots,M_N\rangle \xleftarrow{\sim} \langle M_1,\cdots,M_N\rangle_{C'}$$

の合成によって標準的な同型が作られる。従って, 余不変式の空間は $M_1,\cdots,M_N$ を並べる巡回的順序を決めれば標準的な同型を除いて一意的に定まり,

$$\langle M_1 \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} M_N, M\rangle_C \xrightarrow{\sim} \langle M_1,\cdots,M_N,M\rangle_C$$

によって我々のテンソル積もそうであることが分かる。すなわち, ここに至って, 暫定的という言葉をはずすことができた。

こうして定義されたテンソル積によって $\mathcal{O}_\kappa$ がブレイド圏の構造を持つことを 6.1 節で述べる。

§5 Generic から special へ

この章では, 次の状況を作り上げる

$$\begin{array}{ccccc} & & & \mathcal{O} & \\ & & {}^{\text{完備化}}\swarrow & & \searrow^{\text{特殊化}} \\ \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_F & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_\infty & & \mathcal{O}_\kappa \end{array}$$

ここで, 大雑把にいえば, $\mathcal{O}_\kappa$ は複素数 κ を固定したときのアフィン Lie 環の表現の圏, $\mathcal{O}$ は κ を不定元とみなした場合の圏, $\mathcal{O}_\infty$ は $\kappa\to\infty$ において局所的に考えた場合の圏である[70]。この図式を通じて, generic な場合に $\mathcal{D}$ で成立した定理を $\mathcal{O}_\kappa$ に移植したい訳である。

一般に, $\mathbb{C}$ 上の可換代数 A に対して A 上の Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}_A$ を

$$\hat{\mathfrak{g}}_A = (A((t))\otimes\mathfrak{g})\oplus AK$$

と定める。ただし K は不定元であり, 括弧積の定義はアフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の場合と同様である。

5.1 圏 $\mathcal{O}$ と関手 $\mathcal{O}\to\mathcal{O}_\kappa$ の定義

S を複素平面 $\mathbb{C}$ の非有界な領域とする。後には $S=\mathbb{C}-\mathbb{R}_{\geq -r}$, $(r>0)$, を考えるので, 始めからそのようなものを想定してよい。環 R を

$$R = \{\ S \text{ 上の正則関数であって}, \infty \text{ で有理型なもの }\}$$

70. 原論文 [IV] では, $\mathcal{O}_{\tilde{\kappa}}$ なる圏も導入しており, 重要であるが, ここでは省略する。

と定義する。すなわち, R の元は S で定義された正則関数であって, 無限遠点 ∞ のある近傍 U が存在して $S \cup (U - \{\infty\})$ に定義域が延長されるようなものである[71]。以下では, 複素変数を z とし, R の元 x を $x(z) = z$ なるものとする。各 $\kappa \in S$ に対して, 環準同型写像

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f(z) &\longmapsto f(\kappa) \end{aligned}$$

を考える。これは自然な同型 $R/(x-\kappa)R \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を誘導し, 従って同型 $\hat{\mathfrak{g}}_R/(x-\kappa)\hat{\mathfrak{g}}_R \xrightarrow{\sim} \hat{\mathfrak{g}}$ が得られる。そこで, 任意の $\hat{\mathfrak{g}}_R$-加群 M と $\kappa \in S$ に対して,

$$M(\kappa) = M \otimes_R R/(x-\kappa)R = M/(x-\kappa)M$$

と定義すれば, $M(\kappa)$ は自然に $\hat{\mathfrak{g}}$-加群になる。以上の準備の下で,

定義 5.1.1 (圏 $\mathcal{O}$) [IV p.400] $\hat{\mathfrak{g}}_R$-加群 V であって, 次の条件を満たすものを対象とする圏を $\mathcal{O}$ とする。

(1) R-加群として自由である。

(2) K はスカラー $x - h^\vee$ 倍で作用する。

(3) 任意の $\kappa \in S$ に対して $V(\kappa)$ は $\mathcal{O}_\kappa$ の対象である。

かくして, 圏 $\mathcal{O}$ が定義され, 任意の $\kappa \in S$ に対して関手

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O}_\kappa \\ V &\longmapsto V(\kappa) = V/(x-\kappa)V \end{aligned}$$

が構成された。

5.2 圏 $\mathcal{O}_\infty$ と関手 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_\infty$ の定義

R の元 $f(z)$ は $z = \infty$ で有理型であったから, $f(z)$ を $z = \infty$ で巾級数展開することによって, 埋め込み

$$R \hookrightarrow \mathbb{C}((x^{-1}))$$

が定義される。そこで, $R_\infty = \mathbb{C}((x^{-1}))$ を環 R の ∞ における完備化とみなす[72]。そこで, 写像 $\kappa_\infty : R \longrightarrow R_\infty$ を写像の列

$$\begin{array}{ccccc} R & \hookrightarrow & R_\infty & \xrightarrow{\sim} & R_\infty \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}x \end{array}$$

の合成で定義する。

---

71. [IV] では単に the ring of analytic functions on S meromorphic at ∞ と書かれているだけだが, このように解釈するのが妥当であろう。

72. R_∞ について原論文では混乱している。ある部分では, $R_\infty = \mathbb{C}[[x^{-1}]]$ とみなし, 別の部分では $R_\infty = \mathbb{C}((x^{-1}))$ とみなしている。しかし, 環 R の定義によれば関数 $x : z \to z$ が R に含まれなければならないので, $R_\infty = \mathbb{C}[[x^{-1}]]$ と見るのは不都合である。そこで本論説では $R_\infty = \mathbb{C}((x^{-1}))$ に統一して書き直してみたが, 全体の整合性を確かめた訳ではないので, 何らかの誤りが生じたかもしれない。

定義 5.2.1 (圏 $\mathcal{O}_\infty$) [IV p.401] ある $\mathcal{O}$ の対象 V が存在して κ_∞ によって R_∞ を R 上の代数とみなしたときに $V \otimes_R R_\infty$ と同型になるような $\hat{\mathfrak{g}}_{R_\infty}$-加群を対象とする $\hat{\mathfrak{g}}_{R_\infty}$-加群の圏の充満部分圏を $\mathcal{O}_\infty$ とする[73]。

かくして, 圏 $\mathcal{O}_\infty$ が定義され, 関手

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O}_\infty \\ V &\longmapsto V \otimes_R R_\infty \end{aligned}$$

が構成された。$R_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}((x^{-1}))$ なので $\mathcal{O}_\infty$ は $\mathcal{O}$ よりずっと構造が簡単である。実際, 圏 $\mathcal{O}_\infty$ は半単純であり, Abel 圏としての構造は $\mathfrak{g}$ の有限次元表現の圏を $\mathbb{C}((x^{-1}))$ に係数拡大したものに他ならない。さらに

命題 5.2.2 [Lem 33.4] 関手 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_\infty$ は忠実である。すなわち, 任意の $V, W \in \mathcal{O}$ に対して, 自然な写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\infty}(V \otimes R_\infty, W \otimes R_\infty)$$

は単射である。

5.3 関手 $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\infty$ の定義

$\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}[[\varpi]]$ 上の Abel 圏であり, 一方 $\mathcal{O}_\infty$ は $\mathbb{C}((x^{-1}))$ 上の Abel 圏である。そこで, 1.5 で行ったように, 圏 $\mathcal{D}$ を係数拡大して $\mathcal{D}_F$ と $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ を考える[74]。すると, $\mathcal{D}$ の対象は $\mathbb{C}[[\varpi]]$-加群としては有限階数自由であったので

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{D}_F \\ \mathbf{V} &\longmapsto \mathbf{V} \otimes_{\mathbb{C}[[\varpi]]} \mathbb{C}((\varpi)) \end{aligned}$$

なる関手は忠実である[75]。

さて, 写像

$$\begin{aligned} \mathbb{C}((\varpi)) \longrightarrow \mathbb{C}((x^{-1})) &\xrightarrow{\sim} R_\infty \\ \varpi \longmapsto -x^{-1} & \end{aligned}$$

によって, $\mathbb{C}((\varpi))$ を R_∞ と同一視する。次に, 任意の $V \in \mathcal{O}_\infty$ に対して

$$\mathcal{G}(V) = V/Q_1^\sharp V$$

と定義する[76]。これは, $\mathfrak{g}_{R_\infty} = \mathfrak{g}((\varpi))$ の有限次元表現になる。そこで対応する $\mathcal{D}_F$ の対象を考えることにより関手

$$\mathcal{G} : \mathcal{O}_\infty \longrightarrow \mathcal{D}_F$$

---

73. 前脚註により, この $\mathcal{O}_\infty$ の定義は [IV p.401] の定義と異なる。

74. 既に述べたように [IV] では $\mathbb{C}((x^{-1}))$ と $\mathbb{C}[[x^{-1}]]$ が混同されている。ということはつまり $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}_F$ が混同されているということである。

75. ここで, 例えば ϖ 倍するという射は $\mathcal{D}$ では同型ではなかったが, $\mathcal{D}_F$ では同型射になる。特に直既約な対象 $V_\lambda[[\varpi]]$ をこの関手で写して $\mathbf{V}_\lambda((\varpi))$ とすると, これは単純対象であって, $\mathcal{D}_F$ はこれらと同型な対象のみを単純対象とする半単純な圏となる。

76. $Q_1^\sharp$ の定義は 3.1.2 を見よ。

が定義される。

命題 5.3.1 [Cor 31.3] 関手 $\mathcal{G}$ は圏同値 $\mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_F$ を与える。

こうしてみると, $\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}[[\varpi]] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[x^{-1}]]$ 上の Abel 圏だから, κ を $\mathbb{P}^1$ 上の点とみたとき, $\kappa = \infty$ における完備な局所環上で議論していることになる。

5.4 Weyl フィルター付けを持つ加群のなす部分圏

さて, 既に圏 $\mathcal{O}_\kappa$ の Weyl フィルター付けを持つ加群のなす圏 $\mathcal{A}_\kappa$ を定義した。同様に, 圏 $\mathcal{O}$ についても Weyl フィルター付けを持つ加群からなる部分圏が考えられる。

定義 5.4.1 (圏 $\mathcal{A}$) 圏 $\mathcal{O}$ の対象 V であって, 任意の $\kappa \in S$ に対して $V(\kappa)$ が $\mathcal{A}_\kappa$ の対象となるものからなる充満部分圏を $\mathcal{A}$ とする。

補題 5.4.2 任意の $\mathcal{O}_\infty$ の対象に対して, 関手 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_\infty$ でその対象と同型な対象に移されるような $\mathcal{A}$ の対象が存在する。

補題 5.4.3 [Lem 29.8] $\mathcal{A}$ の任意の対象 V と $\mathcal{O}$ の任意の対象 W に対して,

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(V, W)$ は有限階数自由 R-加群である。

(2) 任意の $\kappa \in S$ に対して自然な写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(V, W)(\kappa) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\kappa}(V(\kappa), W(\kappa))$$

は単射である。

§6 $\mathcal{O}_\kappa$ のテンソル圏構造および $\mathcal{C}_q$ との圏同値

この章では $\mathfrak{g}$ は ADE 型である, すなわち Cartan 行列 $(a_{i,j})$ は対称であるとする[77]。

圏 $\mathcal{D}$ には §2 で行ったようにテンソル積が定義されていて, リヂッドなブレイド圏をなしていた。従って, その係数拡大である $\mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_F$ にもリヂッドなブレイド圏の構造が入る。一方, $\mathcal{O}_\kappa$ にも余不変式の空間を用いてテンソル積が定義されていた。この章では, $\mathcal{O}_\kappa$ に結合拘束と交換拘束を導入してブレイド圏の構造を与え, それがリヂッドになる条件を調べる。次に §2 の圏同値 $\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ を特殊化し, いわば κ に関する解析接続で関手 $\mathcal{O}_\kappa \to \mathcal{E}_q$ を, さらに圏同値 $\mathcal{O}_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_q$ を構成する。ここで, q は $q = e^{-\pi\sqrt{-1}/\kappa}$ なる複素数であり, $\mathcal{E}_q$ は量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現の圏, また, $\mathcal{C}_q$ は対応する Lusztig の意味の有限次元表現の圏である。この圏同値の構成を行うには $\mathcal{O}_\kappa$ がリヂッドでないと困るので, そのため κ に関する例外 (うまくいかない場合) が生ずる。

77. ADE 型でなくともほとんどの命題はそのままの形で成立するが, 原論文に従って ADE に話を限ることにする。なお, 実際に ADE 以外では成立しない命題 (命題 6.4.4) が出てくる。

6.1 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ のブレイド圏構造

圏 $\mathcal{A}$ は Weyl フィルター付けを持つ表現からなる $\mathcal{O}$ の充満部分圏であった。

定義 6.1.1 ($\mathcal{A}$, $\mathcal{O}_\infty$ のテンソル積) [IV p.401] 圏 $\mathcal{A}$, $\mathcal{O}_\infty$ に対しても $\mathcal{O}_\kappa$ とまったく同様に余不変式の空間を考えることができ, テンソル積 $\dot{\otimes}$ が定義される。

このとき, 圏同値 $\mathcal{G} : \mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_F$ がテンソル積を保つことは容易に確かめられる。従って, $\mathcal{O}_\infty$ は余不変式の空間を用いて定義したテンソル積に関してリヂッドなブレイド圏の構造を持つことになる。一方, 関手 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_\kappa$ については次がいえる。

定理 6.1.2 [Thm 29.1] $\mathcal{A}$ の任意の対象 V, W に対してテンソル積 $V \dot{\otimes} W$ はやはり $\mathcal{A}$ の対象であり, 任意の $\kappa \in S$ に対して $(V \dot{\otimes} W)(\kappa) \xrightarrow{\sim} V(\kappa) \dot{\otimes} W(\kappa)$ である。

さて, 結論をまとめて記すと,

定理 6.1.3 圏 $\mathcal{A}$, $\mathcal{O}_\kappa$, $(\kappa \in S)$, をブレイド圏にするような結合拘束と交換拘束であって, 関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{O}_\infty$ および $\mathcal{A} \to \mathcal{O}_\kappa$ をブレイド関手にするようなものが自然に定義できる。

証明の方針は以下のようなものである。まず, 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ および $\mathcal{A}$ の任意の対象に対する結合拘束と交換拘束を直接に定義する。点付き Riemann 球面 C が $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点であるような場合の余不変式の空間を考え, C が $\mathbb{P}^1$ 上に 2 点を考えた点付き Riemann 球面 2 個の 1 点和に退化する場合の接続の振る舞いを調べることにより結合拘束を構成する。実際には, 自然な線型写像 $\langle M_1 \dot{\otimes} M_2, M_3 \dot{\otimes} M_4 \rangle \xrightarrow{\sim} \langle M_1, M_2, M_3, M_4 \rangle$ を構成し, それを用いて $(M_1 \dot{\otimes} M_2) \dot{\otimes} M_3 \xrightarrow{\sim} M_1 \dot{\otimes} (M_2 \dot{\otimes} M_3)$ を構成するのである。一方, 交換拘束は Virasoro 代数の L_0 の作用を用いて定義する。構成から, 結合拘束および交換拘束は関手的である。(以上は [II 後半] の内容)。こうして定義されたものは, $\mathcal{A}_\kappa$ 上では κ について "解析的" であることから, $\mathcal{A}$ に持ち上がることが分かる。($\mathcal{O}_\kappa$ 上ではそうは言えない。) 次に, これを関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{O}_\infty$ で送ると, それが $\mathcal{O}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_F$ のブレイド圏構造と一致していることを確かめる。従って, 関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{O}_\infty$ が忠実であるから $\mathcal{A}$ において, 従って $\mathcal{A}_\kappa$ においてブレイド圏の公理が満たされることが分かる。最後に, $\mathcal{O}_\kappa$ の任意の対象は $\mathcal{A}_\kappa$ の対象の商であって, 結合拘束と交換拘束の関手性から, $\mathcal{O}_\kappa$ もブレイド圏の公理を満たすことが分かる。

6.2 リヂッド性

リヂッド性は κ の値によっては示されない場合がある[78]。まず, κ が有理数でない場合は簡単で,

定理 6.2.1 [Lem 31.5 の Cor 1] κ が有理数でなければ, ブレイド圏 $\mathcal{O}_\kappa$ はリヂッドである。

78. 本当に成立しない場合があるのかどうかは [IV] には書いていない

一方, κ が(負の)有理数の場合は以下のようになる。まず, 次の結果がある。

定理 6.2.2 [Thm 32.1] κ は負の有理数とする。このとき, ある支配的整ウェイト $\lambda_0 \in P_+$ が存在して, 対応する Weyl 加群 $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ が既約かつリジッドであれば, 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ はリジッドである。

基本的には, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ のテンソル積を分解し, さらにテンソル積を作っては分解しという操作を繰り返してリジッドな対象をどんどん増やしていって $\mathcal{O}_\kappa$ の対象を尽くすという方針で証明する。まず, Lie 環が $\mathfrak{g}$ となるような連結かつ単連結な群 G を考え, その中心を $Z \subset G$ とする。各 $\lambda \in P_+$ に対して, $\mathbf{V}_\lambda$ の $\mathfrak{g}$-加群構造と両立する一意的な G-加群構造を $G \xrightarrow{\rho_\lambda} \mathrm{Aut}(\mathbf{V}_\lambda)$ とするとき, 任意の $z \in Z$ に対して $\rho_\lambda(z) = \theta_\lambda(z)\mathrm{id}$ となる中心指標 θ_λ を考える。そこで, 中心指標 $\theta = \theta_{\lambda_0}$ に対して, ウェイトの集合 $P_+(\theta)$ を

$$P_+(\theta) = \{\lambda \in P_+ \mid \theta_\lambda|_{\mathrm{Ker}\,\theta} = 1\}$$

と定義する。このとき, 次が成立する：

補題 6.2.3 [Lem 32.2] λ が $P_+(\theta)$ に属するならば $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda}$ は $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ を何回かテンソル積したものの部分商になる。

一方, 命題 3.6.2 により, λ が P^{κ}_{+} に属するならば, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda}$ は射影的かつ入射的である。従って, λ が $P_+(\theta) \cap P^{\kappa}_{+}$ に属するならば $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda}$ は $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ を何回かテンソル積したものの直和因子となり, これより $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda}$ がリジッドであることが分かる。次に[79], 部分圏 $\mathcal{O}_\kappa(\theta)$ を, $\mathcal{O}_\kappa$ の対象であって, 任意の既約な部分商がある $\lambda \in P_+(\theta)$ に対応する既約加群 $\mathbf{L}^{\kappa}_{\lambda}$ と同型になるようなものからなる充満部分圏とする。$\mathcal{O}_\kappa(\theta)$ の tilting module は rigid になることを示し, これをうまく利用することにより, $t = (\lambda|\lambda + 2\rho)$ に関する帰納法で $\mathcal{O}_\kappa(\theta)$ がリヂッドであることを示す。次に $\lambda + P_+(\theta) \cap P_+$ の中で λ が最小となるような λ をとって, $r\lambda$ が $P_+(\theta)$ に入るような正整数 r をとる。すると, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda}$ は既約かつ tilting となり, $(\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda})^{\dot{\otimes} r}$ は $\mathcal{O}_\kappa(\theta)$ に入るのでリヂッドである。このとき $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda}$ もリヂッドであることが示され, この操作を繰り返して $\mathcal{O}_\kappa$ のウェイトをとり尽くせば良い。

さて, 従ってある $\lambda_0 \in P_+$ に対して $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ が既約かつリヂッドであるかどうかを調べればよいことになるが, これは結局, ケース・バイ・ケースの計算で確かめることになる。最終的に次の定理を得る。

定理 6.2.4 [Lem 31.5 の Cor 2, Lem 31.6, Lem 31.7] κ は既約分数 $-\frac{p}{p'}$ で表されるとする。このとき

(1) $\mathfrak{g}$ が A_n 型のとき, $n+1$ 次元既約表現 V_{λ_0} に対し, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ は既約かつリヂッドである。

(2) $\mathfrak{g}$ が D_{2n} 型のとき, $2n$ 次元既約表現 V_{λ_0} に対し, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ は既約かつリヂッドである。

(3) $\mathfrak{g}$ が D_{2n+1} 型のとき, $p \neq 2$ ならば $2n+2$ 次元既約表現 V_{λ_0} に対し, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ は既約かつリヂッドである。

79. 以下の部分は [IV] を読んでもよく分からないのだが, 書いてあるとおりに記すことにする。

(4) $\mathfrak{g}$ が E_6 型のとき, $p>13$ ならば 27 次元既約表現 V_{λ_0} に対し, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ は既約かつリジッドである。

(5) $\mathfrak{g}$ が E_7 型のとき, $p>19$ ならば 56 次元既約表現 V_{λ_0} に対し, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ は既約かつリジッドである。

(6) $\mathfrak{g}$ が E_8 型のとき, $p>31$ ならば 248 次元既約表現 V_{λ_0} に対し, $\mathbf{M}^{\kappa}_{\lambda_0}$ は既約かつリジッドである。

6.3 関手 $\mathcal{O}_\kappa \to \mathcal{E}_q$ の構成

まず, あとの都合で, r を任意の $\kappa < -r$ に対して $\mathcal{O}_\kappa$ がリジッドとなる最小の有理数とする。これを用いて改めて $S=\mathbb{C}-\{z \mid z \geq -r\}$ とおき, 対応する環を R とする。また, q は S の元 κ に対して $q=e^{-\pi\sqrt{-1}/\kappa}$ により定まる複素数を表すものとする。この場合にも,

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! = [n]_q \cdots [1]_q$$

と定める。

さて, §2 で $\mathcal{D}$ に対する種々の纏絡作用素の構成を行ったが, 同様の構成を $\mathbf{V}_\lambda[[\varpi]]$ を $\mathcal{O}$ に属する Weyl 加群 $\mathbf{M}_\lambda$ に置き換え, テンソル積 $\otimes$ を $\dot{\otimes}$ に置き換えて行う。ここで, 作用素を定義するときの係数が R に属するかどうかを丁寧に確かめる必要がある。特に重要なのが, s'_λ から s_λ を定義するときの係数と $\tau_{i;\lambda,\mu}$ を定義するときの分母のガンマ関数である。結局, 任意の $\mathcal{O}$ の対象 M に対して §2 と全く同様にして R-加群

$$\mathbf{X}(M) = \bigoplus_{\beta \in P} \mathbf{X}(M)^\beta$$

を定義することができる。また, 同様に作用素

$$E_i : \mathbf{X}(M)^\beta \longrightarrow \mathbf{X}(M)^{\beta+\alpha_i}$$
$$F_i : \mathbf{X}(M)^\beta \longrightarrow \mathbf{X}(M)^{\beta-\alpha_i}$$

を定義する。これは R-加群準同型になり,

(1) $$(E_iF_i - F_iE_i)(x) = \delta_{i,j}[\beta(h_i)]_q x$$

(2) $a_{i,j}=0$ のとき $$E_iE_j = E_jE_i$$

(3) $a_{i,j}=-1$ のとき $$E_i{}^2E_j - (q+q^{-1})E_iE_jE_i + E_jE_i{}^2 = 0$$
$$F_i{}^2F_j - (q+q^{-1})F_iF_jF_i + F_jF_i{}^2 = 0$$

を満たす。ただし, $q=e^{-\pi\sqrt{-1}/\kappa}$ を $\kappa \in S$ の関数とみて R の元とみなしている。

さて, $\kappa \in S$ を固定し, 以上の構成を $\mathcal{O}_\kappa$ についても同様に行う。その結果得られた関手についても E_i, F_i が定義され, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現の圏 $\mathcal{E}_q$ に属することになる。かくして関手

$$\mathbf{X}_\kappa : \mathcal{O}_\kappa \longrightarrow \mathcal{E}_q$$

が定義された。

6.4 q が 1 の巾根の場合の圏 $\mathcal{C}_q$

Lusztig の方法に従って, q が 1 の巾根の場合を含めた量子展開環の有限次元表現の圏を考察する。この場合, 普通の $U_q(\mathfrak{g})$ では都合が悪いので, いわば "元 $\frac{E_i{}^n}{[n]_q!}$, $\frac{F_i{}^n}{[n]_q!}$ で生成された代数" を考えて q を 1 の巾根に持っていこうというのである。

まず, いったん q を不定元とみなし[80], 環 $A = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ を考える。任意の非負整数 n に対して, 前と同様に

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! = [n]_q \cdots [1]_q$$

とおく。また任意の $n \in \mathbb{Z}$ および $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{\prod_{s=0}^{m-1} (q^{n-s} - q^{-n+s})}{\prod_{s=0}^{m-1} (q^s - q^{-s})}$$

と定義する。これらは A の元である。

さて, U^- を, $\mathbb{C}(q)$ 上の結合的代数であって, 不定元 κ_i^-, $(i = 1, \cdots, r)$, で生成され関係式

$$\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ m+n = -a_{i,j}+1}} (-1)^m \frac{\kappa_i^{-m}}{[m]_q!} \kappa_j^- \frac{\kappa_i^{-n}}{[n]_q!} = 0 \quad (i \neq j)$$

で定義された代数とする。すると, 直和分解

$$U^- = \bigoplus_{\mu \in Q} U_\mu^-$$

が成立する。ただし, U_μ^- は, $\mu = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n$ と表すとき,

$$U_\mu^- = \mathrm{span}_{\mathbb{C}(q)}\{\kappa_{i_1}^- \cdots \kappa_{i_p}^- \mid \text{有限列 } i_1, \cdots, i_p \text{ の中に } i \text{ が } m_i \text{ 回現れる}\}$$

である。次に, U^- を埋め込み $A = \mathbb{C}[q, q^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}(q)$ によって A-代数とみなす。その A-部分代数 U_A^- を, 元

$$\kappa_i^{-(m)} = \frac{\kappa_i^{-m}}{[m]_q!}, \quad (i = 1, \cdots, r,\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

で生成されたものと定義する。さて, $\kappa \in S$ に対して改めて q を複素数 $q = e^{-\sqrt{-1}\pi/\kappa}$ とする。つまり, 写像 $A \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ q & \longmapsto & e^{-\sqrt{-1}\pi/\kappa} \end{array}$$

と定義して, $\mathbb{C}$ を A-加群とみなし, これを用いて $\mathbb{C}$-代数 U_q^- を $U_q^- = \mathbb{C} \otimes_A U_A^-$ と定義する。

80. Lusztig はこの不定元を v と表しているが, 感じが出ないので, ここでは q と表した。同じ q という記号であるが, 不定元の場合, $\mathbb{C}[[\varpi]]$ の元の場合, 複素数の場合と 3 通りの意味があるので, 混同しないよう注意していただきたい。

また, U_q^- と同型な代数をもう一つ用意し U_q^+ と名付ける。ただし, κ_i^- に相当する生成元を U_q^+ では κ_i^+ と表す。このとき, 圏 $\mathcal{C}_q$ を次のように定義する[81]。

定義 6.4.1 (圏 $\mathcal{C}_q$) [IV p.433] 直和分解 $V=\sum_{\beta\in P}V^\beta$ が与えられた有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V であって, $U_q^\pm$-加群構造 $U_q^\pm\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられ, 生成元 $\kappa_i^{-(m)}$ の $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ における像を $F_i{}^{(m)}$, 生成元 $\kappa_i^{+(n)}$ の $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ における像を $E_i{}^{(m)}$ と表すとき,

(1) $$E_i{}^{(m)}(V^\beta)\subset V^{\beta+m\alpha_i},\ F_i{}^{(m)}(V^\beta)\subset V^{\beta-m\alpha_i}$$

(2) $$E_i{}^{(m)}F_j{}^{(n)}v=F_j{}^{(n)}E_i{}^{(m)}v\ (i\neq j)$$

(3) $v\in V^\beta$ に対して

(3-1) $$E_i{}^{(m)}F_i{}^{(n)}v=\sum_{t\geq 0}\begin{bmatrix}m-n+\beta(h_i)\\ t\end{bmatrix}F_i{}^{(n-t)}E_i{}^{(m-t)}v$$

(3-2) $$F_i{}^{(n)}E_i{}^{(m)}v=\sum_{t\geq 0}\begin{bmatrix}-m+n-\beta(h_i)\\ t\end{bmatrix}E_i{}^{(m-t)}F_i{}^{(n-t)}v$$

を満たすものを対象とし, A-加群準同型 $V\to V'$ であって, 直和分解と $U_q^\pm$-加群構造と可換なものを射とする圏を $\mathcal{C}_q$ とする。

特に, $E_i=E_i^{(1)},F_i=F^{(1)}$ の作用があるので, $\mathcal{C}_q$ の対象は自然に $\mathcal{E}_q$ の対象とみなせ, 従って

$$\mathcal{C}_q\longrightarrow\mathcal{E}_q$$

なる自然な関手が存在する。

定義 6.4.2 ($\mathcal{C}_q$ のモノイド圏構造) [IV p.434] $\mathcal{C}_q$ の任意の対象 V_1,V_2 に対して, $\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $V_1\otimes V_2$ を考えると, それは次の条件によって一意的に $\mathcal{C}_q$ の対象とみなされる。

(1) $$(V_1\otimes V_2)^\beta=\bigoplus_{\beta_1+\beta_2=\beta}V_1{}^{\beta_1}\otimes V_2{}^{\beta_2}$$

(2) $V_1{}^{\beta_1}\otimes V_2{}^{\beta_2}$ 上で
$$E_i{}^{(m)}(v_1\otimes v_2)=\sum_{m_1+m_2=m}q^{m_1m_2+m_2\beta_1(h_i)}E_i{}^{(m_1)}v_1\otimes E_i{}^{(m_2)}v_2$$
$$F_i{}^{(m)}(v_1\otimes v_2)=\sum_{m_1+m_2=m}q^{m_1m_2-m_1\beta_2(h_i)}F_i{}^{(m_1)}v_1\otimes F_i{}^{(m_2)}v_2$$

すると, 通常の A-加群準同型

$$\begin{array}{ccc}(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 & \longrightarrow & V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\\ (x_1\otimes x_2)\otimes x_3 & \longmapsto & x_1\otimes(x_2\otimes x_3)\end{array}$$

によって結合拘束が定義される。最後に, $I=\mathbb{C}$ とし $E_i{}^{(m)}$, $F_i{}^{(m)}$, $(m>0)$, を 0 で作用させると, これは単位対象となり, $\mathcal{C}_q$ にモノイド圏の構造が定義された。

定理 6.4.3 [IV p.435-p.436] 圏 $\mathcal{C}_q$ はテンソル積 $\otimes$ および自然に定義される結合拘束と交換拘束によってリヂッドなブレイド圏の構造を持つ。

81. 原論文では $\mathcal{C}_\kappa$ と書いている。

具体的な構成については, 原論文をみて頂きたい。

ところで

命題 6.4.4 [IV, Lem 37.1] 任意の $\lambda \in P_+$ に対して, $\mathcal{C}_q$ の単純対象 $\mathcal{L}_\lambda$ であって, $\mathcal{L}_\lambda = \bigoplus_{\beta \in P} \mathcal{L}_\lambda^\beta$ とするとき,

(1) $\mathcal{L}_\lambda^\lambda \neq \{0\}$

(2) 任意の $v \in \mathcal{L}_\lambda^\lambda$ に対し $E_i^{(n)} v = 0$ $(i = 1, \cdots, r, n \in \mathbb{N})$

となるものが一意的に存在する。もし λ が P_+^κ に属する支配的整ウェイトならば $\mathcal{L}_\lambda$ は $\mathcal{C}_q$ の対象として射影的であり, $\dim \mathcal{L}_\lambda = \dim \mathbf{V}_\lambda$ である[82]。

注意 6.4.5 この命題は $\mathfrak{g}$ が ADE 型の場合以外では成立しないとのことであるが, ADE 以外の場合については, ある条件を付ければ成立すると [L2 8.4] に書かれている。

6.5 圏同値 $\mathcal{O}_\kappa \to \mathcal{C}_q$ の構成

さて, 以上の準備の下で, Kazhdan-Lusztig の主定理を述べよう。証明には, $\mathcal{O}_\kappa$ がリヂッドであることを本質的に用いる。

命題 6.5.1 [Prop 36.1 とその Cor] 圏 $\mathcal{O}_\kappa$ の任意の対象 M_1, M_2 に対して, 関手的な同型射 $m_{M_1,M_2} : \mathbf{X}_\kappa(M_1) \otimes \mathbf{X}_\kappa(M_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}_\kappa(M_1 \dot{\otimes} M_2)$ が存在する。さらに, もし $\kappa = -\frac{p}{p'}$, $(p \neq 1)$, であれば, 任意の $M \in \mathcal{O}_\kappa$ に対して $\mathbf{X}(M)$ 上で $E_i{}^p = 0$, $F_i{}^p = 0$ が成立し, 任意の $n > 0$, $i = 1, \cdots, r$, に対して, ある作用素 $E_i^{(n)}$, $F_i^{(n)}$ が存在して,

$$([n]_q!)E_i^{(n)} = E_i{}^n, \quad ([n]_q!)F_i^{(n)} = F_i{}^n$$

が成立する。

ここで, 後半の証明にも, $\mathcal{O}_\kappa$ におけるテンソル積を利用することを注意しておく。さて, これより関手 $\mathbf{X}_\kappa : \mathcal{O}_\kappa \to \mathcal{E}_q$ は圏 $\mathcal{C}_q$ を経由する：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_\kappa \arrow[r, "\mathbf{X}_\kappa"] \arrow[dr] & \mathcal{E}_q \\ & \mathcal{C}_q \arrow[u] \end{tikzcd}$$

こうして得られた関手 $\mathcal{O}_\kappa \to \mathcal{C}_q$ を同じ記号 $\mathbf{X}_\kappa$ で表すことにする。なお, ここまでは ADE でなくともよい[83]。しかし, 次の主定理の証明には, 命題 6.4.4 を用いるので, $\mathfrak{g}$ は ADE 型でなければならない。

---

82. この命題の主張は, $\lambda \in P_+^\kappa$ ならば $\mathcal{C}_q$ の "Weyl 加群" は既約かつ射影的であることを意味する。命題 3.6.2 と見比べると, 二つの Abel 圏 $\mathcal{O}_\kappa$, $\mathcal{C}_q$ が類似の構造を持っていることが読み取れるであろう。
83. と [L2] に書いてある。

主定理 6.5.2 (圏同値 $\mathcal{O}_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_q$) [IV p.437, Thm 38.1] 関手 $\mathbf{X}_\kappa$ はブレイド圏の同値

$$\mathbf{X}_\kappa : \mathcal{O}_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_q$$

を与える。

証明では $\mathcal{O}_\kappa$ と $\mathcal{C}_q$ におけるテンソル積を利用し, 命題 3.6.2, 命題 6.4.4 などにより豊富な射影系が存在することを示して, 最後に補題 1.7.3 を利用する。

なお, 単に Abel 圏としての同値をいうためにも, ブレイド圏の構造を利用していることに注意されたい。

注意 6.5.3 本講究録のテーマである, いわゆる Lusztig の予想への応用においては, 関手 $\mathbf{X}_\kappa$ がウェイト λ の $\mathcal{O}_\kappa$ の既約加群を同じウェイトの $\mathcal{C}_q$ の既約加群に移し, かつ, ウェイト λ の $\mathcal{O}_\kappa$ の Weyl-加群を同じウェイトの $\mathcal{C}_q$ の Weyl-加群に移すことをいわなければならない。前者は明らかであるが, 後者は少し議論が要るであろう。

§∞ あとがき

振り返ってみると, 主定理の主張は, 極めて自然かつ明白で, そうなってくれなければ困るというものである。しかし, Lusztig の予想の証明へのアプローチという本来の目的から κ が有理数, 言い換えると q が 1 の巾根の場合をとり扱わなければならず, 技術的な困難が著しい。特に, リヂッドであることの証明に tilting 加群を利用する辺りはその最たるものであろう。私には, このような技術を用いることが本質的なものかどうかはよく分からないが, 少なくとも原論文 [IV] は繁雑に過ぎ, 証明の改良, 簡易化が望まれるところである。

さて, 近年, 共形場理論, 位相的場の理論を中心として, 理論物理学のアイデアが数学に多大な影響を及ぼしていることは周知のことであろう。しかし, Chevalley 群のモヂュラー表現に関する Lusztig の予想という正標数の表現論の世界にまで影響を及ぼしたことは, 実に著しいことであると言わねばなるまい。そこで, この論説で扱った Kazhdan-Lusztig の理論に影響を及ぼしたとみられる代表的な結果を列挙してみよう。

(1) Belavin-Polyakov-Zamolodchikov [BPZ] が可解格子模型を分類する手段として共形場理論を提唱し, 特に chiral primary field および fusion rule の概念を導入したこと (1983–4)

(2) Knizhnik-Zamolodchikov [KZ] がアフィン Lie 環の対称性を持つ共形場理論を考察し, KZ 方程式を導入したこと (1984)

(3) Drinfeld および 神保 が Leningrad school の量子逆散乱法のアイデアを整理する過程で量子展開環の概念を提出したこと (1985–6)

(4) 土屋-蟹江 [TK] が KZ 方程式のモノドロミーと岩堀-Hecke 代数の表現との関係を見出し, アフィン Lie 環と量子展開環の密接な関係を示唆したこと (1987–8)

(5) 土屋-上野-山田 [TUY] が, Friedan-Shenker の考えに基づき, conformal block の空間とその上の接続を数学的に定式化したこと。(1989)

(6) 土屋-蟹江の示唆を受けて行われた河野 [Ko] の研究を Дринфельд が quasi-Hopf 代数の概念を新たに導入することで整理したこと (1989)

一方, 最近の関連する話題としては,

(7) Finkelberg [F] が κ が正の整数の場合に $\mathcal{O}_\kappa$ のある種の商圏を考えることによりこの場合の圏同値を定式化したこと (1993)

(8) Huang-Lepowsky [HL] 等が vertex operator algebra の観点からテンソル積の理論を考察していること (1993–4)

(9) Kazhdan-Soibelman [KS] が, アフィン Lie 環をアフィン量子展開環に置き換えた場合の理論を考察したこと (1995)

などがあげられよう。また, Lusztig の論文 [L2] は原論文 [KL I–IV] の続編とみられる。

謝辞 種々の議論に付き合って下さった土屋昭博氏, 橋本光靖氏, 谷崎俊之氏, 兼田正治氏, W. Soergel 氏, 行者明彦氏, そして, この論説を書く機会を与えて頂き, また, いろいろとご教示頂いた恩師柏原正樹教授に深く感謝する。