数理解析研究所講究録
956巻 1996年 38-41

An analogue of Longo's canonical endomorphism for bimodule theory and its application to the asymptotic inclusion

増田俊彦 (Masuda Toshihiko)
(東大数理)

1 序

$\rho(M)\subset M$を finite index 、finite depth な III 型 factor の包含関係とする。次のような集合Δを考える。

$$\Delta:=\{\rho_i|\text{ 既約}, \rho_i\prec\rho\bar{\rho}^n, n\in\mathbf{N}\}.$$

すると$\oplus_i[\rho_i\otimes j\circ\rho_i\circ j^{-1}]\in\mathrm{Sect}(M\otimes M^{\mathrm{opp}})$であるがLongoとRehrenは$\oplus_i[\rho_i\otimes j\circ\rho_i\circ j^{-1}]$が canonical endomorphism となるような$M\otimes M^{\mathrm{opp}}$の subfactor Nが存在する事を canonical endomorphism の特徴付けを使って示し、この新しい subfactor と Ocneanu によって導入された asymptotic inclusion(定義は[O1, Section III]参照) との類似を指摘した。しかしこれらが同型であるかどうかの証明は与えなかった。

ところで Asymptotic inclusion については、元の subfactor が AFD II_1factor の場合には、Ocneanu による bimodule の graphic な表現 ([O2]を参照、[EK]も見よ。) によって、良く研究されている。よって上の話と asymptotic inclusion を比べようとした時に、III 型でなく II 型でやらねばならない必要がある。

今回の話の目的は、セクターにおける canonical endomorphism の特徴付けを bimodule の理論に持ち込み、それを使って上記の Longo と Rehren の構成法を bimodule を使って行い、構成された subfactor と asymptotic inclusion を比較する事である。

2 Canonical endomorphism に相当する物の特徴付け

この section では、Longo の canonical endomorphism に相当する物を、bimodule の中で考え、その特徴付けを与える。

$N\subset M$ を index 有限な II_1 subfactor とする。

命題 2.1 ${}_NX_M$を finite type な N-M bimodule とする。次をみたすような coisometry $T\in\mathrm{Hom}({}_NX\otimes_M M_N, {}_NN_N)$ と $S\in\mathrm{Hom}({}_MM\otimes_N X_M, {}_MM_M)$ が存在すると仮定する。

$$(T\otimes 1_{{}_NX_M})(1_{{}_NX_M}\otimes S^*)=\lambda^{-\frac{1}{2}},\quad (S\otimes 1_{{}_MM_N})(1_{{}_MM_N}\otimes T^*)=\lambda^{-\frac{1}{2}},$$

但し、$\lambda > 0$ である。さらに $\dim({}_N X) = \dim(X_N)$ を仮定する。このとき ${}_N X_M \cong {}_N M_M$ が成り立つ。

上の命題を使うと次の事がわかる。これが[L, 定理 5.2]における canonical endomorphism の特徴付けに相当する物である。

定理 2.2 N-N bimodule ${}_N X_N$ に対して次のような coisometry $T \in \mathrm{Hom}({}_N X_N, {}_N N_N)$ と $S \in \mathrm{Hom}({}_N X \otimes_N X_N, {}_N X_N)$ があると仮定する。

$$S(T^* \otimes 1_{{}_N X_N}) = S(1_{{}_N X_N} \otimes T^*) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad \lambda > 0,$$

$$S(S \otimes 1_{{}_N X_N}) = S(1_{{}_N X_N} \otimes S),$$

$$S^* S = (S \otimes 1_{{}_N X_N})(1_{{}_N X_N} \otimes S^*),$$

さらに

$$\dim \mathrm{Hom}({}_N X_N, {}_N N_N) = 1\text{、}\quad \dim({}_N X) = \dim(X_N)$$

も成り立つとする。

このとき N を含む II_1 factor M で $[M : N] = \lambda$ となり

$${}_N X_N \cong {}_N M_N$$

となるものが存在する。

（証明の概略）$M_1 := \mathrm{End}({}_N X)^{\mathrm{opp}}$ とおき、

$$E(x) := S(1_{{}_N X_N} \otimes x) S^* \quad x \in M_1$$

と E を定義し $M := E(M_1)$ とすると、S の条件から E が M_1 から M への conditional expectation になり、M が von Neumann algebra になる事がわかる。この M と N について 命題 2.1の条件が成立する事がわかり、定理の結論が導かれる。 □

(注意) 上の定理において、M の作り方は S の取り方に依存する。一般には定理中の条件を満たすような S は一意には取れない。実際 $N \subset M \ncong N \subset \tilde{M}$ かつ ${}_N M_N \cong {}_N \tilde{M}_N$ となるような subfactor が存在する。([IK]の section 5 の remark を参照せよ。)

3 Asymptotic inclusion との比較

$N \subset M$ を finite index、finite depth な II_1 subfactor とする。Δ という集合を次のように定義する。

$$\Delta := \{{}_M Z_{iM}, \text{既約} \mid {}_M Z_{iM} \prec \underbrace{{}_M M \otimes_N M \otimes_M \ldots \otimes_N M_M}_{2n}, \ {}^\exists n \in \mathbf{N}\}.$$

すると Δ は共役とテンソル積分解でとじている事がわかる。そこで $A := M \otimes M^{\mathrm{opp}}$ にたいして A-A bimodule を

$$ {}_AX_A := \bigoplus_i {}_A(Z_i \otimes_{\mathbf{c}} Z_i^{\mathrm{o}})_A $$

と定義する。ここで Z_j^{o}には Z_jから定まる自然な M^{opp}- M^{opp} bimodule の構造が入っている。

すると[LR, 命題 4.10]の証明と同様の論法で次が定理 2.2を使って示される。

定理 3.1 $B \supset A$ で ${}_AB_A \cong {}_AX_A$ となるものが存在する。さらに$[B : A] = \sum_i d({}_MZ_{iM})$ である。

次の命題より、$A \subset B$ の principal graph もわかる。

命題 3.2 ${}_AB_{iB} := {}_A(Z_i \otimes_A B)_B$とおく。すると

(1) ${}_AB_{iB}$は既約,

(2) ${}_A(Z_i \otimes_{\mathbf{c}} Z_j^{\mathrm{o}}) \otimes_A B_{kB} \cong \bigoplus_k N_{i,\bar{j}}^k {}_AB_{kB}$,

(3) ${}_AB_k \otimes_B B_A \cong \bigoplus_{i,j} N_{i,\bar{j}}^k {}_A(Z_i \otimes_{\mathbf{c}} Z_j^{\mathrm{o}})_A$

が成立する。ここで $N_{i,j}^k = \dim \mathrm{Hom}({}_MZ_i \otimes_M Z_{jM}, {}_MZ_{kM})$ である。すなわち既約分解に現れてくる${}_MZ_{kM}$の個数である。また$\bar{j}$は${}_M\bar{Z}_{jM}$の添数である。

この命題によって、principal graph は fusion graph (定義は[O1, Section III.1] を参照せよ。) の $({}_MM_M, {}_MM_M)$ を含む連結成分である事がわかる。

以下もとの subfactor $N \subset M$ は AFD である事を仮定する。すると、上の fusion rule は asymptotic inclusion からくる bimodule の fusion rule と同じで、従って上のグラフは asymptotic inclusion の principal graph と一致する。

次に上で構成した subfactor と、asymptotic inclusion が同型かどうかが問題となる。定理 3.1では、具体的に定理 2.2の条件を満たす intertwiner を構成したのだが、それが asymptotic inclusion から来る物と同じかどうかが問題である。そこで asymptotic inclusion からくる $S \in \mathrm{Hom}({}_AM_\infty \otimes_A M_{\infty A}, {}_AM_{\infty A})$ を Ocneanu の bimodule の graphic expression を使って書き、bimodule にはいる内積に注意すれば、これが[LR]において与えられた物と同じである事が分かる。よって次の結果を得る。

定理 3.3 $N \subset M$を AFD II_1 subfactor で finite index 、finite depth であるとする。$A \subset B$ を定理 3.1 で構成した物とする。すると

$$ A \subset B \cong M \vee (M' \cap M_\infty) \subset M_\infty $$

である。

参考文献

[EK] Evans, D. E., and Kawahigashi, Y., *On Ocneanu's theory of asymptotic inclusions for subfactors, topological quantum field theories and quantum doubles*, Internat. J. Math. **6** (1995), 205–228

[IK] Izumi, M., and Kosaki, H., *Finite dimensional Kac algebras arising from certain group actions on a factor*, (1995), preprint

[L] Longo, R., *Duality for Hopf algebras and for subfactors*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 133–150

[LR] Longo, R., and Rehren, K.-H., *Nets for subfactors*, Reviews in Math. Phys. **7** (1995), 567–597

[O1] Ocneanu, A., *Quantum symmetry, defferential geometry of finite graphs and classification of subfactors*, University of Tokyo Seminary Notes, (Notes recorded by Y.Kawahigashi)

[O2] Ocneanu, A., Seminar talk at University of California, Berkeley, June 1993,

[Y] Yamagami, S., *A note on Ocneanu's approach to Jones index theory*, Internat. J. Math. **4** (1993), 859–871