数理解析研究所講究録
957 巻 1996 年 109-121

量子確率論とグラフのスペクトル解析について

洞　彰人　　Akihito HORA

岡山大学環境理工学部
Faculty of Environmental Science and Technology
Okayama University

1 Introduction

タイトルは少し大まかすぎるが, 本稿では, グラフ上のランダムウォークを量子確率論の観点から眺めてみて得られることについて, 幾つかの例を中心に述べる.

問題設定と動機づけのために, 群 (の Cayley グラフ) 上のランダムウォークの中心極限定理に関する既知の結果の紹介から始めよう. Example 1. 格子 $\mathbf{Z}^N$, 2. 自由群については, [4] にわかりやすい解説がある. 3. 対称群 の方は [2] を見られたい.

Example 1 Nを自然数とし, $\mathbf{Z}^N$ の左正則表現を Uと書く:

$$(U_x\xi)(y) = \xi(y-x)\,, \qquad x, y \in \mathbf{Z}^N, \quad \xi \in L_2(\mathbf{Z}^N).$$

原点にのっているデルタ関数δ_0によって定まるベクトル状態をϕとする. $\mathbf{Z}^N$ の標準基底 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ をとって

$$X_k = \frac{U(e_k)+U(-e_k)}{\sqrt{2}}\,, \qquad T_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} X_k \tag{1}$$

とおくと, $X_k^* = X_k$, $\phi(X_k) = 0$, $\phi(X_k^2) = 1$ となる. このとき, T_N のϕの下での分布は, $N \to \infty$ で正規分布 $N(0,1)$ に収束する.

Example 2 G を $e_1, \cdots, e_N$ で生成される自由群とする. Example 1 と同じく, G の左正則表現を U, 単位元にのっているデルタ関数の定めるベクトル状態をϕと書き, (1) によって ($-e_k$ のかわりに e_k^{-1} と書いて) T_N を定める. このとき, T_N のϕの下での分布は, $N \to \infty$ で Wigner の半円則に収束する.

Example 3 $N+1$ 次対称群 $\mathcal{S}_{N+1}$ の左正則表現を Uとする. $\mathcal{S}_{N+1}$ が $\{0, 1, \cdots, N\}$ に作用するものとして, 0 と kとの互換をτ_k ($k = 1, \cdots, N$), kと $k+1$ との互換を σ_k ($k = 0, \cdots, N-1$) と書き,

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} U(\tau_k)\,, \qquad S_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} U(\sigma_k) \tag{2}$$

とおく. 正規化されたトレースの下で, $N \to \infty$ のとき, T_N の分布は Wigner の半円則に収束し, S_N の分布は正規分布に収束する.

Examples 1 – 3 は, 群の Cayley グラフ上のランダムウォークである. 一般のグラフでは, (1) や (2) に当たるのは, 隣接作用素（行列）を量子確率変数とみなして適当な状態の下での標準偏差で割って正規化したものである.

Xを頂点集合, Eを辺集合とする向きのない局所有限なグラフ $\Gamma = (X, E)$ の隣接作用素を A とする: $x, y \in X$ に対して

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (x,y) \in E \\ 0 & \text{if} \quad (x,y) \notin E \,. \end{cases}$$

1 頂点 $a \in X$ を固定し, a にのっているデルタ関数 $\delta_a \in L_2(X)$ が定めるベクトル状態を ϕ_a とする. A の平均は $\phi_a(A) = (\delta_a, A\delta_a) = 0$, 分散は $\phi_a(A^2) = (\delta_a, A^2\delta_a) = d_a$ となる. ただし, d_a は a の次数 (a から出ている辺の数). (1) や (2) に対応して, $L_2(X)$ 上の作用素 $d_a^{-1/2}A$ の ϕ_a の下での分布の極限を考えよう. ここで言う極限とは, 系のサイズに関するもの, すなわち頂点数 (あるいは体積) を一定の仕方で大きくしたときのものである. 時刻に当たるのは A のモーメントの次数になる. この $d_a^{-1/2}A$ の分布の極限を求めるのが本稿の主題であるが, その極限の意味するところについて, ここでは [4] や [2] とは少し異なる問題意識をもって考えてみる.

Examples 1 – 3 の証明では, 分布のモーメントの収束による判定方法が用いられている. すなわち上の記号の下では,

$$\phi_a((d_a^{-1/2}A)^r) \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots)$$

を explicit に計算して極限をとることになる. グラフ上で頂点 x から出発して頂点 yに到る道 (同じ辺の後戻りも許す) を x から yへのウォークと呼ぶ. そうすると, $r = 0, 1, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned} \phi_a(A^r) &= (\delta_a, A^r\delta_a) = A^r\text{の } (a,a) \text{ 成分} = \sum_{x_1,\cdots,x_{r-1} \in X} A_{ax_1}A_{x_1x_2}\cdots A_{x_{r-1}a} \\ &= |\{a \text{ から } a \text{ への長さ } r \text{ のウォーク}\}| \qquad (3) \end{aligned}$$

となる. また, $|X| < \infty$ として, 状態 ϕ_a のかわりに $|X|^{-1}\text{trace}$ をとると,

$$\begin{aligned} |X|^{-1}\text{trace}\, A^r &= |X|^{-1} \sum_{a \in X} |\{a \text{ から } a \text{ への長さ } r \text{ のウォーク}\}| \\ &= |X|^{-1}|\{\text{長さ } r \text{ の閉ウォーク}\}| \qquad (4) \end{aligned}$$

となる. Examples 1 – 3 では, (3) や (4) の右辺が, 直接数えられたり non-crossing pair partition の個数を用いて評価されたりする. Γが距離正則グラフの場合は, (3) と (4) とが等しくなる (§2 参照) が, これらの右辺を直接数えるのは一般には困難であろう. ウォークの個数やその生成関数の一般的な性質については, たとえば [3] を見られたい.

今, $\lambda \in \Lambda$(有向集合) の増加とともに頂点の個数が増加する有限グラフの族 $\{\Gamma_\lambda = (X_\lambda, E_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ を考え, 各々の隣接行列を A_λ とする. 状態 $|X_\lambda|^{-1}\mathrm{trace}$ の下での A_λ の分散をκ_λ と書く. A_λ のスペクトルがわかっていれば, $\kappa_\lambda^{-1/2} A_\lambda$ の $|X_\lambda|^{-1}\mathrm{trace}$ の下での分布 ν_λ ($\mathbf{R}$ 上の確率測度) が得られるが, ν_λ の $\lambda \to \infty$ での (無限体積) 極限分布 ν が求まったとしよう. そうすると, $r = 0, 1, \cdots$ に対して

$$|X_\lambda|^{-1}\mathrm{trace}\, A_\lambda^r = \kappa_\lambda^{r/2} \int_{\mathbf{R}} t^r d\nu_\lambda(t) \underset{\lambda\to\infty}{\sim} \kappa_\lambda^{r/2} \int_{\mathbf{R}} t^r d\nu(t)\ , \quad \text{i.e.}$$

$$|\{\text{ 長さ } r \text{の閉ウォーク }\}| \underset{\lambda\to\infty}{\sim} |X_\lambda| \kappa_\lambda^{r/2} \times (\nu \text{の } r \text{次モーメント}) \tag{5}$$

を得る. もちろん, νが r次モーメントを持ち, ν_λの r次モーメントがそれに収束するとしての話であるが, そのチェックは比較的見やすい. Γ_λ が距離正則グラフの場合は, κ_λ は Γ_λ の valency (各頂点の次数) に等しく, (5) より

$$|\{1 \text{ 頂点を出発する長さ } r \text{の閉ウォーク }\}| \underset{\lambda\to\infty}{\sim} (\text{valency})^{r/2} \times (\nu \text{の } r \text{次モーメント}) \tag{6}$$

を得る. $\mathbf{R}$ 上の確率測度νにグラフ (の族) の個性が反映している. 先に [4] や [2] とは異なる問題意識で云々と書いたが, 結局, 手段と目的とが入れ替わっている感じである.

[5] の冒頭に次のような記述がある.

> A large number of asymptotic questions in mathematics can be stated as combinatorial problems. ··· The main question in this context is: *What kind of limit behavior can have a combinatorial object when it "grows"?*

(5) や (6) も, この範疇に属する問題だと言ってよかろう.

§2 では, 距離正則グラフとその Bose-Mesner 代数の元の (量子確率変数としての) 分布について, 準備的な事柄を述べる. §3 で幾つかの具体的な距離正則グラフに対して $\kappa^{-1/2}A$ の分布の極限についての結果を述べ, §4 でそれらの証明を与える.

量子確率論関係のシンポジウムにいつも声をかけてくださる尾畑伸明氏に, 紙面を借りて感謝の意を表します. 本稿を書くに当たっても, 尾畑氏との日頃のディスカッションが大きな支えになりました.

2 Spectrum of a Distance-Regular Graph

本節で述べる距離正則グラフに関する用語や事実については, [1] の第 III 章を参照されたい.

$\Gamma = (X, E)$ を向きのない有限連結グラフとする. Xは頂点集合, Eは辺集合である. $x, y \in X$ に対して, x と yとの距離 (= x と yとを結ぶ最短路の長さ) を $\partial(x, y)$ と書き, Γ の diameter (= $\max_{x,y\in X} \partial(x, y)$) を d とする.

Definition 2.1 $\forall h, i, j \in \{0, 1, \cdots, d\}$ と $\partial(x, y) = h$ となる $\forall x, y \in X$ に対して,

$$p_{ij}^h = |\{z \in X | \partial(x, z) = i, \partial(z, y) = j\}|$$

が h, i, j のみに依存して x, y には依らないとき, グラフΓは距離正則 (distance-regular) であると言う.

Remark このとき, $R_i = \{(x,y) \in X \times X | \partial(x,y) = i\}$ とおくと, $(X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ は P-polynomial アソシエーションスキームになる.

以後, 単位行列をIと書き, すべての成分が 1 の正方行列 (Hadamard 積に関する単位元) を Jと書く. Γの第 i 隣接行列 A_i を

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \partial(x,y) = i \\ 0 & \text{if} \quad \partial(x,y) \neq i \end{cases}$$

によって定めると, $A_0\ (= I), A_1, \cdots, A_d$ は線型独立で

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^{d} p_{ij}^h A_h$$

をみたす. $A_0, A_1, \cdots, A_d$ によって生成される $|X|$ 次複素行列全体の可換部分代数を $\mathcal{A}$ と書き, Γの Bose-Mesner 代数と呼ぶ. $\kappa_i = p_{ii}^0 = |\{z \in X | \partial(x,z) = i\}|$ とおき, 特に $\kappa = \kappa_1$ を valency と呼ぶ. $\mathcal{A}$ には idempotent から成るもう一つの基底 $\{E_0\,(= |X|^{-1}J), E_1, \cdots, E_d\}$ が存在する.

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j\ , \qquad |X| E_i = \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j$$

によって $p_i(j)$ と $q_i(j)$ が定まる. 実は, A_i は A_1 の i 次多項式で表される.

$$A_1 = \sum_{j=0}^{d} \theta_j E_j\ , \qquad \theta_j = p_1(j) \tag{7}$$

において, $-\kappa \le \theta_d < \theta_{d-1} < \cdots < \theta_1 < \theta_0 = \kappa$ となり, (7) が隣接行列 A_1のスペクトル分解を与える. $m_j = \mathrm{rank} E_j$ を第 j multiplicity と言う.

Bose-Mesner 代数 $\mathcal{A}$ の元の分布について考えよう. $x \in X$ に対して $\delta_x \in L_2(X)$ が定めるベクトル状態を ϕ_x とする. 一般に, $\mathcal{A}$ 上の状態ϕ の下での $H \in \mathcal{A}$ の (量子確率変数としての) 分布とは

$$f \in \mathcal{C} : \mathbf{C} \text{ 上の適当な関数環} \longmapsto \phi(f(H)) \in \mathbf{C}$$

によって定まる $\mathcal{C}'$ の元である. 今の場合 $\mathcal{C} = C_0(\mathbf{C})$ ($= \infty$ で 0 の複素数値連続関数全体) と思おう. $H = \sum_{j=0}^{d} \eta_j E_j$ とスペクトル分解されているとすれば,

$$\phi(f(H)) = \sum_{j=0}^{d} f(\eta_j) \phi(E_j)$$

であるから, Hのϕの下での分布は

$$\sum_{j=0}^{d} \phi(E_j) \delta_{\eta_j} \quad (\eta_j \text{に重み} \phi(E_j) \text{がのっている. ただし} \eta_j \text{は互いに異なるとは限らない.})$$

で表される $\mathbf{C}$ 上の確率測度にほかならない. $E_j \in \mathcal{A}$ だから E_j の対角成分は一定で, その値は $|X|^{-1}q_j(0) = |X|^{-1}m_j$ となる. すなわち, $\phi_x(E_j) = |X|^{-1}\mathrm{trace}\, E_j = |X|^{-1}m_j$ となり, 次のことを得た.

Proposition 2.2 Bose-Mesner 代数 $\mathcal{A}$ の元に対しては, ベクトル状態ϕ_x の下での分布と $|X|^{-1}\mathrm{trace}$ の下での分布とが等しくなり, $H = \sum_{j=0}^{d} \eta_j E_j \in \mathcal{A}$ のそれらの下での分布は $\sum_{j=0}^{d}(m_j/|X|)\delta_{\eta_j}$ である.

3 Results on the Limit Distributions

$\{\Gamma_\lambda = (X_\lambda, E_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ を距離正則グラフの有向族とする. 各 Γ_λ の diameter, valency, (第 1) 隣接行列をそれぞれ, d_λ, κ_λ, A_λ で表す. 1 頂点 $a_\lambda \in X_\lambda$ にのっているデルタ関数の定めるベクトル状態を ϕ_λ とする (以下の話は a_λ の取り方によらないので, ϕ_{a_λ} を ϕ_λ と略記した). ϕ_λ の下で, A_λ は平均 0, 分散κ_λを持つ. Introduction に述べたように, 量子確率変数 $\kappa_\lambda^{-1/2}A_\lambda$ の ϕ_λ の下での分布 ν_λ がわれわれの考察の対象であるが, Proposition 2.2 により,

$$\nu_\lambda = \sum_{j=0}^{d_\lambda} \frac{m_{j,\lambda}}{|X_\lambda|} \delta_{\kappa_\lambda^{-1/2}\theta_{j,\lambda}} \tag{8}$$

を得る. ここで, $\theta_{j,\lambda}$ は A_λ のスペクトル分解 (7) に現れる固有値であり, $m_{j,\lambda}$ は Γ_λ の第 j multiplicity である.

どのような距離正則グラフの族に対して, ν_λ の $\lambda \to \infty$ での極限が存在するか, また, その極限分布たちはどのようなクラスの確率測度として特徴づけられるか, という問題について, 現時点では何らかの統一的な結果は得ていない. 本節で述べる具体的な距離正則グラフは, アソシエーションスキームの言葉で言えば次のものである.

1. Hamming scheme $H(d, n)$
2. Johnson scheme $J(v, d)$
3. bipartite half of $H(d, 2)$
4. association scheme of bilinear forms
5. q-analogue of Johnson scheme $J_q(v, d)$
6. association scheme of quadratic forms

これらにおける θ_j, m_j の値については, [1] の第 III 章を見られたい. この範囲に限っても, (8) の ν_λ の極限分布として, 正規分布, Poisson 分布, 指数分布, Γ分布, 幾何分布, 及びその他の離散的な分布が現れる.

1. Hamming scheme $H(d,n)$

$X = F^d$, $|F| = n$ とし, $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ に対して, $\partial(x,y) = |\{j | x_j \neq y_j\}|$ とおく. 各 $\lambda = (d,n)$ に対して

$$\theta_j = (n-1)d - nj\ , \quad m_j = (n-1)^j \binom{d}{j} \quad (j = 0, 1, \cdots, d) \tag{9}$$

が成り立つ. これを用いて (8) によって $\kappa^{-1/2}A$ の分布 $\nu_{(d,n)}$ を定める.

Theorem 3.1 (i) $d \to \infty$, $n/d \to \tau$, $0 < \tau < \infty$ のとき, $\nu_{(d,n)}$ は intensity $1/\tau$, support $\{-\tau^{-1/2} + \tau^{1/2} l \,|\, l = 0, 1, 2, \cdots\}$ の Poisson 分布 ν_τ に収束する. i.e.

$$\nu_\tau(\{-\tau^{-1/2} + \tau^{1/2} l\}) = \frac{e^{-1/\tau}}{l! \tau^l}\ .$$

(ii) $d \to \infty$, $n/d \to 0$ のとき, $\nu_{(d,n)}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に収束する.

Remark (1) で $\tau \to 0$ とすれば, ν_τ は $N(0,1)$ に収束する.

2. Johnson scheme $J(v,d)$

$|S| = v$, $X = \{x \subset S \,|\, |x| = d\}$ とする. $2d \leq v$ として一般性を失わない. $x, y \in X$ に対して, $\partial(x,y) = d - |x \cap y|$ とおく. 各 $\lambda = (v,d)$ に対して

$$\theta_j = d(v-d) - j(v-j+1) \quad (j = 0, 1, \cdots, d)\ , \quad m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1} \quad (j = 1, \cdots, d) \tag{10}$$

が成り立つ. (8) によって $\nu_{(v,d)}$ を定める.

Theorem 3.2 $p = 2d/v$ とおく $(0 < p \leq 1)$.
(i) $d \to \infty$, $p \to \alpha$, $0 < \alpha < 1$ のとき, $\nu_{(v,d)}$ は support $\{-(2\alpha^{-1} - 1)^{-1/2} + 2(\alpha^{-1} - 1)(2\alpha^{-1} - 1)^{-1/2} l \,|\, l = 0, 1, 2, \cdots\}$ の幾何分布 ν_α に収束する. i.e.

$$\nu_\alpha(\{-\Big(\frac{2}{\alpha} - 1\Big)^{-1/2} + 2\Big(\frac{1}{\alpha} - 1\Big)\Big(\frac{2}{\alpha} - 1\Big)^{-1/2} l\}) = 2\Big(\frac{1}{\alpha} - 1\Big)\Big(\frac{2}{\alpha} - 1\Big)^{-(l+1)}\ .$$

(ii) $d \to \infty$, $p \to 1$, $(1-p)d^{1/2} \to a \in [0, \infty]$ のとき, $\nu_{(v,d)}$ は support $[-1, \infty)$ の指数分布 ν に収束する. i.e.

$$\nu([-1, x]) = \int_{-1}^{x} e^{-(s+1)} ds \qquad (x > -1)\ .$$

Remark (i) で $\alpha \to 1$ とすれば, ν_α は (ii) の指数分布 ν に収束する. (ii) における $(1-p)d^{1/2}$ が (0 と ∞ も許して) 極限値を有するという仮定は単に技術的なものに過ぎず, 実は $p \to 1$ だけで成り立つのかもしれない.

3. bipartite half of $H(d,2)$

$H(d,2)$ において $E=\{(x,y)|\partial(x,y)=2\}$ を新しい辺集合と定めると, 頂点数が 2^{d-1} で diameter が $[d/2]$ の距離正則グラフができる. 各 $\lambda=d$ に対して

$$\theta_j=\frac{d(d-1)}{2}-2j(d-j)\ ,\quad m_j=\binom{d}{j}\quad (j=0,1,\cdots,[d/2]-1),$$
$$m_{[d/2]}=\frac{1}{2}\binom{d}{[d/2]}\ \text{ if } d \text{ is even},\qquad m_{[d/2]}=\binom{d}{[d/2]}\ \text{ if } d \text{ is odd}\tag{11}$$

が成り立つ. (8) によって ν_d を定める.

Theorem 3.3 $d\to\infty$ のとき, ν_d は次のような support $[-1/\sqrt{2},\infty)$ の Γ分布 ν に収束する.

$$\nu([-1/\sqrt{2},x])=\int_{-1/\sqrt{2}}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1+\sqrt{2}s}{2}\Big)^{-1/2}e^{-\frac{1+\sqrt{2}s}{2}}ds\qquad (x>-1/\sqrt{2})\ .$$

4. association scheme of bilinear forms

基礎になる有限体の位数 $q\ (\geq 2)$ を固定する. Gauss の q整数を $[\cdot]_q$ で表す.

$$[k]_q=\frac{q^k-1}{q-1}\ ,\quad [k]!_q=[k]_q[k-1]_q\cdots[1]_q\ ,\quad \begin{bmatrix}k\\ i\end{bmatrix}_q=\frac{[k]!_q}{[i]!_q[k-i]!_q}\ .$$

位数 qの有限体上の $d\times n$ 行列全体を X とする. $d\leq n$ として一般性を失わない. $x,y\in X$ に対して $\partial(x,y)=\mathrm{rank}\,(x-y)$ とおく. 各 $\lambda=(d,n)$ に対して

$$\begin{aligned}\theta_j &= (q^n-1)[d]_q-q^{d+n-j}[j]_q\quad (j=0,1,\cdots,d)\\ m_j &= (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{j-1})\begin{bmatrix}d\\ j\end{bmatrix}_q\quad (j=1,\cdots,d)\end{aligned}\tag{12}$$

が成り立つ. (8) によって $\nu_{(d,n)}$ を定める.

Theorem 3.4 $d\to\infty,\ n-d\to h\ (\in \mathbf{N}_{\geq 0})$ のとき, $\nu_{(d,n)}$ は次のような support $\{-(q^h+1)(q-1)^{-1/2}q^{-h/2}+q^{(h/2)+l}(q-1)^{-1/2}\,|\,l=0,1,2,\cdots\}$ の分布 ν_h に収束する.

$$\nu_h\Big(\Big\{-\frac{q^h+1}{(q-1)^{1/2}q^{h/2}}+\frac{q^{(h/2)+l}}{(q-1)^{1/2}}\Big\}\Big)=\Big(\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^{-i})\Big)\frac{q^{h^2/2}}{[h+l]!_q[l]!_q(q^{1/2}-q^{-1/2})^{h+2l}}\ .$$

5. q-analogue of Johnson scheme $J_q(v,d)$

Vを位数 qの有限体上の v次元ベクトル空間とし, Vの d 次元部分空間全体を X とする. q は固定する. $2d\leq v$ として一般性を失わない. $x,y\in X$ に対して $\partial(x,y)=d-\dim(x\cap y)$ とおく. 各 $\lambda=(v,d)$ に対して

$$\begin{aligned}\theta_j &= q[d]_q[v-d]_q-[j]_q[v-j+1]_q\quad (j=0,1,\cdots,d)\\ m_j &= \begin{bmatrix}v\\ j\end{bmatrix}_q-\begin{bmatrix}v\\ j-1\end{bmatrix}_q\quad (j=1,\cdots,d)\end{aligned}\tag{13}$$

が成り立つ. (8) によって $\nu_{(v,d)}$ を定める.

Theorem 3.5 $d \to \infty$, $v-2d \to h$ ($\in \mathbf{N}_{\geq 0}$) のとき, $\nu_{(v,d)}$ は次のような support $\{-q^{-(h+1)/2}+(1-q^{-1})(q^{l/2}-q^{-l/2})(q^{1/2}-q^{-1/2})^{-1}(q^{(h+l+1)/2}-q^{-(h+l+1)/2})(q^{1/2}-q^{-1/2})^{-1} \mid l = 0,1,2,\cdots\}$ の分布 ν_h に収束する.

$$\nu_h(\{-q^{-(h+1)/2}+(1-q^{-1})\frac{q^{l/2}-q^{-l/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}\frac{q^{(h+l+1)/2}-q^{-(h+l+1)/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}\}) = \frac{1}{q^{l(h+l)}} - \frac{1}{q^{(l+1)(h+l+1)}}.$$

6. association scheme of quadratic forms

p を 3 以上の素数, f を自然数として $q=p^{2f}$ とおく. 位数 $q^{1/2}$ $(=p^f)$ の有限体上の $(n-1)$ 次対称行列全体を X とする. $x,y\in$ に対して $(\mathrm{rank}\,(x-y))/2$ より小さくない最小の整数を $\partial(x,y)$ とおくと, diameter $[n/2]$ の距離正則グラフができる. 各 $\lambda = n$ に対して

$$\begin{aligned}
\theta_j &= (q-1)^{-1}(1+q^{n-j-(1/2)}-q^{(n-1)/2}-q^{n/2}) \quad (j=0,1,\cdots,d)\\
m_j &= q^{j(n-j-(1/2))}\prod_{i=1}^{j}\frac{(1-q^{i-(n/2)-1})(1-q^{i-(n/2)-(1/2)})}{1-q^{-i}} \quad (j=1,\cdots,d) \qquad (14)
\end{aligned}$$

が成り立つ. (8) によって ν_n を定める.

Theorem 3.6 (i) n が偶数で $\to\infty$ のとき, ν_n は次のような support $\{-q^{1/4}(q-1)^{-1/2}+q^{-1/4}(q-1)^{1/2}[l]_q \mid l=0,1,2,\cdots\}$ の分布 $\nu^{(e)}$ に収束する.

$$\nu^{(e)}(\{-q^{1/4}(q-1)^{-1/2}+q^{-1/4}(q-1)^{1/2}[l]_q\}) = \frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{-j+(1/2)})}{q^{l^2-(l/2)}\prod_{j=1}^{l}(1-q^{-j})(1-q^{-j+(1/2)})}.$$

(ii) n が奇数で $\to\infty$ のとき, ν_n は次のような support $\{-q^{-1/4}(q-1)^{-1/2}+q^{1/4}(q-1)^{1/2}[l]_q \mid l=0,1,2,\cdots\}$ の分布 $\nu^{(o)}$ に収束する.

$$\nu^{(o)}(\{-q^{-1/4}(q-1)^{-1/2}+q^{1/4}(q-1)^{1/2}[l]_q\}) = \frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{-j-(1/2)})}{q^{l^2+(l/2)}\prod_{j=1}^{l}(1-q^{-j})(1-q^{-j-(1/2)})}.$$

4 Proofs of the Theorems

§3 に挙げた定理の証明を行う. 証明の方針としては,

- 特性関数 (Fourier 変換) の収束をチェックする方法
- 分布関数を直接計算する方法

の 2 つを用いる. Hamming scheme の場合は, (9) からわかるように固有値が等差数列をなすので, 分布 $\nu_{(d,n)}$ の特性関数が容易に求められる. それ以外の場合は, 直接分布関数を計算していくことにする. ここでは, 代表して, Hamming scheme (Theorem 3.1) と Johnson scheme (Theorem 3.2) の場合の証明のみを述べる. それだけでおおよその感じは十分伝わるものと思う.

4.1 Proof of Theorem 3.1

(9) と $|X| = n^d$ を

$$\nu_{(d,n)} = \sum_{j=0}^{d} \frac{m_j}{|X|} \delta_{\kappa^{-1/2}\theta_j} \tag{15}$$

に代入する. 固有値は bottom から数える方が便利なので, $j = d - l$ とおくと

$$\theta_{d-l} = -d + nl\ , \quad m_{d-l} = (n-1)^{d-l}\binom{d}{l} \quad (l = 0, 1, \cdots, d)$$

となる. (15) の特性関数を計算して

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} d\nu_{(d,n)}(x) &= \sum_{l=0}^{d} e^{i\xi\kappa^{-1/2}\theta_{d-l}} \frac{m_{d-l}}{|X|} \\
&= (1-\frac{1}{n})^d e^{-i\xi d^{1/2}(n-1)^{-1/2}} \sum_{l=0}^{d} e^{i\xi n(n-1)^{-1/2}d^{-1/2}l}(n-1)^{-l}\binom{d}{l} \\
&= (1-\frac{1}{n})^d e^{-i\xi d^{1/2}(n-1)^{-1/2}} \Big\{1 + \frac{1}{n-1} e^{i\xi n(n-1)^{-1/2}d^{-1/2}}\Big\}^d
\end{aligned} \tag{16}$$

を得る.

今, $d \to \infty$, $n/d \to \tau$, $0 < \tau < \infty$ (したがって $n \to \infty$) としよう. そうすると,

$$\begin{aligned}
(16) \quad &= \quad \exp\Big\{-\frac{d}{n} - i\xi\Big(\frac{d/n}{1-(1/n)}\Big)^{1/2} + \frac{d/n}{1-(1/n)} e^{i\xi n(n-1)^{-1/2}d^{-1/2}} + O(n^{-1}) \\
&\longrightarrow \exp\Big(-\frac{1}{\tau} - i\xi\frac{1}{\tau^{1/2}} + \frac{1}{\tau} e^{i\xi\tau^{1/2}}\Big)\ .
\end{aligned}$$

これで (i) が示せた.

次に, $d \to \infty$, $n/d \to 0$ としよう. (16) において

$$\begin{aligned}
&\log(1 + \frac{1}{n-1} e^{i\xi n(n-1)^{-1/2}d^{-1/2}}) \\
&= \log\Big(1 + \frac{1}{n-1} + \frac{i\xi n}{(n-1)^{3/2}d^{1/2}} - \frac{\xi^2 n^2}{2(n-1)^2 d} + \frac{1}{n-1}O((n/d)^{3/2})\Big) \\
&= \log\frac{n}{n-1} + \log\Big(1 + \frac{i\xi}{(n-1)^{1/2}d^{1/2}} - \frac{\xi^2 n}{2(n-1)d} + \frac{1}{n}O((n/d)^{3/2})\Big) \\
&= -\log(1 - \frac{1}{n}) + \frac{i\xi}{(n-1)^{1/2}d^{1/2}} - \frac{\xi^2}{2d} + \frac{1}{n}O((n/d)^{3/2})
\end{aligned}$$

であるから,

$$(16) = \exp\{-\xi^2/2 + O((n/d)^{1/2})\} \longrightarrow e^{-\xi^2/2}\ .$$

上の計算において, Landau の記号 $O(\cdots)$ で表された量は, 括弧の中の$\cdots$ のみによって評価できる量であることを注意しておく. これで (ii) が示せた.

4.2 Proof of Theorem 3.2

(10) において固有値を bottom から番号づけると

$$\begin{aligned}\theta_{d-l} &= -d + l^2 + l(v-2d+1)\\ m_{d-l} &= \binom{v}{d-l}\frac{v-2d+2l+1}{v-d+l+1} \qquad (l=0,1,\cdots,d)\end{aligned}$$

となり, $l=0,1,\cdots,d$ に対して

$$\begin{aligned}\kappa^{-1/2}\theta_{d-l} &= -\Big(\frac{d}{v-d}\Big)^{1/2} + \frac{l^2+l(v-2d+1)}{d^{1/2}(v-d)^{1/2}}\\ &= -(\frac{2}{p}-1)^{-1/2} + (\frac{2}{p}-1)^{-1/2}d^{-1/2}\{l^2+l(2(\frac{1}{p}-1)d+1)\}\,. \qquad (17)\end{aligned}$$

ただし, 定理の仮定にあるように $p=2d/v$ とおいた. これらと $|X|=\binom{v}{d}$ によって

$$\nu_{(v,d)} = \sum_{l=0}^{d}\frac{m_{d-l}}{|X|}\delta_{\kappa^{-1/2}\theta_{d-l}} \qquad (18)$$

を定める.

まず, $d\to\infty$, $p\to\alpha$, $0<\alpha<1$ としよう. (18) においてスペクトルの左端は $-(2\alpha^{-1}-1)^{-1/2}$ に収束する. $-(2\alpha^{-1}-1)^{-1/2}<x$ となる x をしばし固定する. (17) より

$$\kappa^{-1/2}\theta_{d-l}\le x \iff l\le L(d,p,x)\,, \qquad \text{ただし}$$

$$L(d,p,x) = -\{(\frac{1}{p}-1)d+\frac{1}{2}\} + \Big\{(\frac{1}{p}-1)^2d^2+(\frac{1}{p}-1)d+\frac{1}{4}+((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1)d\Big\}^{1/2} \quad (19)$$

となるが,

$$L(d,p,x)\longrightarrow L(\alpha,x)=\frac{(2\alpha^{-1}-1)^{1/2}x+1}{2(\alpha^{-1}-1)} \quad \text{as} \quad d\to\infty,\, p\to\alpha\,.$$

したがって $\nu_{(v,d)}$ の極限 ν_α は離散的な分布になり, この $L(\alpha,x)$ が自然数値をとる x たちと左端 $-(2\alpha^{-1}-1)^{-1/2}$ を併せた集合が ν_α の support である. このとき, 点

$$-(\frac{2}{\alpha}-1)^{-1/2}+2(\frac{1}{\alpha}-1)(\frac{2}{\alpha}-1)^{-1/2}l \quad (l=0,1,2,\cdots)$$

にのっている ν_α のウェイトは $m_{d-l}/|X|$ の極限値で与えられる. lを固定して Stirling の公式を用いれば,

$$\frac{m_{d-l}}{|X|}=\frac{d!(v-d)!}{(d-l)!(v-d+l)!}\frac{v-2d+2l+1}{v-d+l+1}\longrightarrow\frac{2(\alpha^{-1}-1)}{(2\alpha^{-1}-1)^{l+1}}$$

を得る. これで (i) が示せた.

今度は, $d \to \infty$, $p \to 1$, $(1-p)d^{1/2} \to a \in [0, \infty]$ としよう. (18) においてスペクトルの左端は -1 に収束する. $-1 < x$ となる x を固定する. (19) において

$$\begin{aligned} L(d,p,x) &\le -(\frac{1}{p}-1)d - \frac{1}{2} + (\frac{1}{p}-1)d + (\frac{1}{p}-1)^{1/2}d^{1/2} + \frac{1}{2} + ((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1)^{1/2}d^{1/2} \\ &= \{(\frac{1}{p}-1)^{1/2} + ((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1)^{1/2}\}d^{1/2} \end{aligned}$$

となるが, 右辺の中括弧の中は x のみに依存して (したがって今は定数で) 評価できる. 故に, (19) 以下の l における $m_{d-l}/|X|$ の漸近値を計算する際, $d!$, $(v-d)!$, $(d-l)!$, $(v-d+l)!$ に対して, lに関して一様な誤差の下に Stirling の公式を適用できる. そうして

$$\begin{aligned} \frac{d!(v-d)!}{(d-l)!(v-d+l)!} &\sim \frac{((2/p)-1)^{v-d+(1/2)}}{(1-(l/d))^{d-l+(1/2)}((2/p)-1+(l/d))^{v-d+l+(1/2)}} \\ &= \exp\Big\{-\frac{l^2}{(2-p)d} - l\log(\frac{2}{p}-1) + O(d^{-1/2})\Big\} \end{aligned}$$

を得る. この $O(d^{-1/2})$ は d のみに依存し, lや p には依存しない. さらに,

$$\begin{aligned} L(d,p,x) &= \frac{((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1)d}{(\frac{1}{p}-1)d+\frac{1}{2}+\{(\frac{1}{p}-1)^2d^2+(\frac{1}{p}-1)d+\frac{1}{4}+((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1)d\}^{1/2}} \\ &\le \frac{((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1)d}{2(\frac{1}{p}-1)d} = \frac{p}{2}\Big((\frac{2}{p}-1)^{1/2}x+1\Big)(1-p)^{-1} \end{aligned}$$

より, $l \le L(d,p,x)$ ならば

$$l\log(\frac{2}{p}-1) = \frac{2}{p}(1-p)l + O(1-p)$$

が成り立つ. この $O(1-p)$ は p のみに依存する. また,

$$\frac{v-2d+2l+1}{v-d+l+1} = \frac{2\{(p^{-1}-1)+(l/d)\}}{2p^{-1}-1} + O((1-p)d^{-1/2}) + O(d^{-1})$$

においても, 第 1 の $O(\cdots)$ は p, d のみに, 第 2 の $O(\cdots)$ は d のみに依存する. したがって

$$\begin{aligned} &\nu_{(v,d)}([-1,x]) = \sum_{l \le L(d,p,x)} \frac{m_{d-l}}{|X|} \\ \sim &\sum_{l \le L(d,p,x)} \Big\{\frac{2(\frac{1}{p}-1+\frac{l}{d})}{\frac{2}{p}-1} + O((1-p)d^{-1/2}) + O(d^{-1})\Big\} \exp\Big\{-\frac{l^2}{(2-p)d} - \frac{2(1-p)l}{p}\Big\} \end{aligned}$$

を得る. ところが,

$$\begin{aligned} &\sum_{l \le L(d,p,x)} \{O(d^{-1}) + O((1-p)d^{-1/2})\} \exp\Big\{-\frac{l^2}{(2-p)d} - \frac{2(1-p)l}{p}\Big\} \\ \le\ & L(d,p,x)\{O(d^{-1}) + O((1-p)d^{-1/2})\} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

だから, 結局

$$\frac{2}{(2/p)-1}\sum_{l\le L(d,p,x)}\{(\frac{1}{p}-1)+\frac{l}{d}\}\exp\Bigl\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Bigr\} \tag{20}$$

の極限値を計算すればよい.

$(1-p)d^{1/2}$ の極限値 $a\in[0,\infty]$ によって場合分けをする.

(ア) $a=0$ の場合 :

$$L(d,p,x)\sim(x+1)^{1/2}d^{1/2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{l\le L(d,p,x)}(\frac{1}{p}-1)\exp\Bigl\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Bigr\} &\le (\frac{1}{p}-1)L(d,p,x)\\ &\le (\text{定数})\times(1-p)d^{1/2}\longrightarrow 0\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l\le L(d,p,x)}\frac{l}{d}\exp\Bigl\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Bigr\}\\ =&\sum_{l\le L(d,p,x)}\frac{1}{d^{1/2}}\frac{l}{d^{1/2}}\exp\Bigl\{-\frac{1}{2-p}\Bigl(\frac{l}{d^{1/2}}\Bigr)^2-\frac{2(1-p)d^{1/2}}{p}\frac{l}{d^{1/2}}\Bigr\}\\ \longrightarrow&\int_0^{(x+1)^{1/2}}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}e^{-(s+1)}ds\ .\end{aligned}$$

(イ) $a=\infty$ の場合 :

$$L(d,p,x)\sim\frac{x+1}{2(1-p)}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{l\le L(d,p,x)}\frac{l}{d}\exp\Bigl\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Bigr\} &\le \frac{l}{d}L(d,p,x)\\ &\le (\text{定数})\times\frac{1}{(1-p)d^{1/2}}\longrightarrow 0\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l\le L(d,p,x)}(\frac{1}{p}-1)\exp\Bigl\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Bigr\}\\ =&\ \frac{1}{p}\sum_{l\le L(d,p,x)}(1-p)\exp\Bigl\{-\frac{\{(1-p)l\}^2}{(2-p)(1-p)^2d}-\frac{2}{p}(1-p)l\Bigr\}\\ \longrightarrow&\int_0^{(x+1)/2}e^{-2t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}e^{-(s+1)}ds\ .\end{aligned}$$

(ウ) $0<a<\infty$ の場合 :

$$L(d,p,x)\sim\frac{(x+1)d^{1/2}}{a+(a^2+x+1)^{1/2}}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l\le L(d,p,x)} \frac{l}{d}\exp\Big\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Big\} \\
=&\sum_{l\le L(d,p,x)} \frac{1}{d^{1/2}}\frac{l}{d^{1/2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2-p}\Big(\frac{l}{d^{1/2}}\Big)^2-\frac{2(1-p)d^{1/2}}{p}\frac{l}{d^{1/2}}\Big\} \\
\longrightarrow &\int_0^{(x+1)/\{a+(a^2+x+1)^{1/2}\}} te^{-t^2-2at}dt\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l\le L(d,p,x)} (\frac{1}{p}-1)\exp\Big\{-\frac{l^2}{(2-p)d}-\frac{2(1-p)l}{p}\Big\} \\
=&\ \frac{1}{p}\sum_{l\le L(d,p,x)}(1-p)\exp\Big\{-\frac{\{(1-p)l\}^2}{(2-p)(1-p)^2d}-\frac{2}{p}(1-p)l\Big\} \\
\longrightarrow &\int_0^{a(x+1)/\{a+(a^2+x+1)^{1/2}\}} e^{-(t^2/a^2)-2t}dt=\int_0^{(x+1)/\{a+(a^2+x+1)^{1/2}\}} ae^{-t^2-2at}dt\,,
\end{aligned}
$$

2式を加えて

$$
\int_0^{(x+1)/\{a+(a^2+x+1)^{1/2}\}}(t+a)e^{-t^2-2at}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}e^{-(s+1)}ds\,.
$$

(ア), (イ), (ウ) のいずれの場合も, (20) の極限値が (したがって$\nu_{(v,d)}([-1,x])$ の極限値が)

$$
\int_{-1}^{x}e^{-(s+1)}ds
$$

であることが示された.

References

[1] Bannai,E., Ito,T.: *Algebraic combinatorics I. Association schemes*, Benjamin / Cummings, Menlo Park, California, 1984.

[2] Biane,P.: *Permutation model for semi-circular systems and quantum random walks*, Pacific J. Math. **171** No.2, 373–387 (1995).

[3] Godsil,C.D.: *Algebraic combinatorics*, Chapman&Hall, New York, London, 1993.

[4] 尾畑伸明 (Obata,N.): To appear in 量子確率論への招待, 多元数理フォーラム **2**, 名古屋大学 (1996).

[5] Vershik,A.M.: *Asymptotic combinatorics and algebraic analysis*, In: Proc. ICM, Zürich, Switzerland 1994, 1384–1394, Birkhäuser, Basel, 1995.