数理解析研究所講究録
959 巻 1996 年 1-6

複素力学系入門 I

諫山　哲生 (Tetsuo Isayama)
山形大学大学院理学研究科

ここに挙げるものは主に *Steinmetz* [4] を参照した。その詳細についてはそちらを読んで頂きたい。また、もう 1 冊、入門書として、*Beardon* [1] を挙げてあるが、両者の内容については重複する部分も多々ある。

1　準備

リーマン球面 C_∞上の次数 d が 2 以上の有理関数 (rational function) を考える。fを有理関数とし、その反復合成 (iteration) を f^nで表す。また、$f^0 = id.$, $f^{-n} = (f^n)^{-1}$とする。点 $z(\in \mathrm{C}_\infty)$ 及び、集合 $E(\subset \mathrm{C}_\infty)$ に対して、それらの forward orbit をそれぞれ $O^+(z), O^+(E)$ で表す。即ち、

$$O^+(z) = \{f^n(z) : n > 0\}, \quad O^+(E) = \bigcup_{n>0} f^n(E)$$

である。また、backward orbit をそれぞれ $O^-(z), O^-(E)$ で表す。即ち、

$$O^-(z) = \{f^{-n}(\{z\}) : n > 0\}, \quad O^-(E) = \bigcup_{n>0} f^{-n}(E)$$

である。

Definition 1 local に 1 対 1 にならない点（有限点なら即ち、関数 fの第 1 次導関数の零点）を fの critical point と呼び、それら全体の集合を$\mathcal{C}_f = \mathcal{C}$で表す。また、$O^+(\mathcal{C})$ の limit point の集合を critical limit set と呼び、$\mathcal{C}_f^+ = \mathcal{C}^+$で表す。そして、$\mathcal{C}_f^+ \cup O^+(\mathcal{C}_f) = \mathcal{P}_f (= \mathcal{P})$ を post critical set と呼ぶ。

有理関数の critical point は C_∞上に重複度も込めて $2d-2$ 個あることが Riemann-Hurwitz の公式によって分かる。

Definition 2 関数 fに対して、

(1) ある自然数 n が存在して $f^n(z_0) = z_0$となるような点 z_0を fの周期点 (periodic point) と呼び、そのような最小の n をその周期 (period) と呼ぶ。更に、集合 $\alpha = \{z_0, f(z_0), \cdots, f^{n-1}(z_0)$ を cycle と呼ぶ。特に、$n = 1$ の時、z_0を fの固定点 (fixpoint) と呼ぶ。そして、周期 n の周期点 z_0に対して、$(f^n)'(z_0) = \lambda(\alpha) = \lambda$をその multiplier と呼ぶ。

(2) 点z_0がperiodicでないが、ある自然数qがあって、$f^q(z_0)$がperiodicとなるとき、点z_0をfの前周期点(preperiodic point)と呼ぶ。

Definition 3 空でない集合$E(\subset \mathrm{C}_\infty)$に対して、$f(E)\subseteq E$が成り立つとき、$E$をforward invariant set、また、$f^{-1}(E)\subseteq E$が成り立つとき、backward invariant set、そして、forward invariantかつ、backward invariantであるとき、即ち、$f(E)=f^{-1}(E)=E$が成り立つとき、completely invariant setと呼ぶ。

2 ファトウ集合とジュリア集合

関数fに対して、点zがnormalであるとはfのiterationの列(f^n)がzのある近傍で、normalになることである。

Definition 4 関数fに対して、normalな点全体の集合をファトウ(Fatou)集合と呼び、$F(f)=F_f=F$で表す。そして、その補集合をジュリア(Julia)集合と呼び、$J(f)=J_f=J$で表す。また、ファトウ集合の連結成分(component)をstable domainまたは、Fatou componentと呼ぶ。

Definition 5 Tをメビウス変換とし、有理関数fに対して、$g=TfT^{-1}$とする。このとき、fとgはconjugateであるという。

ファトウ集合とジュリア集合の簡単な性質を次に挙げる。

- ファトウ集合は(f^n)がnormalになる最大開集合である。
- 有理関数のジュリア集合はC_∞のコンパクト集合である。
- f,gがconjugateならば、$F_g=T(F_f)$そして、$J_g=T(J_f)$である。

Definition 6 各cycleをそのmultiplier λにより次のように分類する。

$$\left.\begin{array}{c}\text{super attracting}\\ \text{attracting}\\ \text{indifferent}\\ \text{repelling}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda=0\\ 0<|\lambda|<1\\ |\lambda|=1\\ |\lambda|>1\end{array}\right.$$

更に、indifferent cycle αを次のように分類する。

$$\left.\begin{array}{c}\text{Leau cycle}\\ \text{Siegel cycle}\\ \text{Cremer cycle}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{ある自然数 m に対して、}\lambda^{\mathrm{m}}=1\\ \text{任意の自然数 n に対して、}\lambda^{\mathrm{n}}\neq 1\text{ かつ、}\alpha\subset F\\ \text{任意の自然数 n に対して、}\lambda^{\mathrm{n}}\neq 1\text{ かつ、}\alpha\subset J\end{array}\right.$$

また、Leau cycleはrationally indifferentと呼ばれ、Siegel及び、Cremer cycleはirrationally indifferentと呼ばれる。

Theorem 1 ジュリア集合とファトウ集合は completely invariant set である。

Theorem 2 任意の自然数 p に対して、$F_f = F_{f^p}$,$J_f = J_{f^p}$である。

Theorem 1,2はファトウ集合及び、ジュリア集合の重要な性質である。また、Theorem 2の証明には有理型関数の families の有限個の union が nomal であることと、これらの families の各々が nomal であることが同値であることを利用すれば良い。

Theorem 3 (super)attracting cycle はファトウ集合に属し、repelling cycle はジュリア集合に属す。

Theorem 4 ジュリア集合は nowhere dense であるか、または、リーマン球面全体である。

「どのようなときに、ジュリア集合がリーマン球面全体になるのか?」の問いには theorem 23で答える。

Theorem 5 ジュリア集合は perfect set である。

Theorem 6 任意の $a \in J$に対して、$O^-(a)$ はジュリア集合で稠密である。

この性質はジュリア集合をコンピューターで描くことに利用できる。つまり、ジュリア集合に属する点を1つ見つけることができれば、その逆像を探すことで、その「近似」が描けるのである。

Theorem 7 可換な有理関数 f, g(即ち、$f \circ g = g \circ f$) に対して、$F_f = F_g, J_f = J_g$である。

Theorem 8 全ての repelling cycles からなる集合はジュリア集合の稠密な集合である。

Julia 自身は

$$\overline{\{\text{全ての repelling cycles}\}}$$

でジュリア集合を定義した。

Theorem 9 Dをジュリア集合と交わる domain とする。このとき、十分大きな全ての自然数 n に対して、

$$f^n(D \cap J) = J$$

が成り立つ。

Theorem 10 ジュリア集合は連結であるかまたは、非可算個の連結成分からなる。

Theorem 11 ジュリア集合の稠密な集合の任意の点 zに対して、その forward orbit $O^+(z)$ はジュリア集合の稠密な集合である。

Theorem 12 有理関数はその各 stable domain をある stable domain の上に写す。

Theorem 13 V_0を stable domains の union で backward invariant なものとする。このとき、

$$J = \partial V_0$$

である。

Theorem 14 V を completely invariant stable domain とする。このとき、$J = \partial V$であり、ほかの全ての stable domain は単連結である。

Theorem 15 ファトウ集合が空集合でないなら、その stable domain の個数は、1、2または、無限である。

Theorem 16 completely invariant stable domain は高々2つである。もし、2つあるならば、それらは単連結であり、それぞれ、$d-1$ 個の critical points を持つ。

3 No wandering domain theorem と Classification theorem

Definition 7 Vを fの stable domain とする。このとき、任意の自然数 $n, m (n \neq m)$ に対して、

$$f^n(V) \neq f^m(V)$$

が成り立つとき、Vを wandering domain と呼ぶ。また、ある自然数 p に対して、

$$f^p(V) = V$$

が成り立つとき、Vを periodic domain と呼ぶ。特に、$p = 1$ のとき、Vを fの fixdomain と呼ぶ。更に、ある自然数 qに対して、$f^q(V)$ が periodic domain になるが、Vは periodic domain でない時、preperiodic domain と呼ぶ。

次の Theorem 17は有理関数の力学系を考える上で、非常に重要である。

Theorem 17 (No wandering domain theorem [5, 6]) 次数が2以上の有理関数は wandering domain を持たない。

No wandering domain theorem によって、任意の stable domain Vは適当な iteration f^m で、ある periodic domain $W = f^m(V)$ に写される。従って、有理関数の力学系を見るには stable fixdomin を考えれば十分である。

Definition 8 Vを fの stable fixdomain とする。

(1) 列 (f^n) が$\overline{\mathrm{V}}$の固定点 a に V で局所一様収束する時、Vを Fatou domain と呼ぶ。そして、更に、

$$\left.\begin{array}{c}\text{super attracting basin}\\ \text{attracting basin}\\ \text{parabolic basin}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}a \in \mathrm{V}\text{かつ、a が super attracting}\\ a \in \mathrm{V}\text{かつ、a が attracting}\\ a \in \partial\mathrm{V}\text{かつ、}\lambda = 1\end{array}\right.$$

ここに、λは a の multiplier である。

(2) 列 (f^n) の V での全ての limit functions が定数にならない時、Vを rotation domain と呼ぶ。そして、更に、

$$\left.\begin{array}{c}\text{Siegel disc}\\ \text{Herman ring}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Vが単連結で indifferent fixpoint を含む。}\\ \text{Vが二重連結である。}\end{array}\right.$$

Theorem 18 (Classification Theorem [3]**)** fの任意の stable fixdomain は (super)attracting basin, parabolic basin, Siegel disc そして、Herman ring のいずれかである。

証明は Vを stable fixdomain として

i)Vで non − constant な limit function が存在する。
ii)Vでの全ての limit function が constant である。

の 2 つに分けて、それぞれ Fatou domain,rotation domain であることを示し、固定点、multiplier、連結度について調べる。

Theorem 19 (super)attracting, parabolic basin の各 cycle は、少なくとも、1 つ $\mathcal{C}_f$の点を含む。そして、各 basin は単連結であるか、または、無限連結である。

Theorem 20 ジュリア集合に含まれる任意の indifferent cycle は $\mathcal{C}^+$に含まれる。

Theorem 21 有理関数の Siegel disc 及び、Herman ring の境界は $\mathcal{C}^+$に含まれる。

Theorem 19, 20, 21から分かるように、critical point の挙動を見ることは非常に重要なことである。

Fatou は non-repelling な cycle の数の総和が高々 $4d-4$ 個であることを示した。また、Fatou domain の cycle の数の総和が高々 $2d-2$ 個であることが Theorem 19の critical point に関する事実から分かる。そして、各 cycle の数の総和に関する最良の評価が次の定理である。

Theorem 22 (Shishikura [2]**)** $n_{superattr}, n_{attr}, n_{Leau}, n_S, n_H, n_{Crem}$をそれぞれ super attracting cycle, attracting cycle,Leau cycle, Siegel cycle, Herman cycle,Cremer cycle の数とする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$n_{superattr} + n_{attr} + n_{Leau} + n_S + 2n_H + n_{Crem} \le 2(d-1)$$

$$n_H < d-1.$$

特に、2番目の不等式から、Herman ring は次数が3以上でなければ存在しないことが分かる。

Theorem 23 有理関数 f の全ての critical point が preperiodic で periodic でないとき、$F_f = \phi$ である。

Definition 9 関数 f に対して、$\mathcal{P}_f$ が有限集合のとき、f を critically finite と呼ぶ。また、$\mathcal{P}_f \cap J_f = \phi$ が成り立つとき、f を hyperbolic と呼ぶ。

Definition 10 関数 f が J 上で、expanding であるとは、ある $\delta > 0$ と $\kappa > 1$ が存在して、任意の自然数 n と任意の点 $z(\in J)$ に対して、

$$|(f^n)'(z)| \geq \delta\kappa^n$$

が成り立つことである。

Theorem 24 関数 f が hyperbolic であることと expanding であることは必要十分である。

参考文献

[1] Beardon,A.F., Iteration of rational functions, Springer., 1991.

[2] Shishikura,M., On the quasiconformal surgery of rational functions, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 20 (1987), 1-29.

[3] Steinmetz,N., On Sullivan's classification of periodic stable domains, Complex Variables 14 (1990), 211-214.

[4] Steinmetz,N., Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1993.

[5] Sullivan,D., Itération des fonctions analytiques complexes, C.R.Acad.Sci.Paris 294(1982),301-303.

[6] Sullivan,D., Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I:Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann.of Math.122(1985)401-418.