数理解析研究所講究録
959巻 1996年 110-111

2次方程式に対する Gauss-Seidel 型 Durand-Kerner 法

龍谷大学 理工学部 山岸 義和 (Yamagishi Yoshikazu)

一変数多項式 $p(x)$ の次数を d とするとき、方程式 $p(x)=0$ に対する Durand-Kerner 法は、$d+1$- 項の漸化式として次のように定義される：

$$x_{n+d}=x_n-\frac{p(x_n)}{\prod_{j=1}^{d}(x_n-x_{n+j})}.$$

$\gamma_1,\ldots,\gamma_d$ を $p(x)=0$ の distinct roots とするとき、$x_{md+j}=\gamma_j,\ 1\leq j\leq d$ は漸化式の安定な周期解であることが知られている [1]。

ここでは、$d=2$ の場合の 3- 項間の漸化式を、平面の有理写像

$$f:(x,y)\mapsto(y,x-p(x)/(x-y))$$

として考えたとき、その力学系が簡単に記述されることを報告する。

1 重根を持つ場合

てきとうな平行移動により、$p(x)=x^2$ としてよい。この場合は、変数変換 $(x,y)=(\xi,\xi/\eta)$ により、f は 写像

$$F:(\xi,\eta)\mapsto(\xi/\eta,(1-\eta)/\eta)$$

と共役である。ここで相空間は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ として扱うのが便利である。第二成分のメビウス変換の固定点は、二次方程式

$$\eta^2+\eta-1=0$$

の根であり、$\alpha=(-1+\sqrt{5})/2$ が不安定、$\beta=(-1-\sqrt{5})/2$ が安定である。$\beta<-1<0<\alpha<1$ に注意すれば、F の安定な固定点は $(0,\beta)$ で、その収束領域の境界は $\eta-\alpha\neq0$ および $\xi=\infty$ である。ほかに固定点は三点あって、$(0,\alpha)$ が不安定点、$(\infty,\alpha),(\infty,\beta)$ が鞍点である。

なお、F は双有理写像であり、不定点 $(0,0),(\infty,\infty)$ をもつことに注意する。

2 単根の場合

てきとうな平行移動により、$p(x) = x^2 - a^2$ としてよい。ただし a は定数。ここでも相空間を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とすると、変数変換

$$(x, y) = \left(a\frac{\xi+1}{\xi-1}, a\frac{\eta+1}{\eta-1} \right)$$

によって f は 写像

$$F : (\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi/\eta)$$

と共役である。ここで $\xi = e^\theta, \eta = e^\varphi$ とおくと、一次変換

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\varphi, \theta - \varphi)$$

を得る。この固有多項式

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

は、固有値 $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (-1 - \sqrt{5})/2$ をもつ。固有ベクトルはそれぞれ $(1, \alpha)$, $(1, \beta)$ である。

そこで あらためて、θ, φ を実部と虚部に分けて、$(\xi, \eta) = (re^{i\theta}, se^{i\varphi})$, $(0 \leq r, s \leq \infty, \theta, \varphi \in \mathbb{R})$ とおく。$s = r^\alpha$ のとき 軌道はトーラス $(\xi, \eta) = (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$, $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に近づき、それ以外のときは 二周期軌道 $(0, \infty) \leftrightarrow (\infty, 0)$ に収束することがわかる。

なお、F は双有理写像であり、不定点 $(0,0)$, (∞, ∞) をもつが、それらの軌道は

$$(0,0) \mapsto \xi = 0 \ (\text{直線}) \ \mapsto \eta = 0 \ (\text{直線}) \ \mapsto (0, \infty)$$

$$(\infty, \infty) \mapsto \xi = \infty \ (\text{直線}) \ \mapsto \eta = \infty \ (\text{直線}) \ \mapsto (\infty, 0)$$

と、周期軌道に落ちる。

参考文献

[1] T. Yamamoto, S. Kanno, and L. Atanassova, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method, in: J. Herzberger, ed., Topics in Validated Computations (North-Holland, Amsterdam, 1994) 27–53.