数理解析研究所講究録
959巻 1996年 7-33

複素力学系入門 II
TEICHMÜLLER 理論

須川 敏幸 (TOSHIYUKI SUGAWA)

京都大学大学院・理学研究科

1. 序

d 次の（複素係数）有理函数全体の集合 Rat_d は自然に複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2d+1}$ に埋め込まれるので（実際には、その像の補集合は超曲面をなしている）、自然に複素構造が入る。しかし、それぞれの元の力学系を考えるとき、それらの挙動はとてもではないが、この座標によって統一的に理解できるとは思えない。

そこで、ある有理函数を固定したときに、その有理函数の適当な函数のクラスによる共役類全体という変形空間を考えることが出来るが、このようなものの中でもっとも適当で考えやすく、しかもある種の普遍性を持つものとしてその Teichmüller 空間が考えられる。これは擬等角変形に限った空間であるが、その変形の度合いをベルトラミ微分を用いてパラメトライズすることにより、非常に扱いやすい対象となる。ここでは McMullen-Sullivan のプレプリント "Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics III: The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system" の 4 節～6 節に従って、この空間について解説するのが目的である。なお、このプレプリントであるが、（少なくとも現在のところ）カリフォルニア大学の McMullen 氏のホームページから取り出せるようになっているので、興味のある読者はぜひ読んで頂きたい。(http://math.berkeley.edu/~ctm/)

2 節では、非常に一般的な状況の下で Teichmüller 空間を定義する。3 節では "被覆関係" に関する Teichmüller 空間に絞ってより細かい構造について考察を加える。4 節では特に有理函数の Teichmüller 空間を考察し、その解析的構造を決定する。5 節では、"擬等角写像" が写像の解析的族を扱う上で、非常に自然に現れることを説明し、また安定性の様々な定義について触れておく。2,3,4 節ではプレプリントではあっさりと書いてある部分についてもしつこいくらい詳細な証明も加えたが、このノートでは Teichmüller 理論を主眼としているので 5 節では証明は割愛させて頂いた。興味のある読者は上記のプレプリント、または McMullen 自身による著書 "Complex Dynamics and Renormalization," Ann. of Math. Studies, Princeton, 1994. をご覧になって頂きたい。

なおこれは余談になるが、それぞれの Teichmüller 空間は自然に complex orbifold

$M = P_d/\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ に写像されるわけで、それらの像は M にある種の分割を与えるはずであるが、それがどのような分割になっているか位相的・組み合わせ的に詳しく解析することは力学系の分類を考える上で重要であると思われる。しかし、例えば2次多項式の場合に限っても非常に難しく、フラクタル的な様相が現れることが知られている。また、ある種のTeichmüller 空間については、その像が正則な埋め込みになっていない、つまり葉層のように埋め込まれるという状況も確認されているそうなので、事態はそう容易ではない。

また、ここで $\dim M = 2d-2$ であるが、この $2d-2$ という数字は d 次有理函数の分岐点の個数であり、generic にはこれらの分岐点の摂動が力学系の変形を決定づけていること (moduli 数) を示唆している。実際、Teichmüller 空間の次元を決定する上で、これらの分岐点の挙動が重要な寄与をしていることが3節においても理解されるであろう。

2. 正則力学系の TEICHMÜLLER 理論

ここではKlein 群や複素力学系の Teichmüller 理論を全て包含するような非常に一般的な形での Teichmüller 理論を McMullen-Sullivan に従って紹介する。あまりにも一般的なので、例えば複素構造が入るかどうかは一般には自明ではなく、さらにかなり変なものも取り込んでしまっているようである。(例えば、後に出てくる例を参照のこと。)

X を1次元複素多様体とする。(なお、ここでは1次元複素多様体と言えば、非連結であるものも含めて考え、Riemann 面と言った場合には連結なもののみを考えることにする。) また $\mathrm{End}(X), \mathrm{Aut}(X)$ はそれぞれ X の解析的自己写像半群、解析的自己同型群を表すこととする。

定義 2.1. 正則関係 (holomorphic relation)$R \subset X \times X$ とは $X \times X$ の1次元解析的集合の（高々）可算和とする。あるいは、次のように言ってもよい：ある1次元複素多様体 $\widetilde{R}$ と $\widetilde{R}$ の可算個の点を除いたところで単射な正則写像

$$\nu : \widetilde{R} \to X \times X$$

が存在して、$\nu(\widetilde{R}) = R$ が成り立つ。ここで、$\widetilde{R}$ は R の正規化と呼ばれる。

(CONVENTION) なお、定値写像は自明なものではあるが、他のものとまとめて扱うのが困難なので定値写像を排除するために、以下では正則関係と言った場合には $\{x\} \times U$ や $U \times \{x\}$ のような形の集合は含まないものと仮定する。

また、$X \times X$ の第1成分、第2成分への射影を π_1, π_2 として、正規化 ν に対して $\nu_j := \pi_j \circ \nu$ と書くことにする。すなわち、成分の形で表せば $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ となる。

R, S を X 上の正則関係とするとき、

$$R \circ S := \{(x,y) \in X \times X; (x,z) \in S, (z,y) \in R \text{ for some } z \in X\}$$
$$R^t := \{(x,y); (y,x) \in R\}$$

と定義し、それぞれを合成、転置と呼ぶことにする。これらは再びX上の正則関係となる。実際、転置については明らかで、合成については次のように実際に正規化を構成することにより分かる。$\nu:\widetilde{R}\to X\times X$及び$\lambda:\widetilde{S}\to X\times X$をそれぞれ$R,S$の正規化とすれば、

$$V:=\{(r,s)\in\widetilde{R}\times\widetilde{S};\nu_1(r)=\lambda_2(s)\}$$

とおけばこれは1次元解析的集合となるので、適当な正規化写像$\varphi:\widetilde{V}\to V$を取って$\lambda:=(\lambda_1\times\nu_2)\circ\varphi:\widetilde{V}\to X\times X$と定めれば、これが$R\circ S$の正規化となる。

また、写像$f:X\to X$が与えられた時、fのグラフを

$$\mathrm{graph}(f)=\{(x,f(x));x\in X\}$$

と定める。fが非定数正則函数ならばgraph(f)は正則関係である。$R=\mathrm{graph}(f),S=\mathrm{graph}(g)$とするとき、定義から$R\circ S=\mathrm{graph}(f\circ g),R^t=\mathrm{graph}(f^{-1})$となっていることが分かる。(実は、$R\circ S$のここでの定義は元々のMcMullen-Sullivanの定義とは順序が逆になっているのだが、これはこの性質を持たせるためである。元の定義に合わせるには、graph(f)の定義を逆にすればいいだけのことで、もちろん理論上本質的な差異はない。)

また、正則関係Rが与えられれば、R^nが定まるのでこれにより一つの力学系が得られることになる。これはもちろん一般には写像による力学系よりも広いクラスになっており、いわゆる対応(correspondence)の力学系を考えることになっている。

1次元正則力学系(holomorphic dynamical system)$(X,\mathcal{R})$とは、$\mathcal{R}$がX上の正則関係の(非可算個を許す)正則関係の族であることである。

注意 2.1. 正則関係と正則力学系とは実質的に同じものを考えているようにも思える。確かにほとんど同じと考えて良い場合も多いが、どちらで考えるかによって微妙に状況が違ってくることもある。例えばTeichmüller空間の定義のところなど、このような“2段構え”の構造に以下では注意して頂きたい。

例 2.1. $R=\emptyset$または$R=\mathrm{dg}(X):=\{(x,x);x\in X\}$とおけば、これは自明な正則関係となり、力学系$(X,\{R\})$は通常のTeichmüller空間を定義する際に用いられる。ただし、どちらがより“自然”なのかは筆者にもよく分からない。

例 2.2. ΓをEnd(X)の定値写像を含まない部分半群とする。この各元γに対して$R_\gamma=\mathrm{graph}(\gamma)$とおき、さらに$\mathcal{R}_\Gamma=\{R_\gamma;\gamma\in\Gamma\}$とすれば$(X,\mathcal{R}_\Gamma)$は$\Gamma$の力学系となり、これは以下では単に$(X,\Gamma)$と表記することにする。

注意 2.2. 上の例でΓが可算個の元からなるとき、正則関係自身を$R_\Gamma=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}R_\gamma$によって定義することも可能である。力学系$(X,\mathcal{R}_\Gamma)$と$(X,R_\Gamma)$とではさほど違わないようにも思えるが、以下で定義する変形空間などの定義が微妙に異なってくることに注意せよ。

例 2.3.

$$R=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*; z_2={z_1}^{\sqrt{2}}=\exp(\sqrt{2}\log z_1)\}$$

とすれば、これは正則関係である。Rの正規化は具体的に$\nu:\mathbb{C}\to R$:

$$\nu: z\to(e^z,e^{\sqrt{2}z})$$

によって与えられる。これは正則関係が局所閉でない例となっている。

$M(X)$をX上の（可測な）ベルトラミ微分$\mu=\mu(x)d\bar{z}/dz$のなす複素バナッハ空間とする。つまり、μは$(-1,1)$形式でありその絶対値$|\mu|$はX上の函数となるが、この sup ノルム$\|\mu\|_\infty=\mathrm{esssup}|\mu|$が有限なものである。ベルトラミ微分$\mu$が$R$-不変とは、$\nu=(\nu_1,\nu_2):\tilde{R}\to R$を正規化とするとき、$(-1,1)$形式としての引き戻しについて

$$(\nu_1)^*\mu=(\nu_2)^*\mu$$

が成り立つことであるとする。同値な言い方をすれば、双正則写像$h:U\to V$で$\mathrm{graph}(h)\subset R$を満たすものについて常に$h^*(\mu)=\mu$が成り立つ、ということである。(このようなグラフに含まれないような点があるかもしれないが、そのような点は高々可算個なので気にする必要はない。)

さらに、$\mathcal{R}$の各元RについてR-不変なX上のベルトラミ微分全体のなす集合を$M(X,\mathcal{R})$と書くと、これは$M(X)$の閉部分空間となり、従ってやはり複素バナッハ空間となる。また、その開単位球を$M_1(X,\mathcal{R})$と書くことにする。

ここで参考のためにベルトラミ微分と擬等角写像の関係について復習しておくことにしよう。まず$K\geq 1$を定数として$f:X\to Y$がK-擬等角写像というのは、向きを保つ同相写像であり（超函数の意味で）局所L^2微分をもち、それについてベルトラミ係数$\mu[f]:=\frac{f_{\bar{z}}d\bar{z}}{f_z dz}$が$\|\mu[f]\|_\infty\leq\frac{K-1}{K+1}$を満たすことである。これを満たす$K$の中で最小のものを$f$の最大変形率と呼び$K(f)$と表す。なお、Weyl の補題により等角写像は1-擬等角写像として特徴づけることが出来る。また、任意に$\mu\in M_1(X)$が与えられた時、これをベルトラミ係数として持つような擬等角写像が存在することもよく知られている。(可測 Riemann 写像定理 (measurable Riemann mapping theorem)) このようなものをμ-擬等角写像と呼ぶことにしておこう。

さらに$\phi:X'\to X,\psi:Y\to Y'$を等角写像とするとき、$\psi\circ f\circ\phi$のベルトラミ係数については

$$\mu[\psi\circ f\circ\phi]=\phi^*(\mu[f])$$

の関係があることに注意しておこう。これは形式的計算から直ちに分かる。特にベルトラミ係数は target の面の複素構造にのみ依存して決まることに注意しておこう。

また、逆に次の事実を知っておくことも有用である。$f:X\to Y,g:X\to Z$をともに擬等角写像として$\mu[f]=\mu[g]$であるとすれば、実は$g\circ f^{-1}:Y\to Z$は等角写像である。

これらの事実の多くは実は通常は Riemann 面の普遍被覆面を考えることにより証明される。さらに後に必要になるので、この周辺のことについても述べておこう。ま

ず X を Riemann 面として $\pi:\widetilde{X}\to X$ をその（正則）普遍被覆写像とする。(つまり、$\widetilde{X}$ は単連結 Riemann 面である。)　すると、Poincaré-Koebe の一意化定理により $\widetilde{X}$ は Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$、複素平面 $\mathbb{C}$ または上半平面 $\mathbb{H}$ のいずれか 1 つに等角同型であることが分かる。従って、最初から $\widetilde{X}$ はそのようなものを取っておいてよい。例えば、X から Y への擬等角写像というのも、このような標準的な面に持ち上げて考えれば平面の擬等角写像の話に帰着されるわけである。

Γ を $\pi:\widetilde{X}\to X$ の被覆変換群とする。すなわち、$\Gamma=\{\gamma\in \mathrm{Aut}(\widetilde{X});\pi\circ\gamma=\pi\}$ とする。すると Γ は $\widetilde{X}$ に自由に（つまり固定点を持たないように）不連続に作用し、その商が X と同一視される。つまり、もともと Riemann 面というのは $\widehat{\mathbb{C}},\mathbb{C},\mathbb{H}$ のいずれかをこのような群で割ったものとしても良いわけである。

$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ はつねに固定点を持つので、普遍被覆面が Riemann 球面であるような面は元々 Riemann 球面と等角同型なものしかない。$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の元で $\mathbb{C}$ に不動点を持たないものは平行移動しかないので、$\mathbb{C}$ を普遍被覆面に持つような Riemann 面は、$\mathbb{C},\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ そして複素トーラス（楕円曲線）しかないことが分かる。従って、これら以外の Riemann 面は全て上半平面 $\mathbb{H}$ を普遍被覆面に持つことが分かる。このような Riemann 面を双曲的 Riemann 面と呼ぶ。

X を双曲的 Riemann 面とし Γ を普遍被覆写像 $\pi:\mathbb{H}\to X$ の被覆変換群とする。すると Γ は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の離散部分群つまり (torsion-free な)Fuchs 群となる。この極限集合を $\Lambda(\Gamma)$ とする。つまり $\mathbb{H}$ の 1 点の軌道の極限集合とすると、これは $\widehat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ の閉部分集合となる。そこで $\partial X=(\widehat{\mathbb{R}}\setminus\Lambda(\Gamma))/\Gamma$ と定義しこれを X の理想境界と呼ぶ。これは X を $(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Lambda(\Gamma))/\Gamma$ に埋め込んだ時の境界と思ってもよい。(ちなみに、$\Lambda(\Gamma)=\widehat{\mathbb{R}}$ となるとき Fuchs 群 Γ は第 1 種であるといい、そうでないとき第 2 種であるという。)

なお、双曲的でない Riemann 面についてはその理想境界はつねに空集合と定めておき、一般に 1 次元複素多様体の理想境界と言う場合には各成分ごとに理想境界を取ったものを考えることにする。

次に $\omega:X\to X$ を擬等角写像とし、その $\mathbb{H}$ への持ち上げを $\tilde{\omega}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ とする。すると平面の擬等角写像論から $\tilde{\omega}$ は $\overline{\mathbb{H}}$ からそれ自身への同相写像に一意的に拡張出来ることが知られている。従って、持ち上げについて境界での値というものが意味を持つ。また、$\tilde{\omega}\Gamma\tilde{\omega}^{-1}=\Gamma$ であるから、$\tilde{\omega}$ は $\Lambda(\Gamma)$ を不変にする。従って、このことから ω は $X\cup\partial X$ からそれ自身への同相写像に自然に拡張出来ることが分かる。

次の定理は以下で非常に基本的になってくる。

定理 2.1 (Earle-McMullen). X を双曲的 *Riemann* 面とし $\omega:X\to X$ を擬等角写像とする。これについて以下の条件は互いに同値である。

(1) ω は持ち上げ $\tilde{\omega}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ で境界を各点ごとに固定するものを持つ。
(2) ω は理想境界を固定するホモトピーによって恒等写像に変形できる。

(3) ωは理想境界を固定する一様擬等角アイソトピーω_tにより恒等写像に変形出来る。ここに一様擬等角とは、ある定数$K < \infty$があって任意のtについてω_tがK-擬等角であることを言う。

また、さらにこの時一様擬等角アイソトピーは任意の$\gamma \in \mathrm{Aut}(X)$に対して$\omega_t \circ \gamma = \gamma \circ \omega_t$を満たすように取ることが出来る。

注意 2.3. この定理で最初の2つの条件の同値性は昔から知られていたが、3番目の強い条件とも同値であるということが重要な結果である。また、実はさらに一様擬等角アイソトピーの定義のKは$K(\omega)$にのみ依存するような量で上から評価出来ることもその証明から分かる。この定理の証明については"Holomorphic Functions and Moduli I"(Springer-Verlag: MSRI publications volume 10, 1988) という本の中の Earle-McMullen: "Quasiconformal isotopies"という論文を参照して頂きたい。

擬等角写像については他にも様々なことが知られているが、詳細については専門の教科書やまたは Teichmüller 空間の教科書などを参照して頂きたい。

定義 2.2. 写像$\phi : X \to Y$が正則力学系$(X, \mathcal{R}), (Y, \mathcal{S})$の間の共役であるとは、

$$\mathcal{S} = \{(\phi \times \phi)(R) : R \in \mathcal{R}\}$$

が成り立つことであるとする。

定義 2.3. $(X, \mathcal{R})$の変形空間$\mathrm{Def}(X, \mathcal{R})$とは正則力学系$(Y, \mathcal{S})$と擬等角共役写像$\phi : X \to Y$の組$(\phi, Y, \mathcal{S})$の強同値類全体である。ここで、$(\phi, Y, \mathcal{S})$と$(\psi, Z, \mathcal{T})$とが強同値であるとは、ある双正則写像$c : Y \to Z$が存在して$\psi = c \circ \phi$となることである。

命題 2.2. 写像$\phi \mapsto \mu[\phi] = \bar{\partial}\phi / \partial\phi$により$\mathrm{Def}(X, \mathcal{R})$と$M_1(X, \mathcal{R})$とは同一視できる。

Proof. 形式的な計算だけであるが、概念に慣れて頂くためにも一応証明を付けておくことにする。まず$R \in \mathcal{R}$として正則写像$h : U \to V$を$\mathrm{graph}(h) \subset R$となるようにとり、$g := \phi \circ h \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \phi(V)$とおけば、

$$\mathrm{graph}(g) = (\phi \times \phi)(\mathrm{graph}(h)) \subset S := (\phi \times \phi)(R) \in \mathcal{S}$$

であるからgは正則である。これを用いると、$g \circ \phi = \phi \circ h$より$h^*\mu[\phi] = \mu[\phi]$であることが分かる。よって確かに$\mu[\phi] \in M_1(X, \mathcal{R})$である。単射性は定義から直ちに分かる。全射性については、任意に$\mu \in M_1(X, \mathcal{R})$を取ってきた時に、$\mu$-擬等角写像$\phi : X \to Y$を作れば、$\mathcal{S} := \{(\phi \times \phi)(R); R \in \mathcal{R}\}$が$Y$上の正則力学系になっていることに注意すればよい。実際、$\nu : \tilde{R} \to R$を正規化とすれば仮定より$(\nu_j)^*\mu$は$j = 1, 2$によらないのでこれを$\tilde{\mu} \in M_1(\tilde{R})$として$\tilde{\mu}$-擬等角写像$\tilde{f} : \tilde{R} \to \tilde{S}$を作れば、次の図式を可換にするような写像$\lambda$が定まる。

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{R} & \xrightarrow{\nu} & X \times X \\
{\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi\times\phi} \\
\tilde{S} & \xrightarrow[\lambda]{} & Y \times Y
\end{array}
$$

従って、$S := (\phi \times \phi)(R)$ が Y 上の正則関係であることを示すためにはλが正則であることを言えばよい。

$$\mu[\lambda_j \circ \tilde{f}] = \mu[\phi \circ \nu_j] = \nu_j{}^*\mu[\phi] = \tilde{\mu} = \mu[\tilde{f}]$$

であるから、これでλの正則性が言えたことになる。 □

この命題により特にDef$(X, \mathcal{R})$ は複素 Banach 多様体の構造を持つことが分かる。変形空間の元で特に $(X, \mathcal{R})$ をそれ自身に写すもの $(\omega, X, \mathcal{R})$ 全体は合成により群をなすが、それを擬等角自己同型群と呼びQC$(X, \mathcal{R})$ と書く。これは

$$\omega \cdot (\phi, Y, \mathcal{S}) \mapsto (\phi \circ \omega^{-1}, Y, \mathcal{S})$$

によりDef$(X, \mathcal{R})$ に作用する。

さらに、QC$(X, \mathcal{R})$ の元ω で Xの理想境界∂Xを固定する一様擬等角アイソトピーω_tで条件

$$(\omega_t \times \omega_t)(R) = R \quad \text{for all } R \in \mathcal{R} \tag{2.1}$$

を満たすものにより恒等写像に変形できるようなもの全体をQC$_0(X, \mathcal{R})$ と書くことにすると、これは正規部分群になる。

注意 2.4. ここでもし$\mathcal{R}$が高々可算個の元から成る場合には条件(2.1) は$\omega_t \in QC(X, \mathcal{R})$ という、より弱い条件だけから出てくるが、そうでない場合にはやはりこの条件が必要になる。

$(X, \mathcal{R})$ の **Teichmüller 空間**Teich$(X, \mathcal{R})$ は商空間Def$(X, \mathcal{R})/$QC$_0(X, \mathcal{R})$ によって定義される。また、QC$_0(X, \mathcal{R})$ によって互いに移りあうDef$(X, \mathcal{R})$ の元はTeichmüller同値であると呼ばれ、この節においてのみ、$\sim$で表すことにする。すなわち $(\phi, Y, \mathcal{S})$, $(\psi, Z, \mathcal{T}) \in$ Def$(X, \mathcal{R})$ に対して $(\phi, Y, \mathcal{S}) \sim (\psi, Z, \mathcal{T})$ であるとは、ある等角な共役 $c : (Y, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{T})$ と$\omega \in$ QC$_0(X, \mathcal{R})$ が存在して

$$\psi = c \circ \phi \circ \omega$$

が成り立つことである。また、$(\phi, Y, \mathcal{S})$ の属する同値類をしばしば $[\phi, Y, \mathcal{S}]$ となどと表す。また恒等写像を含む同値類 $[\mathrm{id}_X, X, \mathcal{R}]$ はTeich$(X, \mathcal{R})$ の基点と呼ばれ、ここでは記号 O_X または $O_{(X,\mathcal{R})}$ で表すことにする。なお、Teichmüller 空間に複素構造が入るとすれば、標準射影Φ : Def$(X, \mathcal{R}) = M_1(X, \mathcal{R}) \to$ Teich$(X, \mathcal{R})$ が正則写像になるようなもののみを考えることとする。(このようなものは高々1 つしかない。)

例 2.4. $\mathcal{R}$ が自明の時は、$\mathrm{Teich}(X,\mathcal{R})$ は通常の Teichmüller 空間$\mathrm{Teich}(X)$ と一致する。(通常の Teichmüller 空間をご存知ない方は、これが定義と思って頂いて差し支えない。)

例 2.5. G をクライン群とする。つまり$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{M\ddot{o}b}$ の離散部分群とする。すると力学系 $(\widehat{\mathbb{C}}, G)$ の Teichmüller 空間$\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, G)$ は

$$M_1(\Lambda(G), G) \times \mathrm{Teich}(\Omega(G)/G)$$

と同型である。これは$\omega \in \mathrm{QC}_0(\widehat{\mathbb{C}}, G)$ がG の極限集合$\Lambda(G)$ の各点を固定することから分かる。これらは例えばKra やMaskit らによって詳細に調べられているので、興味のある読者は彼らの文献を見て頂きたい。

例 2.6. $f : X \to X$を非定数正則写像とする。この時 1 個の元 $R = \mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ からなる族を考えることが出来るが、この正則力学系を (X, f) と略記する。特にXが Riemann 球面の場合 fは有理函数となるが、これが次の節での主な研究対象となる。

Teichmüller 空間には次の Teichmüller 前距離 (Teichmüller pre-metric) が定義され、擬距離空間の構造を持つことが分かる:

$$\begin{aligned} d([\phi, Y, \mathcal{S}], [\psi, Z, \mathcal{T}]) &= \frac{1}{2} \inf_{\phi_1 \sim \phi, \psi_1 \sim \psi} \log K(\phi_1 \circ {\psi_1}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \inf_{\phi_1 \sim \phi} \log K(\phi_1 \circ \psi^{-1}) \end{aligned}$$

ただし、ここに汎函数Kは前にも述べた最大変形率 (maximal dilatation) である。

ここで Teichmüller 理論でよく用いられる基点の取り替えの議論を紹介しておこう。$(\phi, Y, \mathcal{S})$ を$\mathrm{Def}(X, \mathcal{R})$ の任意の点とする。このとき引き戻し写像$\phi^* : \mathrm{Def}(Y, \mathcal{S}) \to \mathrm{Def}(X, \mathcal{R})$ を

$$\phi^* : (\psi, Z, \mathcal{T}) \mapsto (\psi \circ \phi, Z, \mathcal{T}) \tag{2.2}$$

によって定義する。$\phi \mathrm{QC}_0(X, \mathcal{R}) \phi^{-1} = \mathrm{QC}_0(Y, \mathcal{S})$ に注意するとこの写像は自然に$\phi^* : \mathrm{Teich}(Y, \mathcal{S}) \to \mathrm{Teich}(X, \mathcal{R})$ を誘導することが分かる。この写像は$Q = [\phi, Y, \mathcal{S}] \in \mathrm{Teich}(X, \mathcal{R})$ の代表元ϕの選び方にはよらないので、単に$Q^* = \phi^*$と書くことにする。定義から明らかに$Q^*(O_Y) = Q$ である。このような写像を基点の取り替えと呼ぶことにする。基点の取り替えは明らかに Teichmüller 前距離を保つ写像である。また、

引き戻しの定義式(2.2) を $M_1(X,\mathcal{R})$ の方で眺めれば（かけ算は正式にはテンソル積の意味だが適当に解釈して頂きたい)、

$$\phi^*(\mu) = \frac{\mu[\phi] + (\mu \circ \phi)\overline{\phi_z}/\phi_z}{1 + \bar{\mu}[\phi](\mu \circ \phi)\overline{\phi_z}/\phi_z}$$

であるので、これは $M_1(Y,\mathcal{S})$ から $M_1(X,\mathcal{R})$ への正則写像になっている。従って、それぞれの Teichmüller 空間が自然な複素構造を持てば、基点の取り替えはその複素構造に関して双正則写像になっていることが分かる。

この Teichmüller 前距離は一般には距離になるとは限らないが、通常考えたい正則力学系については実際に距離になる。次の定理が距離になるための十分条件を与えてくれる。その前に一つ定義を述べておく。

定義 2.4. $(X,\mathcal{R})$ を正則力学系とする。Sを $\mathcal{R}$ の元の合成及び転置によって生成される半群のある元（従って $X\times X$の 1 次元解析的集合の高々可算和）の既約成分とする。このとき、Sは $\mathcal{R}$ の全力学系 (full dynamics) に属すると呼ぶ。また、さらに対角集合との共通部分 $S\cap \mathrm{dg}(X)$ が高々可算であるとき、$(x,x)\in S\cap \mathrm{dg}(X)$ なる点 $x\in X$を Sの固定点または $\mathcal{R}$ の周期点であると呼ぶ。

定理 2.3. $(X,\mathcal{R})$ を 1 次元正則力学系とする。Xの$\widehat{\mathbb{C}},\mathbb{C},\mathbb{C}^*$, 複素トーラスに等角同値な各成分が少なくともそれぞれ $3,2,1,1$ 個の $\mathcal{R}$ の周期点を持つとすれば、この力学系の *Teichmüller* 前距離は実際に距離になる。

Proof. 基点の取り替えにより $d(O_X,[\psi,Y,\mathcal{S}])=0$ として$\psi\sim \mathrm{id}_X$を示せばよい。Teichmüller 前距離の定義からある擬等角共役の列$\psi_n : X\to Y$で

$$\phi_n := \psi^{-1}\circ\psi_n \in \mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R}), \text{かつ} \quad K(\psi_n)\to 1 \quad (n\to\infty)$$

となるものが存在する。特に $K(\phi_n)$ は有界であることに注意しておこう。そこでこのϕ_nから広義一様収束する部分列ϕ_{n_j}が取れることが言えればよい。実際、もしこのような列が取れれば、その極限をϕ_∞としてさらに$\psi_\infty := \psi\circ\phi_\infty$とおけば最大変形率の下半連続性から

$$K(\psi_\infty) = K(\psi\circ\phi_\infty) \le \underline{\lim}_{\,j\to\infty} K(\psi\circ\phi_{n_j}) = \underline{\lim}_{\,j\to\infty} K(\psi_{n_j}) = 1$$

である。従ってψ_∞は等角写像で従ってid_Xと強同値であり、$\phi_\infty\in \mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R})$ より $\psi_\infty\sim\psi$であるから$\psi\sim \mathrm{id}_X$であることが証明されることになる。

あと示すべきことはϕ_nの正規性のみである。まず、Xの双曲的な成分の上では問題ない。(例えば単位円板を普遍被覆面として、境界を固定するそこへの持ち上げを考えればよい。)

そこで以下では双曲的でない成分について考える。Sを $\mathcal{R}$ の全力学系に属する既約成分としよう。この時任意の$\phi\in \mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R})$ に対して $(\phi\times\phi)(S\cap \mathrm{dg}(X)) = S\cap \mathrm{dg}(X)$ であるから、この集合が高々可算であるとすれば、ϕはこれらの点を置換するだけである。従って、特にϕがアイソトピーϕ_tで恒等写像に変形出来るとすれば、実際には

点を動かすことは出来ない。従ってϕは$S\cap \mathrm{dg}(X)$の各点を固定することが分かる。故にこの定理の仮定のもとでは、指定された個数だけの点がϕ_nによって固定されるので最初からそれらの点を抜いて考えれば事実上双曲的な面の上での話に帰着出来る。(考えていたアイソトピーはやはりそれらの抜いた点を固定するようなアイソトピーになっていることに注意せよ。) □

この定理の仮定の下で、$\mathrm{Mod}(X,\mathcal{R}) = \mathrm{QC}(X,\mathcal{R})/\mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R})$を(Teichmüller) modular群と呼び、$(X,\mathcal{R})$のTeichmüller空間に等距離写像として作用する。ここで$\mathrm{Aut}(X,\mathcal{R}) = \mathrm{Aut}(X)\cap \mathrm{QC}(X,\mathcal{R})$とすると$\mathrm{Aut}(X,\mathcal{R})\cap \mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R}) = 1$であるから、基点$O_X$の固定群は$\mathrm{Aut}(X,\mathcal{R})/\mathrm{Aut}(X,\mathcal{R})\cap \mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R}) = \mathrm{Aut}(X,\mathcal{R})$となることに注意しておこう。

例 2.7. Teichmüller前距離が距離にならない例

有界Lipschitz函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$に対して領域$U_f\subset\mathbb{C}$を

$$U_f = \{z = x+iy; y > f(x)\}$$

により定める。そのようなf, gに対してshear mapping

$$\phi_{f,g}(x+iy) := x + i(y - f(x) + g(x))$$

とすれば$\phi_{f,g}(U_f) = U_g$であり、$\phi_{f,g}:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$は擬等角写像で

$$\|\mu[\phi_{f,g}]\|_\infty \leq \frac{\|f-g\|_{\Lambda^1}}{\sqrt{4+\|f-g\|_{\Lambda^1}^2}}$$

を満たす。ただし、ここに$\|\cdot\|_{\Lambda^1}$はLipschitzセミノルムを表す。実際、これには$y > f(x) \Leftrightarrow y - f(x) + g(x) > g(x)$と、$\phi_{\bar z}/\phi_z = \frac{i(g'-f')}{2+i(g'-f')}$に注意すればよい。

そこで、$\mathcal{R}_f$を$R_f = \mathrm{graph}(\mathrm{id}_{U_f}) = \{(x,x); x\in U_f\}$のみからなるものとして$(\mathbb{C},\mathcal{R}_f)$, $(\mathbb{C},\mathcal{R}_g)$を考える。すると$\phi_{f,g}$は$(\mathbb{C},\mathcal{R}_f)$を$(\mathbb{C},\mathcal{R}_g)$に写す共役であるので、有界Lipschitz函数$g$は$\mathrm{Def}(\mathbb{C},\mathcal{R}_f)$の元$\phi_{f,g}$を定める。そこで$\phi_{f,g}$を出発する次のようなアイソトピーを考える。

$$\psi_t(x+iy) = x + t + i(y - f(x) + g(x+t)) \quad (0\leq t).$$

今次の条件を満たすf, g及び数列$c_n\to\infty$があったとしよう。

(1) $\|f(x) - g(x+c_n)\|_{\Lambda^1}\to 0 \quad (n\to\infty)$

(2) 任意の定数$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}(\beta>0)$に対して$f(x)\not\equiv \alpha + g(\beta x+\gamma)$が成り立つ。

まず条件(1)から$K(\psi_{c_n})\to 1$が分かり、よって$d(O_{\mathbb{C}},[\phi_{f,g}]) = 0$であることが分かる。また、条件(2)からは$[\phi_{f,g}]$が基点$[\mathrm{id}_{\mathbb{C}}]$と異なる点であることが分かる。実際、もし$[\phi_{f,g}]$が基点と同じであるとすれば、ある等角写像$c:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$で$c\circ\phi_{f,g}\in \mathrm{QC}_0(\mathbb{C},\mathcal{R}_f)$となるものが存在する。特に$(c\circ\phi_{f,g})\times(c\circ\phi_{f,g})(\mathrm{graph}(\mathrm{id}_{U_f})) = \mathrm{graph}(\mathrm{id}_{U_f})$であるから、これより$c(U_g) = U_f$であることが分かる。ここで$c(z) = az + b$であるとすれ

ばf,gが有界であったから（有界性はここで初めて使う！）、$a>0$でなければならない。さて$b=s+it$とすれば、

$$\begin{aligned} y>g(x) &\Leftrightarrow x+iy\in U_g \Leftrightarrow c(x+iy)\in U_f \\ &\Leftrightarrow ax+s+i(y+t)\in U_f \Leftrightarrow y+t>f(ax+s) \end{aligned}$$

である。これより$g(x)\equiv f(ax+s)-t$であることが分かり、これは性質(2)に反することになる。

では、実際にこのような性質を持つf,gを構成してみよう。$d(x)=\mathrm{dist}(x,\mathbb{Z})$とし、$h(x)=\max(0,\frac{1}{10}-d(x))$とおく。すると$h$は周期1の周期函数であることに注意せよ。$p_1,p_2,\cdots$を3以上の素数の増大列として$P=\{p_1,p_2,\cdots\}$としておこう。さらに$p\in P$に対して整数$a_p$を$0<a_p<p/2$かつ$a_p\to\infty$となるように取っておく。そこで、

$$f(x)=\sum_{p\in P}2^{-p}h\left(\frac{x}{p}\right)$$

$$g(x)=\sum_{p\in P}2^{-p}h\left(\frac{x+a_p}{p}\right)$$

と定める。すると、Chinese Remainder Theorem により任意の自然数nに対してある整数c_nで$c_n>n$かつ

$$c_n\equiv -a_p \mod p$$

が任意の$p\leq p_n$なる$p\in P$について成り立つように出来る。すると

$$f(x)-g(x+c_n)=\sum_{p>p_n}2^{-p}\left[h\left(\frac{x}{p}\right)-h\left(\frac{x+a_p}{p}\right)\right]$$

となるから$\|f(x)-g(x+c_n)\|_{\Lambda^1}\to 0$であることが分かる。よって(1)が成り立つことが分かった。次に2を示そう。もしある定数があって$f(x)\equiv\alpha+g(\beta x+\gamma)$となったとする。まず$\sup f=\sup g$より$\alpha=0$でなければならないことが分かる。さらに、sup の値を取る$x\in\mathbb{R}$がfの場合には存在するのに対し、gの場合には存在しない。よって、このような定数β,γは存在し得ない。

3. PSL$(2,\mathbb{R})$の閉部分群の TEICHMÜLLER 空間

この節では次の節で述べる有理函数の Teichmüller 空間の構造決定の重要な部分を占める基本的事項について説明する。まず最初に考えるのは、Herman 環の力学系の Teichmüller 空間のモデルとなる次の力学系である。

まず、Xをモジュラス有限な円環領域（２重連結領域）とし、$\mathrm{Aut}_0(X)$をXの解析的自己同型群$\mathrm{Aut}(X)$の単位元を含む連結成分とする。すなわち、これは回転全体と同一視できる。ここで示したいのは次の定理である。

定理 3.1. Xをモジュラス有限な円環領域とするとTeich$(X, \mathrm{Aut}_0(X))$には上半平面$\mathbb{H}$に同型な自然な複素構造が入り、それに対して標準射影$\mathrm{Def}(X, \mathrm{Aut}_0(X)) \to \mathrm{Teich}(X, \mathrm{Aut}_0(X))$が大域的な切断を持つような正則しずめ込みとなる。また、*modular*群については

$$\mathrm{Mod}(X, \mathrm{Aut}_0(X)) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$$

となる。

Proof. モジュラス有限な円環領域は常に、ある$R \in (1, \infty)$に対して$A(R) := \{z; 1 < |z| < R\}$と同型なので、最初からこれを$X$と思ってよい。すると$\mathrm{Aut}_0(X)$は単に原点中心の回転群となり、以下ではこれを$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$と同一視する。(つまり、$S^1 \subset$ Möb とみなす。) 最初に$\gamma(z) = Rz$とすれば、$A(R)$は Klein 群$\Gamma = \langle \gamma \rangle$の基本領域となっていることに注意しておく。また、Möb の部分群S^1とΓは互いに可換となり、従ってこれらによって生成される群はその直積$S^1 \times \Gamma$になっていることにも注意しておこう。

まず$\mu \in M_1(A(R), S^1) \cong \mathrm{Def}(A(R), S^1)$とする。これをさらに$\Gamma$不変となるように$\mathbb{C}$上のベルトラミ係数$\tilde{\mu}$に拡張しておく（拡張は一意的である)。すると可測 Riemann 写像定理により$\widehat{\mathbb{C}}$の$0, 1, \infty$を固定する擬等角写像でベルトラミ係数$\tilde{\mu}$を持つものが一意的に存在する。従って、それを$w^\mu : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$と書くことにしよう。このとき、よく知られているようにたとえば任意に1点$z \in \mathbb{C}$を固定すると$\mu \to w^\mu(z)$は正則写像になることに注意しておこう。

さて、ベルトラミ微分の不変性から任意の$f \in S^1$に対して$\chi(f) = w^\mu \circ f \circ (w^\mu)^{-1}$とおけば、$\chi(f) \in$ Möb となり、さらに擬等角写像による共役は楕円型変換という性質を保つということと、$\chi(f)$が$0, \infty$を固定することに注意すれば、実は$\chi : S^1 \to S^1$であり、これは連続な単射準同型になっていることが分かる。χは有限位数の元を同じ位数の元に写すことと、w^μが向きを保つ写像であったことに注意すると、容易にχが恒等写像でなければならないことが分かる。すなわち、w^μは任意の原点中心の回転と可換になっていることが分かる。このことからさらに、w^μは原点を中心とする同心円に制限すればそれを同様の同心円にアファインに写す写像と等しいことが分かる。さらにw^μは1を固定していたのだから、特に単位円周上では恒等写像となっている。

さて、ここで円環$A(R)$の普遍被覆写像を考えよう。ここでは$\tilde{A}(R) = \{z \in C; 0 < \mathrm{Im} z < \log R\}$として$p(z) = e^{-iz}$を採用することにする。この$p : \tilde{A}(R) \to A(R)$はもっと大域的に定義された普遍被覆写像$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$の制限になっていることに注意しておこう。この$p$に関する$w^\mu$の持ち上げ$\tilde{w}^\mu$で0を固定するもの（これは一意的に定まる）を取っておく。そこで、$\tau = \tau(\mu) = \tilde{w}^\mu(i \log R)$と置くと、上記の注意から写像$\tau : M_1(A(R), S^1) \to \mathbb{H}$は正則写像となるが、実はこれについて

$$\mu_1 \sim \mu_2 \quad (\text{Teichmüller 同値}) \Leftrightarrow \tau(\mu_1) = \tau(\mu_2)$$

であることが分かる。これは、$\mathrm{Def}(A(R), S^1)$を割る空間である$\mathrm{QC}_0(A(R), S^1)$が定理2.1と先の考察によって$\{w^\mu; \mu \in M_1(A(R), S^1), \tau(\mu) = i \log R\}$に一致することが

分かるからである。よってこの写像τによって

$$\mathrm{Teich}(A(R),S^1)=M_1(A(R),S^1)/\mathrm{QC}_0(A(R),S^1)\xrightarrow{\cong}\mathbb{H}$$

が誘導され、これより標準射影が正則となり $\mathbb{H}$ と同型な複素構造が$\mathrm{Teich}(A(R),S^1)$ に入ることが分かる。これが全射であり正則な大域切断を持つことは、実際に写像 $s:\mathbb{H}\to M_1(A(R),S^1)$ を

$$s:\tau\mapsto\frac{\tau-i}{\tau+i}\cdot\frac{wd\bar{w}}{\bar{w}dw}\tag{3.1}$$

によって定めればこれがその例になっていることから容易に分かる。(実は、$\tilde{w}^{s(\tau)}(x+iy\log R)=x+y\tau\log R$となっている。)

次にmodular群について考えてみよう。まず$\mathrm{QC}(A(R),S^1)$ の恒等写像を含む連結成分を$\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)$ と書くことにする。つまり、これらは$A(R)$ の境界成分を保つような指数2の部分群である。このことからまず、

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(A(R),S^1)&\cong\mathrm{QC}(A(R),S^1)/\mathrm{QC}_0(A(R),S^1)\\&\cong\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)/\mathrm{QC}_0(A(R),S^1)\rtimes\mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

が得られる。そこで次に$\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)/\mathrm{QC}_0(A(R),S^1)$ の構造について調べてみよう。まず写像$\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)$ について考える。ここに$(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ のϕによる像$\phi_{a,b}$は普遍被覆面$\tilde{A}(R)$ の擬等角写像

$$\tilde{\phi}_{a,b}(x+iy\log R):=x+a+by+iy\log R\tag{3.2}$$

により誘導された写像として定義する。すると単純計算によりこの写像は準同型であることが分かる。そこでさらにこの写像と標準射影との合成$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)\to\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)/\mathrm{QC}_0(A(R),S^1)$ は全射であり、その核は$2\pi\mathbb{Z}\times 0$ であることも容易に分かる。従って準同型定理により

$$\mathrm{QC}^+(A(R),S^1)/\mathrm{QC}_0(A(R),S^1)\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$$

であることが言え、これより定理の主張が従う。 □

実は$\mathrm{Teich}(X,\mathrm{Aut}(X))$ についても全く同様な次の結果が得られる。

定理 3.2. Xをモジュラス有限な円環領域とすると$\mathrm{Teich}(X,\mathrm{Aut}(X))$ には上半平面$\mathbb{H}$ に同型な自然な複素構造が入り、それに対して標準射影$\mathrm{Def}(X,\mathrm{Aut}(X))\to\mathrm{Teich}(X,\mathrm{Aut}(X))$ が大域的な切断を持つような正則しずめ込みとなる。また、*modular*群については

$$\mathrm{Mod}(X,\mathrm{Aut}(X))\cong(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}_2$$

となる

Proof. 先と同様に$X = A(R)$としてよい。すると$\mathrm{Aut}(X)$は、$j(z) = R/z$としてS^1と$\langle j \rangle \cong \mathbb{Z}_2$の半直積となる。定義から

$$\mathrm{Def}(X, \mathrm{Aut}(X)) \subset \mathrm{Def}(X, \mathrm{Aut}_0(X))$$
$$\mathrm{QC}_0(X, \mathrm{Aut}(X)) \subset \mathrm{QC}_0(X, \mathrm{Aut}_0(X))$$

であるが、実は

$$\mathrm{Def}(X, \mathrm{Aut}(X)) \cap \mathrm{QC}_0(X, \mathrm{Aut}_0(X)) = \mathrm{QC}_0(X, \mathrm{Aut}(X))$$

となっていることが分かる。実際、右辺が左辺に含まれることは明らかだから、左辺が右辺に含まれることを言えばよい。つまりωを左辺に含まれる元として$\omega \circ j = j \circ \omega$であることが言えればよい。

$j_1 = \omega \circ j \circ \omega^{-1}$とおけば仮定より$j_1 \in \mathrm{Aut}(X)$であるが、境界成分を保たないので$j_1 \in \mathrm{Aut}(X) \setminus \mathrm{Aut}_0(X)$である。従って特に$j_1(z) = \alpha R/z \quad (|\alpha| = 1)$と書けることが分かる。一方、$\omega$は境界の各点を固定するのだから特に$\omega(1) = 1, \omega(R) = R$である。このことから、

$$j_1(1) = \alpha R = \omega(j(\omega^{-1}(1))) = R$$

であり、特に$\alpha = 1$であることが分かる。これはωとjの可換性を意味する。

さて、商空間を考えれば、このことから自然に

$$\mathrm{Teich}(X, \mathrm{Aut}(X)) \hookrightarrow \mathrm{Teich}(X, \mathrm{Aut}_0(X))$$

と考えることができる。同様の考察により

$$\mathrm{Mod}(X, \mathrm{Aut}(X)) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(X, \mathrm{Aut}_0(X))$$

であることも分かる。実はこれらの包含写像は全射になっていることが言え、従って定理の主張が示される。それには、(3.1) や(3.2) で与えた写像の像が実は$\mathrm{Aut}(X)$に対応する空間の方に入っていることが分かれば十分であるが、それは簡単に確認できる。実際、これらの像は（Xの上の函数とみて）直接計算から$c \cdot \overline{(dw/w)}/(dw/w)$（ただし$c$は定数）の形のベルトラミ係数を持つことが分かり、$j^*(dw/w) = -dw/w$であることに注意すれば$\overline{(dw/w)}/(dw/w)$は$j$-不変なベルトラミ微分であることが分かるので、このことが確認できる。 □

さて、一般の正則関係ではクラスが広すぎて分からないことも多いので、以下では“被覆関係”（あまりよくない用語だが、とりあえずここではこのように訳しておく）という関係のみを扱うことにする。（ただ、このクラスに絞ることは、例えば整函数の力学系を考えるにあたってはやや問題があるかもしれない。）

定義 3.1. Xを Riemann 面、$\pi : \widetilde{X} \to X$を正規被覆写像とする。関係$R \subset X \times X$が被覆$\pi$に関する**被覆関係** (covering relation) であるとは、ある$\mathrm{Aut}(\widetilde{X})$の元$\gamma$があって、$R = (\pi \times \pi)(\mathrm{graph}(\gamma))$となることである。特に$\pi$が普遍被覆の場合には「被覆$\pi$に関する」という修飾詞は付けないことにする。

例 3.1. $f : X \to Y$を被覆写像として$R = \{(x, x') \in X \times X; f(x) = f(x')\}$とすれば、これは被覆関係の disjoint union である。

例 3.2. 例2.3は被覆関係である。

被覆関係については次の定理が成り立つ。

定理 3.3. $\mathcal{R}$ を *Riemann* 面 X上の被覆$\pi : \widetilde{X} \to X$に関する被覆関係の族とし、$\Gamma$を$\pi$の被覆変換群$\Gamma_0$と $\mathcal{R}$ の元の持ち上げに対応する$\mathrm{Aut}(\widetilde{X})$ の元全体により生成された$\mathrm{Aut}(\widetilde{X})$ の部分群Γ'の閉包であるとすると、自然に

$$\mathrm{Teich}(X, \mathcal{R}) \cong \mathrm{Teich}(\widetilde{X}, \Gamma)$$

となる。

Proof. この定理の証明には次の補題にまず注意しておく必要がある。

補題 3.4. Γ'を$\mathrm{Aut}(X)$ の部分群（あるいはより一般に部分集合）としてΓをその（あるいはΓ'で生成された部分群の）閉包とすると、自然に

$$\mathrm{Teich}(X, \Gamma') = \mathrm{Teich}(X, \Gamma)$$

となる。

これは例えば、$\mathrm{Def}(X, \Gamma') = \mathrm{Def}(X, \Gamma)$ であることなどから簡単に分かる。この補題より定理3.3を示すにはΓの代わりにΓ'として証明すればよいことが分かる。そこで今度は変形空間の代わりにベルトラミ係数の空間を考える。まず形式的計算により容易に分かるようにπによる引き戻し

$$\pi^* : M_1(X, \mathcal{R}) \to M_1(\widetilde{X}, \Gamma')$$

がノルムを保つ同型写像となる。よって、あとはこの写像が$\mathrm{QC}_0(X, \mathcal{R})$ を$\mathrm{QC}_0(\widetilde{X}, \Gamma')$に全単射に写すということだけチェックできればよい。これは一般には被覆関係が局所閉ではないことや、その正規化写像が単射ではないことなどから少し厄介であるが、例えば次のようにすればよいであろう。

まず$R \in \mathcal{R}$ とすれば仮定よりある$\gamma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X})$ が存在して $R = \mathrm{graph}(\gamma)$ となる。このとき、任意の$\omega \in \mathrm{QC}_0(X, R)$ に対してω_tを恒等写像と結ぶ一様擬等角アイソトピーとして$\tilde{\omega}_t$を理想境界を止めるような$\widetilde{X}$へのω_tの持ち上げとする。このとき、$\tilde{\omega}_t \circ \gamma = \gamma \circ \tilde{\omega}_t$すなわち$(\tilde{\omega}_t \times \tilde{\omega}_t)(\mathrm{graph}(\gamma)) = \mathrm{graph}(\gamma)$ が示せればよい。$\gamma_t = \tilde{\omega}_t \circ \gamma \circ \tilde{\omega}_t^{-1}$とおくことにする。するとまず

$$\begin{aligned}(\pi \times \pi)(\mathrm{graph}(\gamma_t)) &= (\pi \times \pi) \circ (\tilde{\omega}_t \times \tilde{\omega}_t)(\mathrm{graph}(\gamma)) = (\omega_t \times \omega_t) \circ (\pi \times \pi)(\mathrm{graph}(\gamma)) \\ &= (\omega_t \times \omega_t)(R) = R = (\pi \times \pi)(\mathrm{graph}(\gamma))\end{aligned}$$

であることに注意しておく。すると任意のXの単連結部分領域Uとそこからのπの正則切断$s : U \to \widetilde{U}$を考えた時、

$$(\pi \times \pi)(\mathrm{graph}(\gamma_t)) \cap (U \times X) = (\pi \times \pi)(\mathrm{graph}(\gamma)) \cap (U \times X) = \bigcup_{\delta \in \Gamma_0} \mathrm{graph}(\pi \circ \gamma \circ \delta \circ s)$$

となるから、特に

$$\mathrm{graph}(\pi \circ \gamma_t \circ s) \subset \bigcup_{\delta \in \Gamma_0} \mathrm{graph}(\pi \circ \gamma \circ \delta \circ s)$$

であることが分かる。この右辺は（交わりを持つかもしれないが）高々可算個のグラフの和集合であり、左辺はtについて連続に動くのだから、実際には最初からずっと同じグラフに含まれ続けていなければならない。従って特に任意のtについて

$$\mathrm{graph}(\pi \circ \gamma_t \circ s) = \mathrm{graph}(\pi \circ \gamma \circ s)$$

であることが分かるが、これは$\pi \circ \gamma_t \circ s = \pi \circ \gamma \circ s$が$U$上で成り立つことを意味し、従って特に$\pi \circ \gamma_t = \pi \circ \gamma$が$\widetilde{U}$上で成り立つことが分かる。これよりさらに各$t$についてある$\delta_t \in \Gamma_0$が存在して$\gamma_t = \delta_t \circ \gamma$であることが分かるが、$\delta_t$も連続に動いていなければいけないが、$\Gamma_0$は離散群であったから実は動きようがない。従って$\delta_t = \mathrm{id}$すなわち$\gamma_t = \gamma$が$\widetilde{U}$上で成り立つことが証明できた。$\widetilde{U}$の任意性からこれで主張が言えたことになる。 □

さて、Riemann 面Xに対して普遍被覆を考えれば、ほとんどの場合は普遍被覆面として上半平面$\mathbb{H}$が取れるわけだから、応用上は$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$の閉部分群$\Gamma$に対する Teichmüller 空間$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma)$の構造を決定することが重要となる。そこで、まずその前に$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$の閉部分群の構造を決定することから始めよう。

まずΓを$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$の閉部分群とする。$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$は Lie 群だからΓもその閉部分群ということでやはり Lie 群となる。そこでΓの次元について場合分けすればよいことになる。すると次のような分類定理が得られる。

定理 3.5 (PSL(2, ℝ) の閉部分群の分類定理). Γを$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$の閉部分群とする。

(1) $\dim\Gamma = 0$の時、Γは（一般には *torsion* を持つ）*Fuchs* 群、つまり離散部分群である。

(2) $\dim\Gamma = 1$の時、Γは双曲型変換、放物型変換、楕円型変換のいずれかからなる（可換な）1 パラメータ族であるか、または双曲型変換からなる 1 パラメータ族の（2 個の固定点を交換する位数 2 の楕円型変換による非可換な）$\mathbb{Z}_2$-拡張である。

(3) $\dim\Gamma = 2$の時、Γは向きを保つ実 1 次元 *affine* 変換群$\mathrm{Aff}^+(1,\mathbb{R})$に共役である。別の言い方をすれば$\infty$の固定群、つまり$z \mapsto az + b \quad (a > 0, b \in \mathbb{R})$の形の元からなる部分群に共役である。

(4) $\dim\Gamma = 3$の時、$\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$である。

Proof. 本筋とは離れるので詳しくは述べる余裕がないが、適当な参考書も知らないので証明の方針だけ述べておこう。まず 0,3 次元の場合は自明であろう。1 次元の場合はΓ_0を恒等写像を含むΓの連結成分とすれば、exponential map を考えればこれが可換な 1 パラメータ族であることは分かる。後は双曲的、放物的、楕円的の場合に分けて考えればよい。2 次元の場合が少し厄介であるように思われるが、次のようにすればよかろう。Γのすべての元が$\mathbb{H}$の境界上のある 1 点を固定することを言えばいいので、そうでないと仮定する。するとΓは必ず双曲型変換を含まなければけないので（generic に

は元は双曲型でなければならない)、例えば1パラメータ族$\Gamma_1 = \{z \mapsto tz; t > 0\}$を部分群として含むとしてよい。($\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$が普遍被覆写像となっていることに注意せよ。) すると、仮定よりΓは2次元なのだから、両方の固定点をΓ_1の固定点である$0, \infty$以外に持つような双曲型の1パラメータ族Γ_2がある。それは$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$の中で$\Gamma_1$と共役なので、ある$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$に対して$\Gamma_2 = A\Gamma_1 A^{-1}$と書ける。取り方から、$abcd \neq 0$であることに注意しておこう。そこで行列表示を考えて$t > 0$に対して$H(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$とおき、次の写像

$$(s,t,u) \mapsto H(s)AH(t)A^{-1}H(u)$$

を考えれば、この像の行列の表す変換はΓに入っているはずであるが、一方この写像は$t \neq 1$において階数が3となっていることが分かる。これは次元の仮定に反する。 □

準備が整ったところで、$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$の閉部分群$\Gamma$に対する$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma)$の構造定理を述べることにしよう。

定理 3.6. Γを$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$の閉部分群とする。

(1) Γが離散的なとき、$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma)$は*Riemann*面(一般には*orbifold*)の*Teichmüller*空間$\mathrm{Teich}(\mathbb{H}/\Gamma)$と自然に同型である。
(2) Γが1次元で、ある双曲直線を保つとき、$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma) \cong \mathbb{H}$.
(3) それ以外の場合は$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma)$は1点につぶれる。

Proof. (a)は古典的である。(b)の場合を考える。Γ_0をΓの単位元を含む連結成分とする。すると、これは閉部分群の分類定理と仮定によりこれは双曲的1パラメータ族である。単位元以外の元$\gamma_0 \in \Gamma$をとれば$\mathbb{H}/\langle\gamma_0\rangle$はある円環領域$A(R)$に等角同値であり、$\Gamma_0$の作用は$\mathrm{Aut}_0(A(R)) \cong S^1$の作用として残る。ゆえに定理3.1から$\Gamma = \Gamma_0$の場合には

$$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma) \cong \mathrm{Teich}(\mathbb{H}/\langle\gamma_0\rangle, \Gamma_0/\langle\gamma_0\rangle) \cong \mathrm{Teich}(A(R), S^1) \cong \mathbb{H}$$

となる。$\Gamma \neq \Gamma_0$の場合は$\Gamma \cong \Gamma_0 \rtimes \mathbb{Z}_2$となるが、この場合は$\Gamma/\langle\gamma_0\rangle \cong S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2$であるから、定理3.2により

$$\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma) \cong \mathrm{Teich}(A(R), S^1 \rtimes \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{H}$$

であることが分かる。

最後に他の場合を検討する。やはり閉部分群の分類定理によりΓが1次元の場合には連結で楕円型、または放物型となる。楕円型の場合は簡単のためMöbius変換で移すことによって上半平面の代わりに単位円板Δで考えて、Γが原点を固定するとしてよい。すると自然に$\Gamma \cong S^1$となり任意の$\mathrm{Def}(\Delta,\Gamma)$の元$\phi$は$\phi(\Delta) = \Delta, \phi(0) = 0$と仮定してよいので、そうすると定理3.1の証明におけるようにϕは回転群S^1と可換になる。従って特に$\phi|_{\partial\Delta}$はある回転の元γと等しい。これよりΔの境界の各点を固定するホモトピーによりϕはγとホモトピックとなり、従って定理2.1により$\mathrm{Teich}(\Delta, S^1)$の

元として $[\phi] = [\gamma] = [\mathrm{id}]$ となり従って$\mathrm{Teich}(\Delta, S^1) \cong \mathrm{Teich}(\mathbb{H}, \Gamma)$ が 1 点になることが分かる。

次にΓが放物型になるときを考える。このときはΓは共通の固定点を$\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cap \{\infty\}$に持つが、最初からこれが$\infty$ であるとして一般性を失わない。この場合はΓは実軸に沿った平行移動全体と一致し、従って$\Gamma = \mathbb{R}$ とみなせる。$\phi \in \mathrm{Def}(\mathbb{H}, \Gamma)$ とするとこれも写像定理により$\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}, \phi(\infty) = \infty$ であるとしてよい。ϕは向きを保つので、これによる共役は$\Gamma = \mathbb{R}$ からそれ自身への順序を保つ中への（加法群としての）同型写像となるが、このようなものは明らかに正の定数倍によるものしかない。従って$\phi|_{\hat{\mathbb{R}}}$はある affine 変換$\gamma : x \mapsto ax + b \quad (a > 0, b \in \mathbb{R})$ と一致することがわかり、楕円型の場合と同様に$\mathrm{Teich}(\mathbb{H}, \Gamma)$ が 1 点につぶれることが分かる。

では、その次にΓが 2 次元の場合を考えよう。この場合は分類定理から$\Gamma = \mathrm{Aff}^+(1, \mathbb{R})$と仮定してよい。するとその交換子群 $[\Gamma, \Gamma]$ は放物型の 1 パラメータ族、すなわち平行移動全体と同型になり、$\phi \in \mathrm{Def}(\mathbb{H}, \Gamma)$ を$\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}, \phi(\infty) = \infty$ とするとϕによる共役は $[\Gamma, \Gamma]$ をそれ自身に単射に写すので先の場合と全く同様にして$\mathrm{Teich}(\mathbb{H}, \Gamma)$ が 1 点になることが分かる。

最後にΓが 3 次元の場合であるが、この場合は$\mathrm{Def}(\mathbb{H}, \Gamma)$ 自体が 1 点になってしまう。実際$\mu \in M_1(\mathbb{H}, \mathrm{Aut}(\mathbb{H}))$ とすれば、任意の$\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ に対して

$$\mu(\gamma(z))\overline{\gamma'(z)}/\gamma'(z) = \mu(z)$$

がほとんどいたるところ成り立たなければならないが、簡単な議論からこれより$\mu = 0$が従う。 □

ここで後でも少し必要となるので、具体例について触れておこう。

例 3.3. Xとしては単位円板Δから原点を抜いたものを考え、$f : X \to X$としてkを自然数として $f(z) = z^k$とする。(これは超吸引不動点の近傍における局所的な力学系モデルとなっている。) そこで$\pi : \mathbb{H} \to X$を$\pi(z) = e^{2\pi i z}$とすればこれは普遍被覆となっており、その被覆変換群は$\Gamma = \langle\gamma\rangle$ である。ただしここに$\gamma(z) = z + 1$ とする。するとこの被覆に関して fの持ち上げとしては$\delta(z) = kz$を取ることができることが分かる。$\delta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ だから $\mathcal{R}_f$は被覆関係になっている。さて$\delta \circ \gamma = \gamma^k \circ \delta$であることに注意すると容易に分かるように$\langle\gamma, \delta\rangle$ の$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ における閉包は 1 次元 affine 変換群$\mathrm{Aff}^+(1, \mathbb{R})$ である。従って、定理3.6によりこの Teichmüller 空間$\mathrm{Teich}(X, f)$ は 1 点につぶれていることが分かる。

あと少し、以下で必要になる Teichmüller 空間の基本的な性質について述べておく。まず、面の直和の Teichmüller 空間（直和の正確な定義はここではしないが、容易に想像はつくであろう）は、(ℓ^∞に対応するような）ある種の制限直積の形をとる。

命題 3.7. $(X, \mathcal{R})$ を被覆関係の族からなる正則力学系 $(X_\alpha, \mathcal{R}_\alpha) \quad (\alpha \in A)$ の直和とすれば、

$$\mathrm{Teich}(X, \mathcal{R}) \cong \prod_{\alpha \in A}{}' \mathrm{Teich}(X_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$$

が成り立つ。ただし、ここに$\prod'$は各成分の基点からの *Teichmüller* 距離が一様に有界なもののみを許す直積である。

Proof. まず$\mathrm{Def}(X,\mathcal{R})=\prod'\mathrm{Def}(X_\alpha,\mathcal{R}_\alpha)$は明らかである。従って、あとは$\mathrm{QC}_0(X,\mathcal{R})=\prod'\mathrm{QC}_0(X_\alpha,\mathcal{R}_\alpha)$を示せばよい。この左辺が右辺に含まれることは自明だが、逆の包含関係が自明ではない。しかし、これも定理2.1の注意にある一様擬等角アイソトピーの最大変形率が元の擬等角写像の最大変形率に応じて一様に有界に取れることに注意すればよい。ただ、この定理を使うためには一度$\mathbb{H}$の擬等角写像に持ち上げて考えなければならないので、正則関係がうまく持ち上がるための条件として被覆関係であるという仮定を用いるのである。 □

4. 有理函数の Teichmüller 空間

この節では有理函数fの Teichmüller 空間$\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}},f)$について考察する。あるいはできればより一般に整函数の力学系も考えたいので、最初は一般に1次元複素多様体Xの自己正則写像$f:X\to X$でどの成分でも非定数なものを考える。

まず、クライン群の場合と同様に、fによる商を考えたいので次の定義を導入する。$x,y\in X$に対してある自然数n,mが存在して$f^n(x)=f^m(y)$となるとき、x,yは *grand orbit equivalence relation* を満たすと言い、$x\sim y$で表す。特に$n=m$に取れる時は small orbit equivalence relation を満たすと言い、$x\approx y$で表す。grand orbit equivalence relation によるXの商空間をX/fで表し、もちろんこれには商位相を入れておく。この関係式が離散的であるとは任意のxの軌道が離散的であることと定義する。以下では Teichmüller 空間$\mathrm{Teich}(X,f):=\mathrm{Teich}(X,\mathcal{R}_f)$を考察することが主な目的となるが、まず次の定理が本質的な部分への必要な情報を与えてくれる。

定理 4.1. 1次元複素多様体Xの任意の成分が双曲的であるとする。また$f:X\to X$を（分岐点を持たない）解析的な自己被覆写像とし、さらにX/fが連結であるとする。

(1) fの *grand orbit relation* が離散的であるならばX/fは通常の *Riemann* 面となり従って$\mathrm{Teich}(X,f)\cong\mathrm{Teich}(X/f)$となる。

(2) fの *grand orbit relation* が離散的でないとし、さらにXのある成分がモジュラス有限な円環領域Aを持つならば

$$\mathrm{Teich}(X,f)\cong\mathrm{Teich}(A,\mathrm{Aut}_0(A))\cong\mathbb{H}$$

となる。

(3) それ以外の場合は$\mathrm{Teich}(X,f)$は1点につぶれる。

Proof. まずXの成分の1つをX_0とし$X_n=f^n(X_0)$とおく。すると各$n\geq 0$に対して$\{(x,y)\in X_0\times X_0; f^n(x)=f^n(y)\}$はある被覆関係の族$\mathcal{R}_n$の disjoint union となるが、$\mathcal{R}=\cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_n$としたとき実は

$$\mathrm{Teich}(X,f)\cong\mathrm{Teich}(X_0,\mathcal{R})$$

が成り立つ。実際、これを見るにはまずベルトラミ係数や擬等角写像を X_0 に制限することにより自然な写像

$$M_1(X,f)\to M_1(X_0,\mathcal{R}),\quad \mathrm{QC}_0(X,f)\to \mathrm{QC}_0(X_0,\mathcal{R})$$

を得るが、これらが実際に全単射になることは形式的計算により容易に分かる。よって上記の同型も得られる。

さて、ここで $\pi_0:\mathbb{H}\to X_0$ を普遍被覆とする。すると $\pi_n=f^n\circ\pi_0:\mathbb{H}\to X_n$ もやはり X_n の普遍被覆になることに注意してその被覆変換群を Γ_n と書くことにすると、Γ_n は Γ_0 と被覆関係 $\mathcal{R}_n$ の持ち上げによって生成された群とも思え、従って特に $\Gamma_0\subset\Gamma_1\subset\Gamma_2\subset\cdots$ であるが、$\Gamma=\overline{\cup\Gamma_n}$ としたとき、定理3.3により自然に

$$\mathrm{Teich}(X_0,\mathcal{R})\cong\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma)$$

となっていることが分かる。また定義から明らかなように X の grand orbit relation が離散的であるためには Γ が離散的であることが必要十分である。さて、そこで以下では Γ について考えていこう。まず、Γ は $\varinjlim\Gamma_n=\bigcup\Gamma_n$ の閉包という形であったので、2 次元以上ではあり得ない。実際、もし 2 次元以上であったとすれば、$\varinjlim\Gamma_n$ の非初等的部分群（従って離散的）の列 $\langle\gamma_n,\delta_n\rangle$ で $\gamma_n\to\mathrm{id},\delta_n\to\mathrm{id}$ なるものが取れるはずだが、これは例えば Jørgensen の不等式

$$|\mathrm{tr}^2\gamma_n-4|+|\mathrm{tr}[\gamma_n,\delta_n]-2|\geq 1$$

（ここに tr は行列表示の trace、$[\gamma,\delta]$ は交換子を表す）に反する。ゆえに Γ は高々1 次元である。また、各 Γ_n が楕円型変換を含まないことから容易に分かるように Γ も楕円型変換を含まない。

Γ が 0 次元ということは Γ が離散的ということと同値だからこの場合は容易に分かるように $X/f\cong\mathbb{H}/\Gamma$ であるので主張 (1) が従うことが分かる。そこで Γ が 1 次元の場合を考えてみよう。上の注意から Γ は楕円型変換を含まないので連結な双曲型または放物型の 1 パラメータ族であることが分かる。またさらに、X_0 の被覆変換群 Γ_0 はこの部分群であったわけだから、特に可換群となり従って X_0 は単位円板、穴あき円板 (punctured disk) またはモジュラス有限な円環領域と等角同型でなければならないが、単位円板とすると Γ_n も全て単位群でなければならず、これは Γ が 1 次元であることに反する。従って X_0 は穴あき円板またはモジュラス有限な円環領域でなければならない。Γ は前者の場合に放物型となり後者の場合に双曲型となる。定理3.1によれば $\mathrm{Teich}(\mathbb{H},\Gamma)$ が $\mathbb{H}$ と同型になるのは正確に双曲型の場合だったわけだから、これにより定理の後半の主張も示されたことになる。 □

さて、以下では有理関数の場合に話を絞って考えていくことにする。$f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ を次数 $d>1$ の有理函数とする。吸引鉢や放物鉢の点の grand orbit は離散的であるが、超吸引鉢の small orbit や Siegel 円板、Herman 環の grand orbit は非離散的となり、その閉包は自然に葉層構造を定め、それらは（高々可算個の leaf を除いて、また超吸引鉢の場合は少なくとも周期系の十分近くでは）実解析的単純閉曲線となる。

さて、それでは有理函数fについてその Teichmüller 空間Teich$(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ を考察していこう。周期点や分岐点の grand orbit は$\mathrm{QC}_0(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ の作用で各点ごとに不変だから、従ってジュリア集合（これは反発周期点全体の閉包として特徴づけることもできる）、(超) 吸引周期点、及び post critical set $\mathcal{P}$なども不変である。そこで、$\hat{J}$を周期点及び分岐点 (critical points) の grand orbit 全体の閉包とすると特に$J \subset \hat{J}$であり、集合$\hat{J} \setminus J$は次の 3 種類の集合の和集合になっていることが分かる。

1. fの Julia 集合 J
2. （超）吸引鉢や Siegel 円板に含まれる周期点や吸引鉢や放物鉢に含まれる分岐点の grand orbit
3. Siegel 円板、Herman 環及び超吸引鉢に含まれる非周期的分岐点の grand orbit を含む leaf

2,3 の集合は測度 0 であることに注意しておく。

そこで、$\widehat{\Omega} = \widehat{\mathbb{C}} - \hat{J} \subset \Omega$とおくと（ただし$\Omega = \Omega_f$は fの Fatou 集合とする）、$f : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$は周期点を持たない（不分岐）被覆写像である。$\mathrm{QC}_0(\widehat{\mathbb{C}}, f) = \mathrm{QC}_0(\widehat{\Omega}, f)$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f) &= M_1(J, f) \times \mathrm{Teich}(\widehat{\Omega}, f) \\ &= M_1(J, f) \times {\textstyle\prod_W'} \mathrm{Teich}(W, f)\end{aligned}$$

であることが分かる。ただしここにWは grand orbit relation に関して同値な$\widehat{\Omega}$の成分の和であるような完全不変開集合全体にわたって取るものとする。(これの証明には定理3.7に注意すればよい。)

従ってあとは No Wandering Domains Theorem を認めておけば、Wの各成分はfの反復合成により最終的にΩのある成分Uに land するのでUの周期をpとし$\hat{U} = U \setminus \hat{J}$として$W$が land する$\hat{U}$の成分を$W_1$とすれば定理4.1（の証明）により$\mathrm{Teich}(W, f) \cong \mathrm{Teich}(W_1, f^p)$ となる。従って以下の各場合についてのみ調べれば十分である。ここで、次のような定義を導入しておこう。$x, y \in \Omega$が同じ**葉層化同値類** (foliated equivalence class) に属するとはx, yの grand orbit の閉包が一致することであるとする。Uに含まれる非周期的な分岐点 (critical point) の葉層化同値類の個数を n としておく。

各論に入る前に古典的 Teichmüller 空間論での常識を述べておくと、(g, n) 型 Riemann 面（すなわち種数gのコンパクト Riemann 面から n 個の点を抜いて得られるような Riemann 面）の Teichmüller 空間 $T_{g,n}$の複素次元は

$$\dim T_{g,n} = 3g - 3 + n$$

である。ただし、双曲的でない面となる $2g - 2 + n \leq 0$ なる型は除く。

まず有理関数の Teichmüller 空間の次元に関する情報に関して簡単な考察により次のような結果が成り立つことが分かる。(この原理は有限生成 Klein 群の Teichmüller

空間の有限次元性の証明にも同様に働く。)

補題 4.2. $\Delta^n \subset \mathrm{Def}(\widehat{\mathbb{C}}, f) = M_1(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ を多重円板としこの上では標準射影$\Phi : \mathrm{Def}(\widehat{\mathbb{C}}, f) \to \mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ が単射になっているとすると

$$n \leq 2d - 2 = \dim(\mathrm{Rat}_d/\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}))$$

である。

Proof. $\eta : \mathrm{Def}(\widehat{\mathbb{C}}, f) \to V := \mathrm{Rat}_d/\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ を $[\phi, \widehat{\mathbb{C}}, g] \mapsto g \bmod \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ によって定まる写像とする。Vは $2d-2$ 次元の complex orbifold となる。もし $n > 2d-2$ ならば $\eta : \Delta^n \to V$の fiber は正の次元を持つ解析的集合となる。従って、Δ^n内のある自明でない曲線(ϕ_t, g_t) $(0 \leq t \leq 1)$ があって g_tが変化しない(つまり $g_t = g_0$)ものが取れる。しかし、${\phi_t}^{-1} \circ \phi_0$は fと可換であり従って$\hat{J}$上で恒等写像となっているから、定理2.1により${\phi_t}^{-1} \circ \phi_0 \in \mathrm{QC}_0(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ である。ゆえに(ϕ_t, g_0) のTeich$(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ での像は 1 点になってしまうが、これはηの単射性の仮定に反する。 □

古典的場合についてはDef$(X) \to$ Teich(X) が正則しずめ込みになっていることはよく知られているが、定理3.1および定理3.2から分かるようにそれ以外の場合はそもそも Teichmüller 空間が 1 点につぶれているか、またはこの射影が大域切断を持つような正則しずめ込みになっていることに注意すれば、以下の議論と合わせて次の系を得る。

系 4.3. 次数 $d > 1$ の有理関数の *Teichmüller* 空間の次元は高々$2d-2$ である。

それでは、いよいよ各成分について見ていくことにしよう。Fatou 成分の分類定理により Wが land する周期的 Fatou 成分 Uは次の 5 つのタイプに分類される。これらのうち grand orbit relation が離散的となるのは次の a,b のタイプのみで、残りの c,d,e の場合には非離散的となる。従って、非離散的な場合には定理4.1から$\hat{U} = U \setminus \hat{J}$として$\hat{U}$の連結成分でモジュラス有限な円環領域の grand orbit equivalence class の個数を m とすれば、Teich$(\hat{U}, f^p)$ は m 次元多重円板 $\mathbb{H}^m$ と等角同型となることが分かる。

a. 直接吸引鉢:$W/f \cong \hat{U}/f^p$は $(1, n)$ 型 Riemann 面になる。実際 f^pの Uにおける吸引不動点を a とすれば、この点の近傍での力学系は $0 < |\lambda| < 1$ として$\gamma : z \mapsto \lambda z$ と解析的に共役となる。従って $(U \setminus \{a\})/f^p \cong \mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle$ となりこの右辺は容易に分かるように複素トーラスである。$(U \setminus \hat{U})/f^p$は仮定より n 点だから主張が従う。従って

$$\dim \mathrm{Teich}(\hat{U}, f^p) = n$$

である。

b. 直接放物鉢：$W/f \cong \hat{U}/f^p$は$(0, n+2)$型 Riemann 面となる。従って、

$$\dim \mathrm{Teich}(\hat{U}, f^p) = n - 1.$$

実際、よく知られたことからある正則関数$\psi : U \to \mathbb{C}$が存在して$\psi(f^p(z)) = \psi(z)+1$を満たし、さらに$\psi(U)$はある右半平面を含みそこではUと1対1に対応している。これより特に

$$U/f^p \cong \mathbb{C}/\langle z \mapsto z+1 \rangle \cong \mathbb{C}^*$$

であることが分かり、$W/f \cong \hat{U}/f^p$はこれからさらにn点抜いたものだから$(0, n+2)$型 Riemann 面となる。

c. Siegel 円板：Uを Siegel 円板とする。するとこの場合はUは単位円板と等角同値でf^pの作用は非有理的回転と共役になっている。従って、この場合は$\hat{U}$のモジュラス有限な円環である連結成分の個数はnとなっており

$$\mathrm{Teich}(\hat{U}, f^p) \cong \mathbb{H}^n$$

である。

d. Herman 環：Uを Herman 環とする。この場合はUはモジュラス有限な円環と等角同値でf^pの作用はやはり非有理的回転と共役になっている。従って、この場合は$\hat{U}$のモジュラス有限な円環である連結成分の個数は$n+1$となっており

$$\mathrm{Teich}(\hat{U}, f^p) \cong \mathbb{H}^{n+1}$$

である。

e. 超吸引鉢：Uを超吸引周期点aとする超吸引直接鉢とする。するとまずa以外の分岐点の grand orbit が乗っている leaf が存在しないとき（つまり$n = 0$のとき）は、aの近傍ではこの力学系がある整数$k > 1$に対して$z \mapsto z^k$という原点の回りでの力学系と共役であることから、例3.3によってこの Teichmüller 空間が1点につぶれていることが分かる。(このときは、zの方で見て円環$\{z; r_0^k < |z| \leq r_0\}$が一種の“基本領域”のような役割を果たすことに注意せよ。) 次に$n > 0$の時は$\hat{U}$の成分で互いに grand orbit relation で同値でないものの個数はn個であるから、従って定理4.1により

$$\mathrm{Teich}(\hat{U}, f^p) \cong \mathbb{H}^n$$

であることが分かる。これはもちろん$n = 0$の場合も包含している。

f. 最後に $M_1(J,f)$ の部分であるが、これについてはさらに説明を要する。Eを J の部分集合で完全不変可測集合とする。E上の不変線分場 (invariant line field) とは E上の$\widehat{\mathbb{C}}$の接空間の実 1 次元 Grassmann 束（大ざっぱに言えば、接空間の実 1 次元部分空間全体を集めたもの）への可測な切断 (section)L であり

$$L \circ f = f_* \circ L$$

が E上ほとんどいたるところ成り立つようなものである。ただし、ここに f_*は微分 $df : T\widehat{\mathbb{C}} \to T\widehat{\mathbb{C}}$により自然にその Grassmann 束に誘導される写像とする。(f_*は $df \neq 0$ なるところでは定義可能であるから上の定義は意味を持つ。) このように記述するとちょっと分かりにくいが、通常のベルトラミ微分の言葉を使えばもっと簡潔に表すこともできる。すなわち、E上の不変線分場とは E上の f不変なベルトラミ微分$\mu = \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$ で $|\mu| = 1$ がほとんどいたるところ成り立つもの、と思ってもよい。"思い方"は、μ が与えられた時には

$$L(e) = \{v \in T_e\widehat{\mathbb{C}}; \mu(v) = 1 \text{ または } v = 0\}$$

と定めればよい。すると次のような定理が成り立つ。

定理 4.4. $M_1(J,f)$ は有限次元多重円板でありその次元は Jの中で不変線分場を持つような完全不変可測集合のエルゴード成分の個数に等しい。

Proof. まず次のような写像を考える。

$$M_1(J,f) \hookrightarrow \mathrm{Def}(\widehat{\mathbb{C}},f) \to \mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}},f),$$

ただし$\mu \in M_1(J,f)$ に対してはΩには 0 で拡張してさらに $0,1,\infty$ を固定するような正規化された擬等角写像を考え、それを $w^\mu : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$と書くことにする。さらにその Teichmüller 同値類を取ったものを $[w^\mu]$ と書くことにしよう。$\mu,\nu \in M_1(J,f)$ に対して $[w^\mu] = [w^\nu]$ であったとしよう。すると、Teichmüller 同値の定義からある $\omega_0 \in \mathrm{QC}_0(\widehat{\mathbb{C}},f)$ があって $w^\mu = w^\nu \circ \omega_0$となる。ここに$\omega_0$は J上では恒等写像であり作り方からΩ上では等角写像であることに注意する。実際、$f(z) = \omega_0(z)/z$を考えるとこれはΩの閉包で連続で内部で正則であり、しかも境界では値が1 である。従って最大値の原理から容易に $f(z) = 1$ を得る。これより$\omega_0 = \mathrm{id}$ であることが分かる。故に$\mu = \nu$である。すなわち上記の写像 $M_1(J,f) \to \mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}},f)$ は単射である。従って補題4.2より $M_1(J,f)$ の有限次元性が分かる。エルゴード的サポートを持つような不変線分場が $M_1(J,f)$ の基底をなすことは明らかであろう。 □

以上の結果をまとめると次のようになる。

定理 4.5. 次数 2 以上の有理関数の *Teichmüller* 空間は複素多様体の構造を持ちその次元は $\dim \mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}},f) = n_{AC} + n_{HR} + n_{LF} - n_P$ である。ただしここに

n_{AC} =*Fatou* 集合に含まれる周期点でない分岐点の葉層化同値類の個数、

n_{HR} =*Herman* 環の個数、

n_{LF} $=$*Julia* 集合内のエルゴード的線分場の個数（$= \dim M(J,f)$）、
n_P $=$放物周期系の個数
である。しかも標準射影Φ : $\mathrm{Def}(\widehat{\mathbb{C}}, f) \to \mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ は正則しずめ込みになっている。

最後に有理関数の Teichmüller modular 群がその Teichmüller 空間に不連続に作用することを証明してこの節を終わろう。

定理 4.6. $\mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ は$\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ に等角同型写像として *properly discontinuous* に作用する。

Proof. 構成の仕方から$\mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ は$\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ に等角写像として、またさらに Teichmüller 距離に関して等距離写像として作用することは明らか。従って、この作用によって自然に次の連続準同型が誘導される。

$$\rho = \rho_f : \mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, f) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f)).$$

一方、この右辺はLie 群の構造を持ち$G := \mathrm{Im}\rho$はその閉部分群だからGもやはり Lie 群の構造を持つ。今仮に$\dim G > 0$であるとするとある曲線$(\phi_t, \widehat{\mathbb{C}}, f) \in \mathrm{QC}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ $(0 \le t \le 1)$ で$\mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ において非定数なるものが取れる。しかし、これは fの周期点や分岐点をを固定しなければならないので特に$\hat{J}$上で$\phi_t = \phi_0$でなければならない。よって定理2.1により$\phi_t{}^{-1} \circ \phi_0 \in \mathrm{QC}_0(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ となり、これはϕ_tが$\mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ において定点となることを意味し矛盾である。よって$\dim G = 0$であることが言えた。これよりGが$\mathrm{Aut}(\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f))$ の離散部分群であることが証明されたことになる。

さて、今度はこのGがproperly discontinuous に作用することを言えばよいが、これを言うにはGは等距離写像として作用しているのだから単に不連続(discontinuous) に作用することだけを言えばよい。その前にまず、1 点$P = ([\phi], \widehat{\mathbb{C}}, g) \in \mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ における$\mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ の固定群Hは$\mathrm{Aut}(g) = \{\gamma \in \text{Möb}; g \circ \gamma = \gamma \circ g\}$ に自然に同型であることに注意しておこう。$\mathrm{Aut}(g)$ は定義から分かるように有限群であるから従ってHも有限群である。(例えば、これは$\mathrm{Aut}(g)$ の元がgの周期nの周期点を置換していることからすぐに分かる。)

さて、もし不連続に作用していないとすると、ある互いに相異なる点列$\rho([\omega_n, \widehat{\mathbb{C}}, f]) \in G$とある点$P = ([\phi], \widehat{\mathbb{C}}, g)$ が存在して$[\omega_n]P \to P$となる。つまり

$$d([\phi \circ \omega_n^{-1}], [\phi]) = d([\phi \circ \omega_n], [\phi]) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である。(ここにdは Teichmüller 距離。) これは$[\omega_n]$の代表元を適当に選べば$\xi_n := \phi \circ \omega_n \circ \phi^{-1} \in \mathrm{QC}(\widehat{\mathbb{C}}, g)$ に対して$K(\xi_n) \to 1$ $(n \to \infty)$ とできることを意味する。これより擬等角写像の正規性から適当な部分列を取ることによりある$\gamma \in \mathrm{QC}(\widehat{\mathbb{C}}, g)$ に対して$\xi_n \to \gamma$（一様収束）となる。最大変形率の下半連続性からγは正則となり従って特に$\gamma \in \mathrm{Aut}(g)$ となる。これより$\mathrm{Aut}(\mathrm{Teich}(\widehat{\mathbb{C}}, g))$ において$\rho_g([\xi_n]) \to \rho_g(\gamma)$であることが分かり、先に示したように$\rho_g(\mathrm{Mod}(\widehat{\mathbb{C}}, g))$ は離散的であったのだから、

これより十分大きな n に対しては$\rho_g([\xi_n]) = \rho_g(\gamma)$ であることが分かる。このことから特にTeich$(\widehat{\mathbb{C}}, g)$ の点として $[\xi_n] = [\gamma]$ であることが分かるが、これは元に戻れば$\phi \circ \omega_n \circ \phi^{-1}$が$\gamma$と Teichmüller 同値であることを意味するので、特に $[\omega_n]P = P$である。Pの固定群が有限群であったことから、これは $[\omega_n]$ を相異なるように取ってきたことに反する。よって不連続に作用することが示された。 □

5. λ-LEMMA, 安定性

最後にこの節において有理函数の正則族について簡単に考察する。Xは（一般次元）複素多様体とする。$f_\lambda(z)$ が有理函数の X上の正則族であるとは、函数$(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$ が写像$X \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$として正則であることである。

まずいわゆる holomorphic motion について述べておく。これは injection の正則族のことであるが、後で述べるような著しい性質を持つ。

(X, x) は基点付き複素多様体、A は$\widehat{\mathbb{C}}$の部分集合とする。$\phi : X \times A \to \widehat{\mathbb{C}}$が集合 A の holomorphic motion であるとは、

1. 各$a \in A$ について$\phi_\lambda(a) = \phi(\lambda, a)$ はλについて正則である。
2. 各$\lambda \in X$について$\phi_\lambda : A \to \widehat{\mathbb{C}}$は単射である。
3. $\phi_x = \mathrm{id}_A$.

定理 5.1. *(λ-lemma) A の holomorphic motion は一意的に$\overline{A}$の holomorphic motion に拡張でき、その拡張$\phi : X \times A \to \widehat{\mathbb{C}}$は 2 変数について連続になり、しかも各$\lambda$について$\phi_\lambda$は$\widehat{\mathbb{C}}$の自己擬等角写像に連続拡張できる。*

定理 5.2. *(harmonic λ-lemma) $\phi : \Delta \times A \to \widehat{\mathbb{C}}$を 3 点以上からなる集合 A の holomorphic motion とし、Δは単位円板とすると、$\phi|\Delta(1/3) \times A$ は$\widehat{\mathbb{C}}$全体への holomorphic motion に拡張して、さらにϕ_λのベルトラミ係数が$\widehat{\mathbb{C}} - \overline{A}$上で“調和”にすることが出来、しかもこの条件の下に拡張は一意的である。*

X^{top}を、$\alpha \in X$で、ある近傍Uがあって任意の$\beta \in U$に対して f_αと f_βが位相的に共役になっているもの全体として定める。

また、X^{qc}も“位相的”を“擬等角”に変えて同様に定義する。

X^{post}は、$\alpha \in X$でαの近傍で f_λの分岐点の個数が（重複度を込めずに）一定であるとする。この時、実はαの近傍で分岐点に$c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)$ とラベルを打つことが出来るが、このラベルに関してさらに分岐軌道関係が局所的に一定、つまり、$f^a(c_i(\lambda)) = f^b(c_j(\lambda))$ が成り立つような整数の組 (i, j, a, b) がλによらずに局所的には一定であるような点全体とする。

X^{stable}は$x \in X$である近傍Uが存在して f_xのジュリア集合 J_xの holomorphic motion で力学系と可換なものが取れるもの全体とする。これについては、色々同値な定義が知られているが、例えばf_λの吸引周期系の個数がx の近傍で一定であるような点$x \in X$の集合と言い換えることも出来る。

X^{top} は topologically stable parameters、X^{qc} は quasiconformally stable parameters、X^{post} は postcritically stable parameters、X^{stable} は J-stable parameters とそれぞれ呼ばれている。$X^{\mathrm{qc}} \subset X^{\mathrm{top}} \subset X^{\mathrm{post}}, X^{\mathrm{top}} \subset X^{\mathrm{stable}}$ はほぼ自明であろう。しかし、λ-lemma などを用いれば実は次の結果が成り立つことが分かる。

定理 5.3. $X^{\mathrm{qc}} = X^{\mathrm{top}} = X^{\mathrm{post}}$

また、構造安定性については次の結果が知られている。

定理 5.4. X^{top} は X において *open dense* である。