

# Tricorn の非弧状連結性について

東京工芸大学 中根静男 (Shizuo Nakane)  
ミュンヘン工科大学 Dierk Schleicher

## 1 序

この小論では、2 次の反正則多項式写像族

$$f_c(z) = \bar{z}^2 + c, \quad c \in \mathbf{C},$$

の力学系を考える。 $f_c$  自身は正則ではないが、その2回合成  $f_c^{\circ 2}(z) = (z^2 + \bar{c})^2 + c$  は正則になるので、多項式の時と同様に充填 Julia 集合  $K_c = K(f_c)$  及び Julia 集合  $J_c = J(f_c)$  を定義できる。

$$K_c = \{z \in \mathbf{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{\circ n}(z) \neq \infty\},$$
$$J_c = \partial K_c.$$

この族の connectedness locus :

$$M_2^* = \{c \in \mathbf{C}; J_c \text{が連結}\}$$

は Milnor [M2] により tricorn, Rippon 達 [Rip] により Mandelbar 集合と呼ばれた。それは

$$M_2^* = \{c \in \mathbf{C}; 0 \in K_c\}$$

とも特徴づけられる。0 はこの族の唯一の critical point であることに注意する。

$M_2^*$  は、2 次の多項式写像族  $P_c(z) = z^2 + c$  に対する Mandelbrot 集合  $M_2$  のアナロジーとみなされる。実際、それらは、連結であることなど、ある程度共通の性質を持つ (Nakane [Nak1] 参照)。図 1 を見よ。その一方、正反対の性質を持つこともある。例えば、 $M_2$  は局所連結と予想されているが、 $M_2^*$  は局所連結でない ([NS1])。以下に見るように、弧状連結ですらない。これは、我々の写像族が2次ではなく、3次多項式族の性質をも合わせ持っていることを意味する。(3次多項式族の connectedness locus は局所連結でない!) 実際、Milnor [M2] は実3次多項式族の connectedness locus の中に tricorn 状の集合を発見し、3次多項式の力学系のモデルの一つとして、我々の写像族に到達したのである。Branner [Bra] も参照せよ。

このように、我々の写像族は、2次と3次の多項式の力学系を補間するものといえる。更に、 $f_c$  が3次のように振る舞うのは、 $c$  が奇数周期の hyperbolic component においてであり、偶数周期の hyperbolic component では2次のように振る舞うことも経験的にわかっている。2次多項式族との違いが現れるのは、我々の族がパラメータに関して正則でないため、奇数周期の hyperbolic component ではそれが顕著に現れるのである。

さて、Milnor は実 3 次多項式族の connectedness locus の中の tricorn 状の集合の近傍にジグザグ構造を発見し、それが弧状連結でないことを予想した。tricorn の非弧状連結性については、1993 年夏に筆者達が彼から提起されたのが本研究の出発点である。Tricorn が弧状連結でないことを示すには、ジグザグ構造を持つような奇数周期の hyperbolic component を一つ見つければよい。一方、実軸上の hyperbolic component は実軸上の線分で周期 1 の component と結ばれるので、ジグザグ構造は持たない。我々の目標は、奇数周期の hyperbolic component のうちで、ジグザグ構造を持つものを特徴づけることにある。

最終的には、実軸及びその回転上にない全ての奇数周期の hyperbolic component の近傍にジグザグ構造が存在すると予想しているが、完全な証明はまだ得ていない。証明には Ecalle cylinder の理論を使う。これは Lavaurs [Lav] が 3 次多項式の connectedness locus の非局所連結性を示すときに用いた方法に示唆されたものである。

簡単に証明の輪郭を述べる。奇数周期の hyperbolic component の境界は parabolic なパラメータからなる。その境界から少しだけ外に出たときのパラメータ空間のトポロジーを知るために、境界からの摂動を考える。摂動後の力学系、特に critical point の軌道の性質を見たい。その際、Fatou coordinate で見ると非常に見やすい。なぜなら、Fatou coordinate で考えると、 $f_c$  の力学系は実定数を加えることに等しくなるからである。摂動後に、critical point の軌道が 充填 Julia 集合に入れば、そのパラメータは  $M_2^*$  に含まれ、充填 Julia 集合の外に出れば、 $M_2^*$  の外にあることになる。Fatou coordinates が摂動後も連続なために、Julia 集合としては、摂動前の parabolic Julia 集合を考えれば良い。こうして Julia 集合のトポロジカルな性質がパラメータ空間のトポロジーに翻訳される。こうして、パラメータ空間の中のジグザグ構造の存在が Julia 集合の性質から導かれるのである。この議論を正当化するのが Ecalle cylinder の理論である。実際、我々がパラメータ空間に見ているのは cylinder に映った Julia 集合の影なのである。

この問題を提起してくれた Milnor 教授、Ecalle cylinder を用いるという Lavaurs の方法を提示してくれた宍倉光広教授、及び Ecalle height という概念を我々に教示してくれた Hubbard 教授に感謝する。

## 2 奇数周期の hyperbolic component の境界

序で述べたように、我々は  $M_2^*$  の奇数周期  $k$  の hyperbolic component  $W$  の境界  $\partial W$  の近傍に注目する。ここで  $\partial W$  上の点は常に parabolic であることに注意する。それは反正則力学系において特徴的なのだが、次の簡単な事実に由来する。

**補題 2.1**  $z_0$  を反正則写像  $f$  の奇数周期  $k$  の周期点とすると、

$$(\partial f^{o2k}/\partial z)(z_0) = |(\partial f^{ok}/\partial \bar{z})(z_0)|^2 \geq 0.$$

更に、 $z_0$  を  $f$  の偶数周期  $2k$  の周期点、 $w_0 = f^{ok}(z_0)$  とすると、

$$(\partial f^{o2k}/\partial z)(w_0) = \overline{(\partial f^{o2k}/\partial z)(z_0)}.$$

**証明.**  $z_j = f^{oj}(z_0)$ ,  $0 \leq j \leq 2k-1$  とおく。 $z_0$  が  $k$ -周期点ならば  $z_{k+j} = z_j$  故、chain rule より次が従う。

$$(\partial f^{o2k}/\partial z)(z_0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\partial f^{o2}/\partial z)(z_{2j})$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=0}^{k-1} 4z_{2j}\overline{z_{2j+1}} \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} 4|z_j|^2 \\
&= |(\partial f^{ok}/\partial \bar{z})(z_0)|^2.
\end{aligned}$$

同様にして後半部も示される。■

このために、 $W$  からの分岐が強く制限され、実際、“周期 2 倍分岐”しか存在しない。我々の族は特異点がただ一つのため、次を得る。

**補題 2.2**  $c \in \partial W$  とすると、 $f_c$  は固有値 1 の *parabolic* な  $k$ -周期点  $z_c$  を持つが、 $(\partial^2 f_c^{o2k}/\partial z^2)(z_c) = 0$  ならば  $(\partial^3 f_c^{o2k}/\partial z^3)(z_c) \neq 0$ .

証明.  $z_c$  の固有値は 1 なので、その周りでの combinatorial rotation number は 0. よって、 $z_c$  の immediate basin の個数は高々  $f_c^{o2}$  の critical points の数である 2 である。これから補題は従う。■

**定義 2.1**  $(\partial^2 f_c^{o2k}/\partial z^2)(z_c) = 0$  の時  $c$  を *cuspidal point* と呼ぶ。

さて、 $c \in \partial W$  ならば  $f_c$  には Fatou coordinates  $\Phi_{c,\pm}$  が存在する。つまり、 $\Phi_{c,\pm}$  は  $z_c$  の attracting (repelling) petal  $\Omega_{\pm}$  上、

$$\Phi_{c,\pm} \circ f_c^{o2k}(z) = \Phi_{c,\pm}(z) + 1,$$

を満たす。Fatou coordinates には定数を加える分の自由度があるが、我々は反正則写像を考えているので、適当な純虚数を加えることにより、

$$\Phi_{c,\pm} \circ f_c^{ok}(z) = \overline{\Phi_{c,\pm}(z)} + 1/2,$$

を満たすように取れる。但し、もはや残っている自由度は実定数を加える分だけである。Fatou coordinates によって、 $f_c^{o2k}$  の基本領域は cylinder  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$  と同型である。図 2 を見よ。

**定義 2.2** Fatou coordinates の実部を *phase*、虚部を *Ecalte height* と言う。

**補題 2.3** *Ecalte height* は *conformal invariant* である。

**命題 2.1** (Nakane-Schleicher [NS2]) *critical value* の *Ecalte height* は  $\partial W - \{\text{cuspidal point}\}$  の各連結成分を実解析的にパラメトライズする。各成分上  $f_c$  達は  $qc$  同値である。

この命題は Nakane [Nak2] の結果のより直接的な別証明を与える。

**定義 2.3**  $\partial W - \{\text{cuspidal point}\}$  の連結成分を *parabolic arc* と呼ぶ。Nakane-Schleicher [NS2] は、任意の奇数周期の *hyperbolic component* の境界は 3 個の *cuspidal point* と 3 本の *parabolic arcs* からなることを示した。*parabolic arc* 上の力学系において、各 *parabolic* な周期点に到達する *external ray* が丁度 1 本するとき、その *parabolic arc* は *non-principal* と言い、そうでないとき、*principal* という。直観的に言うと、*principal parabolic arc* には周期 1 の *component* からのフィラメントが到達している。

### 3 Parabolic dynamics からの分岐

この節では parabolic arc から摂動したときの力学系の分岐を考察する。parabolic arc を  $c = c(t), t \in \mathbf{R}$  と表すことにする。  $c$  が  $W$  の中から  $\partial W$  を横切って  $W$  の外に出るとしよう。そのとき、repelling 及び attracting な  $k$ -周期点が  $\partial W$  で合体して parabolic になり、  $W$  の外で  $2k$ -周期点に分岐する。  $c = c(t) + s$  とおく。  $s \neq 0$  の時、2 個の  $k$  または  $2k$ -周期点は  $\sqrt{s}$  で展開される。その  $f_c^{2k}$  の不動点としての固有値は 補題 2.1 より  $W$  ではともに実数で、  $W$  の外では互いに複素共役になる。これから簡単な考察により次を得る。

**補題 3.1** このとき  $W$  の外で、  $2k$ -周期点の固有値は

$$\rho = 1 \pm iA|s|^{m+1/2} + O(|s|^{m+1}),$$

と表される。ここで  $A \neq 0$  は実数で  $m \geq 0$  である。

証明.  $c(t)$  は cusp でないので、分岐した  $2k$ -周期点  $z = z(s)$  は  $\sqrt{r}$ ,  $r = |s|$  について実解析的である。よって、その固有値  $\rho = \rho_{\pm}$  も  $r^{1/2}$  について実解析的で、テイラー展開すると、その係数は  $t$  について実解析的である。  $\rho_{\pm}$  をまず  $W$  で考えると、そこでは実数だから、

$$\rho_{\pm} = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} A_{\pm,j} r^{j+1/2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_{\pm,j} r^j, \quad A_{\pm,j}, B_{\pm,j} \in \mathbf{R},$$

と、  $r^{1/2}$  でテイラー展開される。これを、  $\overline{W}$  の外で考える。それには  $r$  を  $-r$  で置き換えればよい：

$$\rho_{\pm} = 1 + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{\pm,j} r^{j+1/2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j B_{\pm,j} r^j.$$

$\rho_- = \overline{\rho_+}$  より、  $A_{-,j} = -A_{+,j}$ ,  $B_{-,j} = B_{+,j}$  がすべての  $j$  について成り立つ。再び  $W$  で考える。  $r$  を  $-r$  で置き換えると、

$$\rho_{\pm} = 1 \pm \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j r^{j+1/2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j B_j r^j, \quad A_j, B_j \in \mathbf{R},$$

と書ける。さて、  $A_j = B_j = 0$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ 、さらに  $B_m \neq 0$  と仮定すると、

$$\rho_{\pm} = 1 + (-1)^m B_m r^m + O(r^{m+1/2}), \quad r \rightarrow +0,$$

となるが、これは、  $W$  で  $k$ -周期点の一つが attracting、もう一つが repelling であるという事実と反する。よって  $B_m = 0$  が示された。すべての  $j$  について  $A_j = 0$  とすると、  $\rho_{\pm} \equiv 1$  となり矛盾する。よって補題が示された。■

Lavaurs [Lav], Shishikura [Shi] によると、  $\pi/4 < |\arg(\rho - 1)| < 3\pi/4$  なら Ecalle cylinder が存在するので、この評価から、摂動後も Ecalle cylinder の存在が保証される。つまり、いわゆる egg-beater dynamics が存在する。直観的にもこの補題は  $2k$ -周期点の周りでの回転 (= egg-beater) の存在を示唆する。但し、Ecalle cylinder が存在する  $r$  の範囲が parabolic arc 上、局所一様にとれること、とりわけ、上の補題の主要部  $A_m$  が消えるような  $t$  でも一様にとれることを示す必要がある。そのためにはより精密な解析を必要とする。後の補題 3.3 を見よ。

我々が用いるのは、incoming cylinder から outgoing cylinder への transit map である。これは、  $f_c$  の高位の合成を表現する cylinder isomorphism である。従って、Fatou coordinates では定数を加えると言う写像であるが、我々の Fatou coordinates の取り方から、次が示される。

**補題 3.2** *Transit map* は *Ecalte height* を変えない。

証明. incoming cylinder と outgoing cylinder で同じ Fatou coordinate をとってみると、 $f_c^{\circ 2k}$  は phase を 1 だけずらすので、Ecalte height を変えない。一方、補題 2.3 より、Ecalte height は Fatou coordinates のとり方に依らない。よって、任意の Fatou coordinates に対し、transit map は Ecalte height を変えない。■

摂動後の  $2k$ -周期点の周りでの first return map  $R_{t,s}$  を考える。それは、上の transit map  $\chi_{t,s}$  と、incoming と outgoing の二つの Fatou coordinates  $\Phi_{\pm,t,s}$  の間の座標変換である Ecalte 変換  $E_{t,s}$  の合成である。図 3 を見よ。first return map は線形化することにより固有値を用いて

$$R_{t,s}(w) = w - \frac{\pm 2\pi i}{\log \rho_{\pm}}, \quad \pm \text{Im } w > 0,$$

と表されるので、逆に first return map の性質から、固有値の性質が解るのである。その性質とは、Ecalte height への影響である。しかし、上の補題から transit map は Ecalte height を変えないので、Ecalte 変換の影響が問題になる。Ecalte 変換は Fatou coordinates から計算できる。

$$\begin{aligned} E_{t,s}(w) &= \Phi_{+,t,s} \circ \Phi_{-,t,s}^{-1}(w) \\ &\rightarrow E_{t,0}(w), \quad s \rightarrow 0 \\ &= w \pm i\pi(i(f_{c(t)}^{2k}, z_t) - 1) + O(1/w), \quad \pm \text{Im } w \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ここで  $z_t$  は  $f_{c(t)}$  の parabolic な  $k$ -周期点で、

$$i(f, z_0) \equiv \oint_{|z-z_0|<\epsilon} \frac{dz}{z-f(z)}$$

は正則関数  $f$  の  $z_0$  における holomorphic index (Milnor [M1] 参照) で、今の場合、

$$i(f_{c(t)}^{2k}, z_t) = \frac{2(\partial^3 f_{c(t)}^{2k}/\partial z^3)(z_t)}{3\{(\partial^2 f_{c(t)}^{2k}/\partial z^2)(z_t)\}^2},$$

と表される。これらを比較考察することから次を得る。

**補題 3.3** 補題 3.1 において、 $A_j = 0$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ ,  $A_m \neq 0$  とすると、 $B_j = 0$ ,  $0 \leq j \leq 2m$ . 更に、 $A_m(t) = O((t-t_0)^\ell)$  ならば  $B_{2m+1}(t) = O((t-t_0)^{2\ell})$ .

証明.  $\rho_{\pm} = 1 \pm i(A_m r^{m+1/2} + \dots) + B_n r^n + \dots$ , とすると  $\pm \text{Im } w > 0$  で、

$$\begin{aligned} \frac{\pm 2\pi i}{\log \rho_{\pm}} &= \frac{\pm 2\pi i}{\pm i A_m r^{m+1/2} + B_n r^n - (\pm i A_m r^{m+1/2} + \dots)^2/2 + \dots} \\ &= \frac{2\pi}{A_m r^{m+1/2}} (1 \pm \{B_n r^n + (A_m^2 r^{2m+1})/2\}/i A_m r^{m+1/2} + \dots)^{-1} \\ &= \frac{2\pi}{A_m r^{m+1/2}} (1 \pm i\{B_n r^n + A_m^2 r^{2m+1}/2 + \dots\}/A_m r^{m+1/2} + \dots) \\ &= \frac{2\pi}{A_m r^{m+1/2}} \pm i\pi(1 + \frac{2B_n}{A_m^2} r^{n-2m-1}) + \dots, \end{aligned}$$

となるので、

$$R_{t,s}(w) = w - \frac{2\pi}{A_m r^{m+1/2}} \pm i\pi \left( -\frac{2B_n}{A_m^2} r^{n-2m-1} - 1 \right) + \dots,$$

と表される。 $r \rightarrow 0$  のとき、この右辺の虚部は上の  $E_{t,0}$  の右辺のそれと一致しなければならないので、 $n = 2m + 1$  かつ、 $-2B_{2m+1}/A_m^2 = i(f_{c(t)}^{2k}, z_t)$  でなければならない。この最後の等式の右辺は  $t$  の実解析関数故、左辺もそう。よって補題の最後の主張が従う。■

この証明の中で、 $m = 0$  つまり  $A_0(t) \neq 0$  のときは簡単な計算により、 $i(f_{c(t)}^{2k}, z_t) \equiv -2B_1(t)/A_0(t)^2$  が従う。恐らく、 $A_0(t) \neq 0$  と思われるが、 $k = 1$  のときを除けば確認することは出来ない。 $k = 1$  のときは、 $A_0(t) = 0$  となるのは cusp 点に限ることもわかる。

こうして、Ecalte cylinder が parabolic arc 上、局所一様に存在することが従う。

そして、outgoing cylinder に映った Julia 集合の情報が、transit map を通して incoming cylinder 内の情報である、critical value の Ecalte height と結びつく。そして、摂動後の critical value の軌道が制御できる。こうして、パラメータ空間における必要な情報を得ることができるのである。

我々の場合、パラメータ空間にジグザグ構造の存在を言うのであるが、そのためには parabolic arc 上の力学系において、Hubbard tree が実解析的弧を含まないことを示せばよい。というのは、このとき、この Hubbard tree の outgoing cylinder への像は cylinder の赤道にはなり得ず、上下にぶれる。このぶれがパラメータ空間のジグザグ構造を生じさせるのである。

ちなみに、実軸上にはジグザグ構造が存在しないのは、Hubbard tree が実軸上の線分となり、その cylinder への像がちょうど赤道になるからである。

そこで、Hubbard tree の性質が問題になるが、それについては次節で考える。

## 4 Hubbard tree の combinatorial study

前節同様、 $W$  を奇数周期  $k \geq 3$  の hyperbolic component,  $c$  をその parabolic arc からとる。通常 Hubbard tree は critically finite な写像に対し、critical orbit を充填 Julia 集合内の regular arc で結んだ tree として定義する。我々の考えるのは parabolic な力学系のため、critically finite ではないが、Fatou components 内ではホモトピー類を考えることにすれば、Hubbard tree を定義できる。 $f_c$  の Hubbard tree を  $H_c$  とかく。

周期 3 以上の hyperbolic component は周期 2 の hyperbolic component  $W_2$  のある limb  $L_{p/q}(W_2)$  に属することは、Mandelbrot 集合のときと同様に、external angle の計算から容易に解る。ここで  $p/q$  は  $\partial W_2$  の固有値  $e^{2\pi i p/q}$  の parabolic なパラメータ  $c_{p/q}$  に対応する。 $L_{p/q}(W_2)$  は  $M_2^* - \{c_{p/q}\}$  の、0 を含まない連結成分の閉包として定義される。

我々は Hubbard tree をホモトピー類として定義したが、次の補題は、repelling 2-周期点においては、ホモトピー類の中にもし実解析的弧があっても高々一つしかないことを意味する。

**補題 4.1**  $H_c$  は  $f_c$  の repelling な 2-周期点  $w_c$  を含む。また、 $H_c \cap J_c$  の点は  $w_c$  に集積する。

**証明.**  $H_c \cap J_c$  上  $w_c$  が孤立しているとすると、 $w_c$  はある Fatou component の境界上にある。その component は周期的でその周期は偶数でなければならないので、parabolic basin ではない。しかし critical point は一つしかないので、これはありえない。■

**定義 4.1**  $M_2^*$  の奇数周期の *hyperbolic component* が *maximally tuned* とは、周期が 1 より大きい *hyperbolic component* の *tuning* による像になっていないことを言う。言い替えれば丁度 1 回だけくりこみ可能ということである。

次の補題は、 $H_c$  の  $w_c$  での局所的な性質が実際に Ecalle cylinder に映されることを意味する。

**補題 4.2**  $c$  が *maximally tuned hyperbolic component* の *principal parabolic arc* 上にあるとき、 $H_c$  上の  $w_c$  の *inverse orbit* の点は  $z_c$  に集積する。

証明.  $z_c$  の  $H_c$  内の任意の近傍  $I$  に対し、 $\bigcup_{n \geq 0} f_c^{on}(I) = H_c$  を言えばよい。そうではないとすると、 $\bigcup_{n \geq 0} f_c^{on}(I)$  の  $z_c$  を含む成分  $J$  は、ある  $m < k$  に対し  $f_c^{om}$  で forward invariant な tree である。 $J$  の近傍  $U$  を external rays と equipotential curves でうまく取ると、 $f_c^{om} : U \rightarrow f_c^{om}(U)$  は 2 次の antipolynomial-like map になる。よって  $f_c$  は  $f_c^{om}$  と  $f_c^{ok}$  の少なくとも 2 回繰り込み可能であり、これは *maximally tuned* の仮定に反する。■

**補題 4.3**  $c$  は  $L_{p/q}(W_2)$  内の *maximally tuned hyperbolic component* の *principal parabolic arc* 上にあるとし、 $q$  は奇数とすると、 $H_c$  は  $w_c$  の近くに実解析的弧を含まない。

証明. 仮定より  $H_c$  は  $w_c$  で  $q$  本の枝に分かれる。 $f_c^{\circ 2}$  は、 $w_c$  の周りで combinatorial rotation number  $p/q$  をもつ。つまり、この  $q$  本の枝を permute することに注意する。そのうちの 2 本  $I_1, I_2$  が  $w_c$  で実解析的弧を成すとする。 $I_1 = f_c^{\circ 2m}(I_2)$  となる  $m < q$  をとると、 $q$  が奇数のため、 $f_c^{\circ 2m}(I_1)$  は  $I_2$  にはなり得ない。よって、 $I_1$  を通る 2 本の実解析的弧があることになる。補題 4.1 より、これは一致の定理に反する。■

$q$  が偶数の時は、現時点ではもう一つ仮定をしなくてはならない。

**定義 4.2**  $\text{limb } L_{p/q}(W_2)$  を考える。その上の  $f_c^{\circ 2q+2}(c) = f_c^{\circ 2q}(c)$  を満たす Misiurewicz 点  $c$  で、それは  $q$  本の枝を持つ。 $q$  が偶数の時、その *limb* の中心をなす 2 本の枝を  $L_{p/q}(W_2)$  の *branch of symmetry* という。 $q$  が奇数の時はそのような枝は存在しない。*branch of symmetry* 上、全ての分岐点で対称な枝を通して得られる弧を *arc of symmetry* という。

例えば、実軸上の  $M_2^*$  の部分は *arc of symmetry* である。補題 4.3 と同様にして次を得る。

**補題 4.4**  $c$  は  $L_{p/q}(W_2)$  ( $q$  は偶数) 上、*arc of symmetry* 上にないような *maximally tuned hyperbolic component* の *principal parabolic arc* 上にあるとする。 $H_c$  は  $w_c$  の *inverse orbit* のある点で、実解析的弧を含まない。

証明.  $c$  が *arc of symmetry* 上にないことから、 $w_c$  の *inverse orbit* のある点  $w'_c$  で、 $H_c$  は  $J_c$  の “*arc of symmetry*” でないことがわかる。よって、 $f_c$  で  $w'_c$  を  $w_c$  に写して前補題と同様の議論をして、また  $w'_c$  に戻すことにより補題を得る。■

*Arc of symmetry* 上では同様には証明できない。しかし、 $q \neq 2$  ならば、数値実験は *arc of symmetry* 上に奇数周期の *hyperbolic component* は存在しないことを示唆している。筆者達は、このとき *arc of symmetry* は  $W_2$  で *tuning* した Mandelbrot 集合に含まれると予想している。

以上の議論をまとめる。

**定理 4.1** *tricorn* は、*arc of symmetry* 上にない *maximally tuned* な奇数周期の *hyperbolic component* の *principal parabolic arc* の近くで弧状連結でない。

証明. 仮定を満たす *hyperbolic component* の *principal parabolic arc* 上の点  $c_0$  で、critical value の *Ecalte height* が 0 のものをとる。上の議論より、 $H_{c_0}$  の repelling cylinder への像は線分ではない。よって、repelling cylinder 内で  $K_{c_0}$  の像の外に開集合  $U_0, V_0$  を、 $\partial U_0$  の最下点の *Ecalte height* が負、 $\partial V_0$  の最上点の *Ecalte height* が正になるようにとる。 $H_{c_0}$  はそれらの間を通る。

$c_t$  を、parabolic arc 上 critical value の *Ecalte height* が  $t$  の点とする。 $qc$  同値性から  $|t|$  が小ならば  $U_0, V_0$  は  $c_t$  の力学系でも同じ性質を持つ。補題 3.2 より transit map は *Ecalte height* を変えないことに注意する。よって、 $\delta > 0$  と  $M_2^*$  の外の開集合列  $A_n, B_n$  で、parabolic subarc  $\gamma_0 = \{c = c_t; |t| < \delta\}$  に収束するものがとれることを示す。各  $t$  に対し、 $f_{c_t}$  の repelling cylinder 内の  $U_0$  の、*Ecalte height* が  $t$  の点  $u_t$  をとる。それらの phase が全て等しくなるように Fatou coordinates をとると、transit map により critical value は  $u_t$  に写される。従って、 $c_t$  に収束するパラメータ列  $c_n = c_t + s_n$  と自然数列  $k_n$  で、 $f_{c_n}^{o k_n}(0) = u_t$  を満たすものがとれる。明らかに  $c_n$  は  $M_2^*$  の外にある。 $c_n$  の近傍として、 $A_n$  をうまくとれば、これが求めるものである。 $B_n$  も同様にとれる。

同様に、 $U_0$  と  $V_0$  の間にある、critical point の inverse orbit の点  $v_t$  を考える。 $J_c$  は critical point の inverse orbit の閉包に含まれるので、そのような点は必ずとれる。上と同様にして、 $c_t$  に収束する点列  $c'_n$  が存在する。それは  $f_{c'_n}^{o l_n}(0) = v_t$  を満たすので、 $M_2^*$  のある *hyperbolic component* に入る。こうしてジグザグ構造の存在が示された。■

*maximally tuned* でなくても、有限回繰り込み後に *maximally tuned* になれば、同様の議論が成り立つ。このときは、適当な周期の repelling な周期点で考えればよい。残るのは  $q = 2$  の時の *arc of symmetry* 上の場合、つまり、有限回の繰り込みで実軸上に写される場合である。数値実験は、この場合でも弧状連結でないことを示唆している。それは、baby *tricorn* が *tricorn* 本体と同相でないことを意味し、3 次の polynomial-like maps の場合、straightening map が連続ではないという Douady-Hubbard [DH] の結果に対応している。

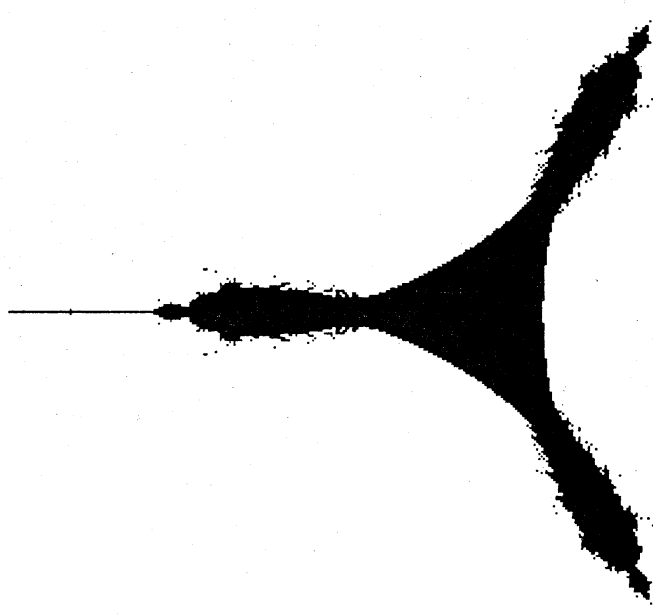
**予想 4.1** *tricorn* は、実軸とその回転上にない全ての奇数周期の *hyperbolic component* の *principal parabolic arc* の近くで弧状連結でない。

## References

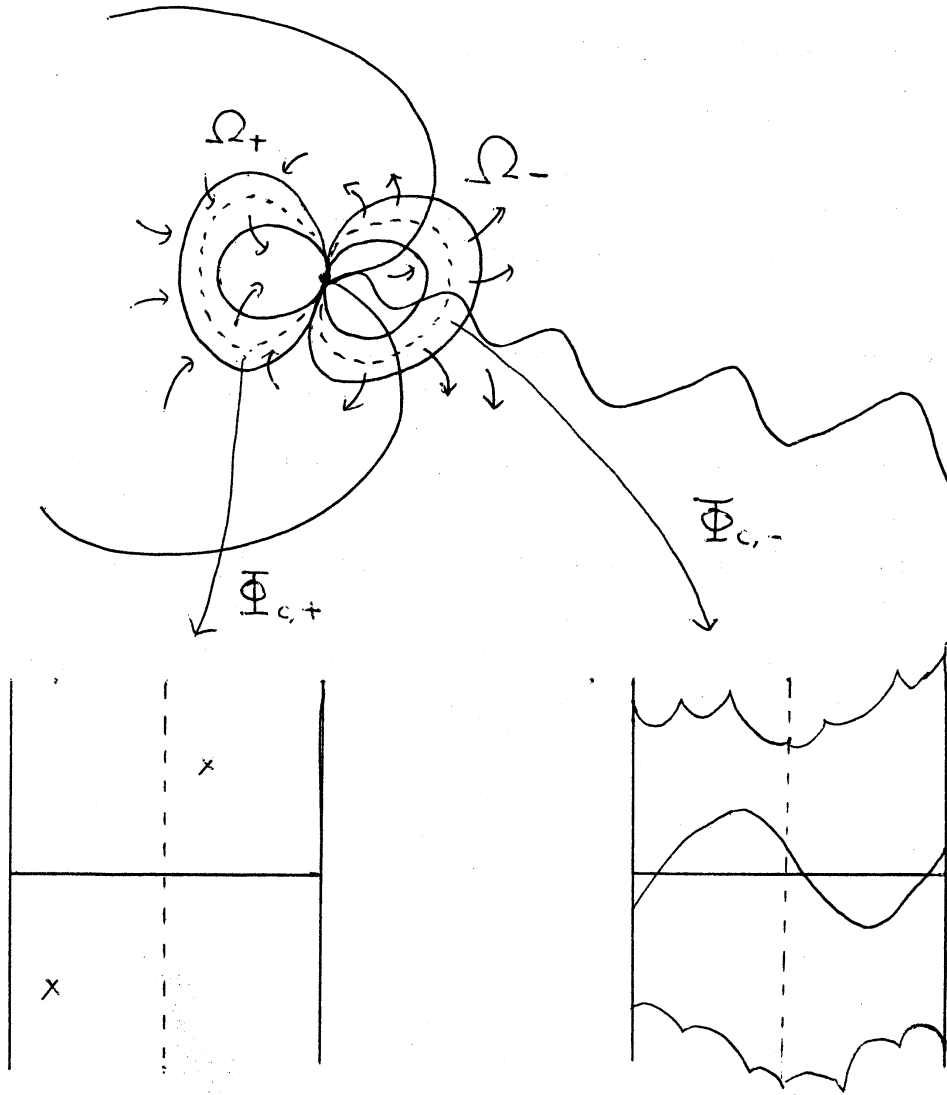
- [Bra] B. Branner: Cubic polynomials: Turning around the connectedness locus. in "Topological Methods in Modern Mathematics," Publish or Perish, 1993, pp. 391–427.
- [Rip] W.D. Crowe, R. Hasson, P.J. Rippon and P.E.D Strain-Clark: On the structure of the Mandelbar set. *Nonlinearity* 2 (1989), pp. 541–553.
- [DH] A. Douady and J.H. Hubbard: On the theory of polynomial-like mappings. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris)* 16 (1985) pp. 287–343.
- [Lav] P. Lavaurs: Systèmes dynamiques holomorphes: explosion de points periodiques paraboliques. Thèse de doctorat de l'Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1989.



- [M1] J. Milnor: Dynamics in one complex variables: introductory lectures. Stony Brook Preprint, 1990/5.
- [M2] J. Milnor: Remarks on iterated cubic maps. *Experimental Math.* 1 (1992), pp. 5–24.
- [Nak1] S. Nakane: Connectedness of the tricorn. *Erg. Th. Dyn. Sys.* 13 (1993), pp. 349–356.
- [Nak2] S. Nakane: On quasiconformal equivalence on the boundary of the tricorn. in “Structure and Bifurcation of Dynamical Systems,” World Sci. Publ., 1993, pp. 154–167.
- [NS1] S. Nakane and D. Schleicher: Non-local connectivity of the tricorn and multicorns. in “Proc. Int. Conf. Dyn. Sys. and Chaos,” World Sci. Publ., 1995, pp. 200–203.
- [NS2] S. Nakane and D. Schleicher: Hyperbolic components of the Multicorns. in preparation.
- [Shi] M. Shishikura: The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. To appear.
- [Win] R. Winters: Bifurcation in families of antiholomorphic and biquadratic maps. Thesis at Boston Univ., 1990.



擾動前



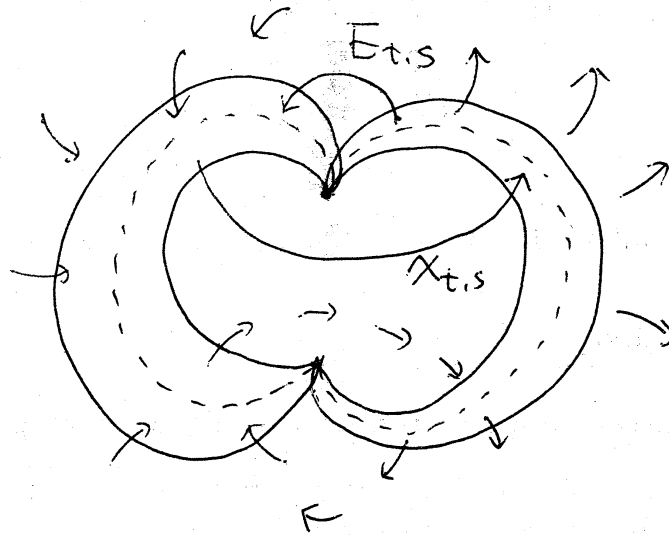
attracting cylinder

$x$ : critical point,  
critical value  
 $\rightarrow$  image

repelling cylinder

Julia集合のimage  
が映>ている。

振動後



$$R_{t,s} = X_{t,s} \circ E_{t,s}$$

四 3