数理解析研究所講究録
960巻 1996年 125-134

環のcross-sectionについて

名古屋大多元数理　松岡　学　(Manabu Matsuoka)

Rを環、Iをそのイデアル、$A:=R/I$を剰余環，$\pi:R\to A$を自然な準同型写像とする。$h:A\to R$:環準同型写像で、$\pi\circ h=id_A$を満す時、hをsectionという。この時、

$$\begin{aligned}\tau:\ A\oplus I &\longrightarrow R\\ (\alpha,x)&\longmapsto h(\alpha)+x\end{aligned}$$

は全単射であるが、

$$\begin{cases}\tau((\alpha,x)\cdot(\beta,y))=h(\alpha\beta)+xy\\ \tau(\alpha,x)\cdot\tau(\beta,y)=h(\alpha)h(\beta)+xh(\beta)+h(\alpha)y+xy\end{cases}$$

より、和は保つが積は必ずしも保たない。しかし、$A\oplus I$に積を

$$(\alpha,x)\cdot(\beta,y):=(\alpha\beta,\ xh(\beta)+h(\alpha)y+xy)$$

で入れ直すと、$A\oplus I$は環構造をもち、上のτは和、積、共に保つようになる。つまり、τは環同型写像となる。

今回の目的は、このような状況をcross-sectionの場合に

一般化して考察することである。

§1　Everett sum

さき程のことから、K, Nを環とするとき直積集合$K\times N$にどのような環構造を与えるかが重要となる。このことに関して、C. J. Everettは[1]において、1つの構成法を与えている。この章では、このEverettによる構成法を紹介する。

Nを環とする。$E_1(N)$をN自身を右N-moduleと見なした時のendomorphism ringとし、$E_2(N)$をN自身を左N-moduleと見なした時のendomorphism ringとする。$E'(N):=E_1(N)\oplus E_2(N)$をアーベル群としての直和とし、$E'(N)$に積を次のように与える。

$$(\varphi^1,\varphi^2)\cdot(\psi^1,\psi^2)=(\varphi^1\circ\psi^1,\ \psi^2\circ\varphi^2)\qquad ;(\varphi^1,\varphi^2),(\psi^1,\psi^2)\in E'(N)$$

この積に関して$E'(N)$は環の構造をもつ。

定義　$E'(N)$の元$\varphi=(\varphi^1,\varphi^2)$は、次の(i)(ii)を満す時、Nのdouble homothetismと呼ばれる。

(i) $x\cdot\varphi^1(y)=\varphi^2(x)\cdot y$

(ii) $\varphi^1(\varphi^2(x))=\varphi^2(\varphi^1(x))\qquad (x,y\in N)$

Nのdouble homothetism全体を$DH(N)$で表す。

定義　K, Nを環とする。2つの写像

$$[\ ,\ ]:K\times K\longrightarrow N \qquad \text{と} \qquad d:K\longrightarrow DH(N)$$

$$(\alpha,\beta)\longmapsto[\alpha,\beta] \qquad\qquad \alpha\longmapsto d_\alpha=(d_\alpha^1,d_\alpha^2)$$

が次の10個の条件を満す時、$([\,,\,], d)$ を E-couple for K and N と呼ぶ。

(1) $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$

(2) $[\alpha,\beta]+[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\beta+\gamma]+[\beta,\gamma]$

(3) $[0,\alpha]=0$

(4) $d^1_{\alpha+\beta}x+[\alpha,\beta]x=d^1_\alpha x+d^1_\beta x$

(5) $d^2_{\alpha+\beta}x+x[\alpha,\beta]=d^2_\alpha x+d^2_\beta x$

(6) $d^1_\gamma([\alpha,\beta])=[\gamma\alpha,\gamma\beta]$

(7) $d^2_\gamma([\alpha,\beta])=[\alpha\gamma,\beta\gamma]$

(8) $d^1_\alpha(d^2_\beta x)=d^2_\beta(d^1_\alpha x)$

(9) $d^1_0 x=d^2_0 x=0$

(10) $d_{\alpha\beta}=d_\alpha d_\beta \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in K,\ x\in N)$

定理1. K, N を環、$([\,,\,],d)$ を E-couple for K and N とする。この時、直積集合 K×N に次のように演算を定めることにより、K×N は環の構造をもつ

$$(\alpha,x)+(\beta,y)=(\alpha+\beta,\ [\alpha,\beta]+x+y)$$

$$(\alpha,x)\cdot(\beta,y)=(\alpha\cdot\beta,\ d^1_\alpha y+d^2_\beta x+xy)$$

この環を $K\cdot N_{([\,,\,],d)}$ で表し、K と N の $([\,,\,],d)$ に関する Everett sum と呼ぶ。

証明

この$+$, $\cdot$ が環の公理を満すことは、E-couple の10個の条件から分かる。

(証終)

embedding $\iota : N \longrightarrow K\cdot N_{([,],d)}$, $x \longmapsto (0, x)$ によって、N は、$K\cdot N_{([,],d)}$ のイデアルと見なされる。$\pi : K\cdot N_{([,],d)} \longrightarrow K$, $(\alpha, x) \longmapsto \alpha$ とすれば、

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} K\cdot N_{([,],d)} \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0$$

は環の完全系列である。

§2 cross-section と Everett sum の関係

定義　R を環、I を R のイデアル、$A = R/I$ とし、$\pi : R \to A$ を natural homomorphism とする。写像 $f : A \longrightarrow R$ が

(i) $f(0) = 0$　(ii) $f(ab) = f(a)f(b)$　(iii) $\pi \circ f = id_A$

を満す時、f を A から R への cross-section という。

定理2.　R を環、I を R のイデアル、$A = R/I$ とする。

$f : A \longrightarrow R$: cross-section が存在するための必要十分条件はある E-couple $([,],d)$ for A and I と次の図式を可換にする $\nabla : A\cdot I_{([,],d)} \longrightarrow R$: 環同型写像が存在することである。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A\cdot I_{([\,,\,],d)} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

証明　あるE-couple $([\,,\,],d)$ for A and I と上の図式を可換にする同型写像 $\nabla: A\cdot I_{([\,,\,],d)} \longrightarrow R$ が存在したとする。この時、$f: A \longrightarrow R$ を $f(\alpha) = \nabla(\alpha, 0)$ と定めると、この f は cross-section となる。

逆に、cross-section $f: A \longrightarrow R$ が存在したとする。この時、写像 $[\,,\,]: A \times A \longrightarrow I$ を $[\alpha, \beta] = f(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha+\beta)$ によって写像 $d: A \longrightarrow DH(I)$ を $d_\alpha = (d_\alpha^1, d_\alpha^2)$, $d_\alpha^1 x = f(\alpha)x$, $d_\alpha^2 x = x f(\alpha)$ $(\alpha, \beta \in A,\ x \in I)$ によって定めると、10個の条件を満たし、$([\,,\,],d)$ は E-couple for A and I となる。

又、$\nabla: A\cdot I_{([\,,\,],d)} \longrightarrow R$ を $\nabla(\alpha, x) = f(\alpha) + x$ で定めると、この ∇ は、上の図式を可換にする環同型写像となる。(証終)

cross-section $f: A \longrightarrow R$ を Everett sum $A\cdot I_{([\,,\,],d)}$ によって特徴づけることができる、という事がこの定理から分かる。

§3　cross-section の extension

R^* は環、R はその部分環とする。I^* は R^* のイデアル、

I は R のイデアルで $I=I^*\cap R$ とする。この時、自然に $A=R/I$ は $A^*=R^*/I^*$ の部分環と見なされる。以下において、このような R^*、R、I^*, I、A^*, A を固定しておく。

定義　$f: A\longrightarrow R$ を cross-section とする。cross-section $f^*: A^*\longrightarrow R^*$ で $f^*|_A=f$ となる f^* を f の extension という。

定義　$([\ ,\ ], d)$ を E-couple for A and I、$([\ ,\ ]^*, d^*)$ を E-couple for A^* and I^* とする。$([\ ,\ ]^*, d^*)$ が $([\ ,\ ], d)$ の extension とは、

(i) $[\ ,\ ]^*: A^*\times A^*\longrightarrow I^*$ 、 $[\ ,\ ]: A\times A\longrightarrow I$

$[\ ,\ ]^*|_{A\times A}=[\ ,\ ]$

(ii) $d_\alpha^*=(d_\alpha^{*1}, d_\alpha^{*2})$ 、 $d_\alpha=(d_\alpha^1, d_\alpha^2)$

任意の $\alpha\in A$ に対して　$d_\alpha^{*1}|_I=d_\alpha^1$ 、 $d_\alpha^{*2}|_I=d_\alpha^2$

となるときをいう。

$([\ ,\ ]^*, d^*)$ が $([\ ,\ ], d)$ の extension であるとき、injection $A\cdot I_{([\ ,\ ],d)}\longrightarrow A^*\cdot I^*_{([\ ,\ ]^*,d^*)}$, $(\alpha, x)\longmapsto(\alpha, x)$ によって、$A\cdot I_{([\ ,\ ],d)}$ を $A^*\cdot I^*_{([\ ,\ ]^*,d^*)}$ の部分環と見なすことができる。

cross-section の extension が E-couple の extension によって特徴づけられることが次の定理から分かる。

定理3.　$f: A\longrightarrow R$ を cross-section とし、$([\ ,\ ], d)$ を定理2

のように定められたE-couple for A and I とする。

cross-section $f^*: A^* \longrightarrow R^*$ で f の extension であるものが存在するための必要十分条件は、$([\ ,\ ], d)$ の extension である E-couple $([\ ,\ ]^*, d^*)$ for A^* and I^* と次の図式を可換にする環同型写像 $\nabla^*: A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^*, d^*)} \longrightarrow R^*$ で、任意の $\alpha \in A$ に対して $\nabla^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$ となるものが存在することである。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^*, d^*)} & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla^*} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

証明　$f^*: A^* \longrightarrow R^*$ を f の extension である cross-section とする。

この時、
$$
\begin{cases}
[\alpha, \beta]^* = f^*(\alpha) + f^*(\beta) - f^*(\alpha + \beta) & \alpha, \beta \in A^* \\
d_\alpha^{*1} x = f^*(\alpha) x \ ,\ d_\alpha^{*2} x = x f^*(\alpha) & \alpha \in A^*, x \in I^*
\end{cases}
$$

によって $([\ ,\ ]^*, d^*)$ を定めると、これは $([\ ,\ ], d)$ の extension である。$\nabla^*: A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^*, d^*)} \longrightarrow R^*$ を $\nabla^*(\alpha, x) = f^*(\alpha) + x$ で定めれば、∇^* は上の図式を可換にする環同型写像となる。

又、任意の $\alpha \in A$ に対して、　$\nabla^*(\alpha, 0) = f^*(\alpha) = f(\alpha)$

逆に、$([\ ,\ ], d)$ の extension である E-couple $([\ ,\ ]^*, d^*)$ for A^* and I^* と上の図式を可換にする環同型写像 $\nabla^*: A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^*, d^*)} \longrightarrow R^*$ で任意の $\alpha \in A$ に対して $\nabla^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$ となるものがあるとする。このとき、$f^*: A^* \longrightarrow R^*$ を $f^*(\alpha) = \nabla^*(\alpha, 0)$ と

定めると、f^* は A^* から R^* への cross-section になる。任意の $\alpha \in A$ に対して、$f^*(\alpha) = \sigma^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$ なので、f^* は f の extension である。 (証終)

E-couple $e = ([\ ,\ ], d)$ の extension に対して、e-equivalent という概念を導入しておく。

定義 $e = ([\ ,\ ], d)$ を E-couple for A and I とし、$([\ ,\ ]^*, d^*)$、$([\ ,\ ]^{**}, d^{**})$ を共に e の extension である E-couple for A^* and I^* とする。$([\ ,\ ]^*, d^*)$ と $([\ ,\ ]^{**}, d^{**})$ が e-equivalent であるとは、次の図式を可換にし、かつ $\tau|_{A \cdot I_{([\ ,\ ], d)}} = id$ を満す環同型写像 $\tau : A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^*, d^*)} \longrightarrow A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^{**}, d^{**})}$ が存在することをいう。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^*, d^*)} & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I^*_{([\ ,\ ]^{**}, d^{**})} & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

定理4. $f : A \longrightarrow R$ を cross-section とし、$([\ ,\ ], d)$ を定理2のように定められた E-couple for A and I とする。f^*, g^* を共に f の extension である A^* から R^* への cross-section であるとする。$([\ ,\ ]^*, d^*)$、$([\ ,\ ]^{**}, d^{**})$ を共に次のように定められる $e = ([\ ,\ ], d)$ の extension である E-couple for A^*

and I^* とする。

$$\begin{cases} [\alpha,\beta]^* = f^*(\alpha) + f^*(\beta) - f^*(\alpha+\beta) & (\alpha,\beta\in A^*) \\ d_\alpha^{*1}x = f^*(\alpha)x \ , \ d_\alpha^{*2}x = xf^*(\alpha) & (\alpha\in A^*,\ x\in I^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\alpha,\beta]^{**} = g^*(\alpha) + g^*(\beta) - g^*(\alpha+\beta) & (\alpha,\beta\in A^*) \\ d_\alpha^{**1}x = g^*(\alpha)x \ , \ d_\alpha^{**2}x = xg^*(\alpha) & (\alpha\in A^*,\ x\in I^*) \end{cases}$$

この時、$([\ ,\ ]^*, d^*)$ と $([\ ,\ ]^{**}, d^{**})$ は、e-equivalentである。

証明

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I^* \arrow[r] \arrow[d, "id"] & A^*\cdot I^*_{([\,,\,]^*,d^*)} \arrow[r] \arrow[d, "\nabla^*"] & A^* \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^* \arrow[r] & R^* \arrow[r] & A^* \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^* \arrow[r] \arrow[u, "id"] & A^*\cdot I^*_{([\,,\,]^{**},d^{**})} \arrow[r] \arrow[u, "\nabla^{**}"] & A^* \arrow[r] \arrow[u, "id"] & 0 \end{tikzcd}$$

のような可換図式が成り立つ。ここで、∇^*、∇^{**} は、$\nabla^*(\alpha,x) = f^*(\alpha)+x$ 、$\nabla^{**}(\alpha,x) = g^*(\alpha)+x$ である。

又、任意の $(\alpha,x)\in A\cdot I_{([\,,\,],d)}$ に対して、$\nabla^*(\alpha,x) = f^*(\alpha)+x = f(\alpha)+x = g^*(\alpha)+x = \nabla^{**}(\alpha,x)$ よって、環同型写像 $A^*\cdot I^*_{([\,,\,]^*,d^*)} \longrightarrow A^*\cdot I^*_{([\,,\,]^{**},d^{**})}$ は $A\cdot I_{([\,,\,],d)}$ 上では不変である。

（証終）

この e-equivalent という概念は、cross-section の extension の一意性を議論する時に有益となるが、それらの事は、まだまだこれからの課題である。

References

[1] Everett, C. J. : An extension theory for rings, Amer. J. Math. 64 (1942), 363-370

[2] Rédei, L. : Algebra I, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.

[3] Sumiyama, T. : On double homothetisms of rings and local rings with finite residue fields, Math. J. Okayama Univ. 33 (1991), 13—20