数理解析研究所講究録
961巻 1996年 125-136

On inhomogeneous Diophantine approximation and inhomogeneous continued fraction expansion

マッquォーリー
Macquarie大 小松 尚夫 (Takao Komatsu)

§1. Introduction

$$\mathcal{M}(\theta,\phi)=\liminf_{|q|\to\infty}|q|\,\|q\theta-\phi\|$$

と置き、この値について考える。ここで、θは無理数、ϕは実数で、どんな整数qについても、$q\theta-\phi\notin\mathbb{Z}$を満たすものとする。また、$\|\cdot\|$で・の最も近い整数からの距離を表す。この値を考える上で、次の2つの値を導入する。

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)=\liminf_{q\to+\infty}q\,\|q\theta-\phi\|,$$

$$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)=\liminf_{q\to-\infty}|q|\,\|q\theta-\phi\|=\liminf_{q\to+\infty}q\,\|q\theta+\phi\|.$$

すると $\mathcal{M}(\theta,\phi)=\min(\mathcal{M}_+(\theta,\phi),\mathcal{M}_-(\theta,\phi))$.

$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$ または $q\|q\theta-\phi\|$ に関する値の上からの評価については、1950年代までに多くの著者に取り上げられ進展してきた。斉次、非斉次(ϕが整数でない場合)それぞれについて代表的な結果を挙げると、

Hurwitz　[斉次]

$$q\|q\theta\| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす整数 $q>0$ が無限個存在する。

Cassels (1957)　[非斉次]

$$|q|\,\|q\theta-\phi\| < \frac{1}{4}$$

を満たす整数 q が無限個存在する。

Cassels (1954)　[非斉次]

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi) \leqq \frac{4}{11}$$

しばらく最近数十年間、この問題についてほとんど大きい発展はなかった。ところが最近次の結果が発表された。

Cusick, Rockett and Szüsz (1994)　[4]

$\theta=(1+\sqrt{5})/2=[1,1,1,\cdots]$ のとき、次のような無限列が得られる。

$$\delta_0=\frac{1}{4\sqrt{5}} > \delta_1=\frac{1}{5\sqrt{5}} > \delta_2 > \delta_3 > \cdots$$

ここで、$\delta_0=\mathcal{M}(\theta,\frac{1}{2})$, $\delta_1=\mathcal{M}(\theta,\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\phi\in S_k$ のとき、$\delta_k=\mathcal{M}(\theta,\phi)$ $(k\geqq 0)$, $\delta_n\to\frac{1}{2(5+\sqrt{5})}$ $(n\to\infty)$。

注　Khinchin の結果 (1946、詳細は後述) から、

$$\sup_{\phi}\mathcal{M}(\theta,\phi) \leqq \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

しかし、引用された $\mathcal{M}(\theta,\phi)$ の値を与える計算の定理と実際の δ_k の計算の間に gap があることが、一部で指摘されている。そこでまず、$\mathcal{M}(\theta,\phi)$ 特に $\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$ がどのように与えるか既知の諸結果、予想、新しい結果を与え、比較考察する。また $\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$ を考える上でもとになる、非斉次連分数展開、すなわち ϕ を θ の連分数展開と関連して表すこと、に関する諸結果も紹介する。最終的には、

$$\theta = [1,1,1,\cdots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

を一般化して、ある正整数 a についての

$$\theta = [a,a,a,\cdots] = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

に関して Cusick, Rockett and Szüsz の結果が一般化できないかどうかアプローチを試みる。

§2. 非斉次連分数展開と $\mathcal{M}(\theta,\phi)$ (または $\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$)

$\theta = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$ の連分数展開を

$$\theta = a_0 + \theta_0, \qquad a_0 = \lfloor \theta \rfloor,$$

$$\frac{1}{\theta_{n-1}} = a_n + \theta_n, \qquad a_n = \left\lfloor \frac{1}{\theta_{n-1}} \right\rfloor \quad (n=1,2,\cdots)$$

によって表す。ここで $\lfloor\cdot\rfloor$ は・の floor，・の整数部分とする。θ の k 次近似は、$p_k/q_k = [a_0, a_1, \cdots, a_k]$ によ

って定義され、

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (k=0,1,\cdots),\quad p_{-2}=0,\ p_{-1}=1,$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k=0,1,\cdots),\quad q_{-2}=1,\ q_{-1}=0$$

を満たす。$D_k = q_k\theta - p_k$ とおくと、

$$D_k = (-1)^k \theta_0\theta_1\cdots\theta_k \qquad (k=0,1,\cdots)$$

であり、$(-1)^k D_k > 0$、$D_k = a_k D_{k-1} + D_{k-2}$ $(k=2,3,\cdots)$ を満たす。実数ϕを、一般性を失うことなく、$0<\phi<1$ とする。

[1] Descombesのアルゴリズム [5] (Cf. [3])

$\rho_n = x_n\theta - \phi - y_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とおき、数列$\{(x_n, y_n)\}$を次のように定める。$r_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{\theta_n} - \frac{\rho_n}{D_n} \right\rfloor$ $(n=0,1,2,\cdots)$。$x_0=1$, $y_0=\lfloor \theta-\phi \rfloor$ で、まずStep《A_0》に進む。

《A_n》(1) $r_{n+1} \neq a_{n+1}$ ならば、

$$x_{n+1} = x_n + r_{n+1}q_n + q_{n-1},\quad y_{n+1} = y_n + r_{n+1}p_n + p_{n-1}$$

と置き、《A_{n+1}》に進む。

(2) $r_{n+1} = a_{n+1}$ ならば、

$$x_{n+1} = x_n + q_{n-1},\qquad y_{n+1} = y_n + p_{n-1}$$

と置き、《B_{n+1}》に進む。

《B_n》 $$x_{n+1} = x_n - q_n,\qquad y_{n+1} = y_n - p_n$$

と置き、《A_{n+1}》に進む。

このとき、

$$\phi = \lim_{n\to\infty}(x_n\theta - y_n)$$

であり、

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi) = \liminf_{n\to+\infty} \min(x_n|\rho_n|, x_n'|\rho_n'|)$$

によって与えられる。ここで、

$$x_n' = x_n + q_{n-1},\quad y_n' = y_n + p_{n-1},\quad \rho_n' = x_n'\theta - \phi - y_n'$$

である。

$\boxed{2}$ Sósのアルゴリズム [9]

Unit circle 上で考える。

(1-1) ϕが $2 \leqq r \leqq a_1+1$ である整数rに対して $(r-1)\theta$ と $r\theta$ の間にあるとき、$c_1 = r$ と置く。次に c_2 を決める。

(1-2) ϕが $(a_1+1)\theta$ と θ の間にあるとき、$c_1 = a_1+1$ 及び $c_2 = 0$ と置く。次に c_3 を決める。

(2-1) ϕが $1 \leqq r' \leqq a_2$ である整数r'に対して $(c_1 q_0 + (r'-1)q_1)\theta$ と $(c_1 q_0 + r' q_1)\theta$ の間にあるとき、$c_2 = r'$ と置く。次にc_3を決める。

(2-2) ϕが $(c_1 q_0 + a_2 q_1)\theta$ と $((c_1-1)q_0))\theta$ の間にあるとき、$c_2 = a_2$ 及び $c_3 = 0$ と置く。次に c_4 を決める。

(k-1) ϕが $1 \leqq r'' \leqq a_k$ である整数 r'' に対して $(c_1 q_0 + c_2 q_1 + \cdots + (r''-1)q_{k-1})\theta$ と $(c_1 q_0 + c_2 q_1 + \cdots + r'' q_{k-1})\theta$

の間にあるとき、$c_k = r''$ と置く。次に c_{k+1} を決める。

(k-2) ϕが $(c_1 q_0 + c_2 q_1 + \cdots + a_k q_{k-1})\theta$ と $(c_1 q_0 + c_2 q_1 + \cdots + (c_{k-1} - 1) q_{k-2})\theta$ の間にあるとき、$c_k = a_k$ 及び $c_{k+1} = 0$ と置く。次に c_{k+2}を決める。

このアルゴリズムでは

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} D_k$$

と表される。また、

$$\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \liminf_{n \to +\infty} \min(Q_n \| Q_n\theta - \phi \|, Q_n' \| Q_n'\theta - \phi \|)$$

ここで、

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} q_k, \qquad Q_n' = \begin{cases} Q_n - q_{n-1} & \text{if } c_{n+1} \neq 0; \\ Q_n - q_n & \text{if } c_{n+1} = 0. \end{cases}$$

③ Nishioka, Shiokawa and Tamura のアルゴリズム [8]

$\theta_0, \theta_1, \cdots$ を使って、正整数 $b_0, b_1, \cdots$ を次のように定める。

$$\phi = b_0 - \phi_0, \qquad b_0 = \lceil \phi \rceil,$$

$$\frac{\phi_{n-1}}{\theta_{n-1}} = b_n - \phi_n, \qquad b_n = \left\lceil \frac{\phi_{n-1}}{\theta_{n-1}} \right\rceil \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

ここで、$\lceil \cdot \rceil$ は実数・のceiling を表す。

このとき、

$$\phi = b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} D_k$$

である。また、$B_n=\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} q_k$ とおくとき、$\mu_+(\theta,\phi)$ は $B_n\|B_n\theta+\phi\|$ の $\liminf_{n\to+\infty}$ と関連していることが予想される。

④ Borwein兄弟のアルゴリズム [1]

$\theta_0, \theta_1, \cdots$ を用いて、非負整数 $d_1, d_2, \cdots$ を次のように定める。

$$\gamma_0=\phi, \qquad \frac{\gamma_{n-1}}{\theta_{n-1}}=d_n+\gamma_n, \qquad d_n=\left\lfloor\frac{\gamma_{n-1}}{\theta_{n-1}}\right\rfloor \quad (n=1,2,\cdots).$$

このとき、

$$\phi=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_{k+1} D_k$$

が成り立つ。また、$C_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k d_{k+1} q_k$ とおくとき、$\mu_+(\theta,\phi)$ は $|C_n|\|C_n\theta-\phi\|$ の $\liminf_{n\to+\infty}$ と関連していることが予想される。

⑤ 新しいアルゴリズム (Cf. [2], [7])

ξ_n $(n=1,2,\cdots)$ を

$$\|\xi_n\theta-\phi\|=\min_{0\leq q<q_n}\|q\theta-\phi\|$$

を満たす整数 $(0\leq\xi_n<q_n)$ とすると、

$$\xi_n\equiv(-1)^n q_{n-1}(\lfloor -q_n\phi\rfloor+t) \qquad \mathrm{mod}\ q_n$$

で与えられる。ここで、

$$t = \begin{cases} -1, 0 \text{ または } 1 & (n\text{が奇数}); \\ 0, 1 \text{ または } 2 & (n\text{が偶数}). \end{cases}$$

このとき、

$$\phi = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \|\xi_n\theta\| & \text{if } 0<\phi\leqq\frac{1}{2}; \\ 1-\lim_{n\to\infty} \|\xi_n\theta\| & \text{if } \frac{1}{2}<\phi<1. \end{cases}$$

また $\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$ に関しては、次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 1.</u>

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi) = \liminf_{n\to+\infty} \Xi_n,$$

ここで

$$\Xi_n = \begin{cases} \min\left(\xi_n\|\xi_n\theta-\phi\|,\ \xi_n'\|\xi_n'\theta-\phi\|,\ \xi_n''\|\xi_n''\theta-\phi\|\right), \\ \qquad \text{if } \frac{q_n}{2} < \xi_n < \frac{1}{\theta^{n+1}}\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\left(\frac{1}{2}-\{-q_n\phi\}\right)\right) \\ \qquad\qquad \text{and } \xi_n \neq \xi_{n-1}; \\ \xi_n\|\xi_n\theta-\phi\|, \qquad \text{otherwise}, \end{cases}$$

さらに、$\xi_n' = \xi_n - q_{n-1}\ (\geqq q_{n-1})$, $\xi_n'' = \xi_n + \left\lceil \frac{q_n-\xi_n}{q_{n-1}} \right\rceil q_{n-1} + q_{n-1} - q_n$。

同様に $\mathcal{M}_-(\theta,\phi)$ については、Theorem 1で $-\phi$ を $+\phi$ にすべて入れ替えたものが成り立つ。

上記の定理ではやや扱いにくいが、$\theta=[0,a,a,\cdots]$ の時には扱いやすい形になることが多い。

Theorem 2.

$\theta = [0, a, a, \cdots] = \dfrac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$ $(a \geqq 2)$ のとき、

$$\mathcal{M}_+\left(\theta, \frac{1}{a}\right) = \liminf_{n\to\infty} \xi_n \| \xi_n \theta - \phi \| = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+4}},$$

ここで、 $\xi_{2n-1} = \xi_{2n} = \dfrac{q_{2n-1}}{a}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

この定理は、$a=1$ の時は明らかに含まれる。ただし ξ_n の形は異なる。また同様にして、 $\mathcal{M}_-\left(\theta, \dfrac{1}{a}\right) = \left(1-\dfrac{1}{a}\right)^2 \dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}$ が得られるから、両者を合わせて、

$$\mathcal{M}\left(\theta, \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$$

が成り立つ。

§3. Khinchin の結果

$\lambda = \mathcal{M}(\theta, 0)$ $(= \mathcal{M}_\pm(\theta, 0))$, $\lambda_n = q_n \| q_n \theta \|$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおく。 $\theta = [0, a, a, \cdots]$ のときは、

$$\lambda = \liminf_{q\to\infty} q \| q\theta \| = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$$

である。このとき Khinchin は、斉次近似定数 λ から非斉次近似定数 $\mathcal{M}(\theta, \phi)$ の上限を次のように示した。

Lemma ([6])

$a=1$ または a が偶数のとき、

$$\sup_{\phi} \mu(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2} = \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}} .$$

$a(\geqq 3)$ が奇数のとき、

$$\sup_{\phi} \mu(\theta,\phi) < \frac{1}{4}\sqrt{1-4\lambda^2} = \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}} ,$$

特に十分大きい n に対して、$\Theta_n = 2\|q_n\phi\|$ とおくと、

$\Theta_n \leqq \sqrt{2}\lambda_n$ のとき、

$$\mu(\theta,\phi) \leqq \frac{\lambda_n}{4} - \frac{\Theta_n^2}{16\lambda_n} \leqq \frac{\lambda_n}{4} \longrightarrow \frac{1}{4\sqrt{a^2+4}} \quad (n\to\infty)$$

$\sqrt{2}\lambda_n \leqq \Theta_n \leqq \sqrt{8}\lambda_n$ のとき、

$$\mu(\theta,\phi) \leqq \frac{\Theta_n^2}{16\lambda_n} \leqq \frac{\lambda_n}{2} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a^2+4}} \quad (n\to\infty)$$

$\Theta_n \geqq \sqrt{8}\lambda_n$ のとき、

$$\mu(\theta,\phi) \leqq \frac{\sqrt{\Theta_n^2-4\lambda_n^2}}{4} \leqq \frac{a+1}{a+2}\,\frac{\sqrt{1-4\lambda_n^2}}{4} \longrightarrow \frac{a+1}{a+2}\,\frac{a}{4\sqrt{a^2+4}} \quad (n\to\infty)$$

これらの結果に対して、$a=1$ のときの Cusick, Rockett & Szüsz の結果も部分的に含む次の定理を得た。

Theorem 3.

(1) $$\mu\left(\theta,\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a^2\sqrt{a^2+4}} \qquad (a=1,2,\cdots)$$

(2) $$\mu\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\right) = \frac{1}{(a^2+4)\sqrt{a^2+4}} \qquad (a=1,2,\cdots)$$

(3) $$\mu\left(\theta, \frac{\sqrt{a}}{2}\right) = \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}} \qquad (a=1,2,4)$$

(4) $$\mu\left(\theta, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{a^2+4}} \qquad (a は奇数)$$

(3) は 6 以上の偶数に対しては成り立たない。また、$\mu(\theta,\phi) = 1/2\sqrt{a^2+4}$ などとなる ϕ が何であるかは（あるいは存在するかどうかは）わかっていない。この定理から容易に想像されるように、どんな ϕ について

$$\mu(\theta,\phi) = \frac{\phi^2}{4\sqrt{a^2+4}}$$

となるか、という問題も残されている。

References

1. J.M. Borwein and P.B. Borwein, 'On the generating function of the integer part : $[n\alpha+\gamma]$', J. Number Theory 43 (1993), 293 − 318.

2. D. Bowman, 'Approximation of $\lfloor n\alpha+s \rfloor$ and the zero of $\{n\alpha+s\}$', J. Number Theory 50 (1995), 128 − 144.

3. J.W.S. Cassels, 'Über $\underline{\lim}_{x\to+\infty} x|\vartheta x+\alpha-y|$', Math Ann. 127 (1954), 288–304.

4. T. W. Cusick, A.M. Rockett and P. Szüsz, 'On inhomogeneous Diophantine approximation', J. Number Theory 48 (1994), 259–283.

5. R. Descombes, 'Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée', Ann. Sci, École Norm Sup. 73 (1956), 283–355.

6. A. Ya. Khinchin, 'On the problem of Tchebychef,' Izv. Akad. Nauk SSSR 10 (1946), 281–294. (Russian)

7. T. Komatsu, 'The fractional part of $n\theta+\phi$ and Beatty sequences', J. Théorie des Nombres de Bordeaux (to appear).

8. K. Nishioka, I. Shiokawa and J. Tamura, 'Arithmetical properties of a certain power series,' J. Number Theory 42 (1992), 67–87.

9. V. T. Sós, 'On the theory of Diophantine approximations II', Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), 229–241.