数理解析研究所講究録
961 巻 1996 年 137-149

Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences

慶應大学大学院　田中 孝明 (TAKA-AKI TANAKA)

1　定理

本講演において $\{a_k\}_{k\geq 0}$ は漸化式

$$a_{k+n} \ = \ c_1 a_{k+n-1} + \cdots + c_n a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

をみたす線形回帰数列とする. ただし, 初期値 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ および $c_1, \ldots, c_n$ は非負整数であり, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ のうち少なくともひとつは 0 ではなく, $c_n \neq 0$ と仮定する. 以下,

$$\Phi(X) \ = \ X^n - c_1 X^{n-1} - \cdots - c_n \tag{2}$$

とおく. $\boldsymbol{Q}$ を有理数体とする. Mahler は次の定理を証明した.

Theorem(Mahler [4]). $\{a_k\}_{k\geq 0}$ を (1) をみたす線形回帰数列とする. $\Phi(X)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約で, その根 $\rho_1, \ldots, \rho_n$ は, $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|, \ldots, |\rho_n|\}$ をみたすとする. このとき, α を $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数とすると, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{a_k}$ は超越数である.

以下, 定理を述べるため記号を準備する. (1) をみたす 2 つの線形回帰数列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$, $\{b_k\}_{k\geq 0}$ に対し, ある非負整数 l が存在して,

$$a_k = b_{k+l} \ (0 \leq k \leq n-1) \quad \text{または} \quad b_k = a_{k+l} \ (0 \leq k \leq n-1)$$

となるとき, $\{a_k\}_{k\geq 0} \sim \{b_k\}_{k\geq 0}$ とかく. $\sim$ は同値関係である. この否定を $\{a_k\}_{k\geq 0} \not\sim \{b_k\}_{k\geq 0}$ とかく. 関数 $f(z)$ の l 階導関数を $f^{(l)}(z)$ と表す. $\overline{\boldsymbol{Q}}$ を代数的数の全体とする. 本講演において我々は次の定理を証明する.

Theorem 1. $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}$ $(i = 1, \ldots, s)$ を (1) をみたす s 個の線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は ± 1 を根に持たず, 相異なる根の比はいずれも 1 の巾根でないとする.

$$f_i(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(i)}} \quad (1 \leq i \leq s)$$

とおく. α を $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数とする. このとき, $\{f_i^{(l)}(\alpha)\}_{1\leq i\leq s,\ l\geq 0}$ が代数的独立であるための必要十分条件は $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0} \not\sim \{a_k^{(j)}\}_{k\geq 0}$ $(1 \leq i < j \leq s)$ である.

Theorem 2. $\{a_k\}_{k\geq 0}$ を (1) をみたす線形回帰数列で等比数列でないものとする. $\Phi(X)$ は Theorem 1 と同じ条件をみたすものとする.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$$

とおく. $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を $0 < |\alpha_i| < 1$ $(1 \leq i \leq r)$ をみたす代数的数とする. このとき, 次の 3 つの条件は同値である.

(i) $\{f^{(l)}(\alpha_i)\}_{1\leq i\leq r,\ l\geq 0}$ は代数的従属である.

(ii) $1, f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_r)$ は $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上線形従属である.

(iii) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ のある空でない部分集合 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$ に対して, 1 の巾根 $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ と 0 でない代数的数 γ が存在して, $\alpha_{i_q} = \zeta_q \gamma$ $(1 \leq q \leq s)$ であり, さらに, 少なくともひとつは 0 でない代数的数 $d_1, \ldots, d_s$ が存在して,

$$\sum_{q=1}^{s} d_q {\zeta_q}^{a_k} = 0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ.

Remark 1. $\Phi(X)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上既約な 2 次以上の多項式である場合には, その根 $\rho_1, \ldots, \rho_n$ が $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|, \ldots, |\rho_n|\}$ をみたすための必要十分条件は, ρ_i/ρ_j $(i \neq j)$ がいずれも 1 の巾根でないことである（第 2 節参照）. 従って, 我々の定理における $\Phi(X)$ に関する条件は, Mahler [4] の定理における条件よりも弱い.

Remark 2. Theorem 2 では $\{a_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列である場合を除いたが, その場合は Loxton-van der Poorten [3] により解決されている.

2 補題

$\Omega = (\omega_{ij})$ は非負整数を成分とする n 次正方行列とする. このとき, Ω の固有値の絶対値の最大値 ρ はそれ自身 Ω の固有値となる（cf. Gantmacher [2, p.66, Theorem 3]）. $\boldsymbol{C}$ を複素数の全体とし, $\boldsymbol{C}^n$ の点 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ に対して, 変換 $\Omega : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ を

$$\Omega \boldsymbol{z} = \left(\prod_{j=1}^{n} {z_j}^{\omega_{1j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{n} {z_j}^{\omega_{nj}}\right) \tag{3}$$

で定義する. 行列 Ω と代数点 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は次の性質を持つと仮定する. 但し, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ はいずれも 0 でない代数的数とする.

(I) Ω は正則で, 1 の巾根を固有値に持たない. これより $\rho > 1$ が従う.

(II) $\Omega^k (k = 1, 2, \ldots)$ の各成分は $O(\rho^k)$ である.

(III) $\Omega^k \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$ とおくとき, 十分大きなすべての k に対して,

$$\log|\alpha_i^{(k)}| \le -c\rho^k \quad (1 \le i \le n)$$

が成り立つ. ここで, c は正定数である.

(IV) 原点の近傍で収束し恒等的に 0 ではない n 変数の任意の巾級数 $f(\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ に対して, $f(\Omega^k \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ となる自然数 k が無限に多く存在する.

条件 **(II)** は Ω の絶対値 ρ の固有値がすべて Ω の最小多項式の単根ならばみたされる.

以下, K は代数体とする. 体 K 上の n 変数多項式環及び形式的巾級数環をそれぞれ $K[z_1, \ldots, z_n]$, $K[[z_1, \ldots, z_n]]$ で表す.

Lemma 1(Nishioka [7]). $f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}) \in K[[z_1, \ldots, z_n]]$ は原点を中心とする多重円板 U で収束し, 関数方程式

$$\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(\Omega \boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\Omega \boldsymbol{z}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ b_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

をみたすとする. ただし, A は K の元を成分とする m 次正方行列で, $b_i(\boldsymbol{z}) \in K[z_1, \ldots, z_n]$ $(1 \le i \le m)$ である. さらに, n 次正方行列 Ω と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (但し, 各 α_i は 0 でない代数的数) は条件 **(I)**~**(IV)** をみたし, $\boldsymbol{\alpha} \in U$ とする. このとき, $f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_r(\boldsymbol{z})$ $(r \le m)$ が K 上 modulo $K[z_1, \ldots, z_n]$ で線形独立なら, $f_1(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, f_r(\boldsymbol{\alpha})$ は代数的独立である.

以下, $\boldsymbol{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とおく.

Lemma 2(Skolem-Mahler-Lech's theorem, cf. Cassels [1] and Nishioka [6]). C を標数 0 の体とする. $\rho_1, \ldots, \rho_d$ は C の 0 でない元で, $i \neq j$ なら $\rho_i \neq \rho_j$ であるとする. $P_1(X), \ldots, P_d(X)$ は C の元を係数とする 0 でない 1 変数の多項式とする.

$$R = \{ k \in \boldsymbol{N}_0 \mid f(k) = \sum_{i=1}^{d} P_i(k)\rho_i{}^k = 0 \} \tag{5}$$

とおく. このとき, R が無限集合なら, ある $i \neq j$ に対して, ρ_i/ρ_j は 1 の巾根で, R は有限集合と有限個の等差数列の和集合である.

Lemma 3(Masser [5]). 非負整数を成分とする n 次正方行列 Ω は条件 **(I)** をみたし, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (但し, 各 α_i は 0 でない代数的数) は $\lim_{k \to \infty} \Omega^k \boldsymbol{\alpha} = (0, \ldots, 0)$ をみたすとする. このとき, 条件 **(IV)** の否定と次の条件は同値である.

少なくともひとつは 0 でない整数 $i_1, \ldots, i_n$ と自然数 a, b があって,

$$(\alpha_1^{(k)})^{i_1} \cdots (\alpha_n^{(k)})^{i_n} \;=\; 1$$

がすべての $k = a + lb \; (l \;=\; 0, 1, 2, \ldots)$ に対して成り立つ.

$\{a_k\}_{k \geq 0}$ を (1) をみたす線形回帰数列とする.

$$\Omega \;=\; \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

とおく.

Lemma 4. $\Phi(X)$ は ± 1 を根に持たず, 相異なる根の比はいずれも 1 の巾根でないとする. α は $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数とする. このとき, (6) の行列 Ω と $\boldsymbol{\alpha} = (1, \ldots, 1, \alpha)$ は条件 **(I)**~**(IV)** をみたす.

Proof. $\Phi(X)$ が ± 1 以外の 1 の巾根を根に持つとすると, その複素共役も 1 の巾根で $\Phi(X)$ の根となるから仮定に反する. 従って, $\Phi(X)$ は 1 の巾根を根に持たない. (6) の行列 Ω の固有多項式は $\Phi(X)$ であるから条件 **(I)** はみたされる. Ω の相異なる固有値を$\rho_1, \ldots, \rho_t \; (t \leq n)$ とする. Ω の各成分は 0 以上だから, $\rho_1 \geq \max\{|\rho_2|, \ldots, |\rho_t|\}$ であるとしてよい. 条件 **(I)** がみたされるから, $\rho_1 > 1$ である.

$\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0} \; (i = 0, \ldots, n-1)$ は初期値を

$$a_0^{(i)} = 0, \ldots, a_{i-1}^{(i)} = 0, \; a_i^{(i)} = 1, \; a_{i+1}^{(i)} = 0, \ldots, a_{n-1}^{(i)} = 0$$

とする漸化式

$$a_{k+n}^{(i)} \;=\; c_1 a_{k+n-1}^{(i)} + \cdots + c_n a_k^{(i)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

により定義される線形回帰数列とする. $\Omega^{k+1} \;=\; \Omega^k \Omega$ より,

$$\Omega^k \;=\; \begin{pmatrix} a_{k+n-1}^{(n-1)} & \ldots & a_k^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+n-1}^{(0)} & \ldots & a_k^{(0)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

である. 各 i に対し, $a_k^{(i)}$ は (5) の $f(k)$ の形に表されるから, Lemma 2 より, 数列 $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ の中に現れる 0 の個数は有限個である. 故に, ある自然数 λ で, Ω^λ の各成分がすべて正であるものが存在する. 従って, Perron の定理 (cf. Gantmacher [2, p.53, Theorem 1]) より, ρ_1 は $\Phi(X)$ の単根で, $\rho_1 > \max\{|\rho_2|, \ldots, |\rho_t|\}$ である. よって,

$$a_k^{(i)} \;=\; b^{(i)} {\rho_1}^k + o({\rho_1}^k) \quad (0 \leq i \leq n-1) \tag{7}$$

とかけるから条件 (II) もみたされる.

次に, すべての i に対して, $b^{(i)} > 0$ であることを示す. 少なくともひとつの i については, $b^{(i)} \neq 0$ である. このような i に対して, $a_k^{(i)} \geq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ だから, $b^{(i)} > 0$ であることが分かる. 従って, すべての i に対して, $b^{(i)}$ は 0 または正である. $\Omega^{k+1} = \Omega\Omega^k$ より,

$$\begin{pmatrix} a_{k+n}^{(n-1)} & \cdots & a_{k+1}^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+n}^{(0)} & \cdots & a_{k+1}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+n-1}^{(n-1)} & \cdots & a_k^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+n-1}^{(0)} & \cdots & a_k^{(0)} \end{pmatrix}$$

だから,

$$a_{k+1}^{(i)} = c_{n-i}a_k^{(n-1)} + a_k^{(i-1)} \ (1 \leq i \leq n-1), \quad a_{k+1}^{(0)} = c_n a_k^{(n-1)}$$

である. これに, (7) を代入して ${\rho_1}^k$ の係数を比較すると,

$$b^{(i)}\rho_1 = c_{n-i}b^{(n-1)} + b^{(i-1)} \ (1 \leq i \leq n-1), \quad b^{(0)}\rho_1 = c_n b^{(n-1)}$$

となる. 従って,

$$b^{(i)} \geq b^{(i-1)}/\rho_1 \ (1 \leq i \leq n-1), \quad b^{(0)} \geq b^{(n-1)}/\rho_1$$

である. これより, すべての i に対して, $b^{(i)} > 0$ であることが分かる.

$\Omega^k \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{n-1}^{(k)}, \ldots, \alpha_0^{(k)})$ とおくと,

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} &= (a_{n-1}^{(i)}, \ldots, a_0^{(i)})\Omega^k \boldsymbol{\alpha} \\ &= (a_{k+n-1}^{(i)}, \ldots, a_k^{(i)})\boldsymbol{\alpha} \\ &= \alpha^{a_k^{(i)}} \quad (0 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

であるから, Ω と $\boldsymbol{\alpha}$ は条件 (III) をみたす.

次に, Lemma 3 を適用して, 条件 (IV) がみたされることをみる. 少なくともひとつは 0 でない整数 $i_0, \ldots, i_{n-1}$ と自然数 a, b があって,

$$(\alpha_{n-1}^{(k)})^{i_{n-1}} \cdots (\alpha_0^{(k)})^{i_0} = 1$$

がすべての $k = a + lb$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ に対して成り立つとする. $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ を初期値 $a_0 = i_0, \ldots, a_{n-1} = i_{n-1}$ で漸化式 (1) により定義される線形回帰数列とすると, すべての $k = a + lb$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ に対して,

$$\alpha^{a_k^*} = (i_{n-1}, \ldots, i_0)\Omega^k \boldsymbol{\alpha} = 1,$$

すなわち, $a_k^* = 0$ である. $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ は恒等的に 0 ではないから, Lemma 2 より, ある異なる i と j で, ρ_i/ρ_j が 1 の巾根であるものが存在する. これは, 仮定に反するから, 条件 (IV) もみたされねばならない. $\square$

Remark 3. $\{a_k\}_{k\geq 0}$ は (1) をみたす線形回帰数列とする．$a_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_k^{(i)}$ であるから，Lemma 4 の条件の下では

$$a_k \ = \ b{\rho_1}^k \ + \ o({\rho_1}^k)$$

と表すと，$b = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{(i)} > 0$ である．従って，巾級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$ は $|z| < 1$ のとき収束する．

Proof of the statement in Remark 1. 十分性は Lemma 4 の証明の中で示されているから，必要性を示す．ある異なる i と j に対し ρ_i/ρ_j が 1 の巾根であると仮定すると，$\overline{Q}$ の自己同型 σ で ${\rho_i}^\sigma = \rho_1$ となるものに対して，$\rho_1/{\rho_j}^\sigma$ は 1 の巾根である．従って，$\rho_1 = |{\rho_j}^\sigma|$ である．これは $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|, \ldots, |\rho_n|\}$ であることに反する．$\square$

Lemma 5. $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}$ $(i = 1, 2)$ を (1) をみたす線形回帰数列とする．$\Phi(X)$ は ± 1 を根に持たず，相異なる根の比はいずれも 1 の巾根でないとする．数列 $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}$ の中に現れる数全体を $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}^*$ とかくと，Remark 3 より，$\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}^*$ $(i = 1, 2)$ は無限集合である．このとき，$\{a_k^{(1)}\}_{k\geq 0}^* \cap \{a_k^{(2)}\}_{k\geq 0}^*$ が無限集合であるための必要十分条件は，$\{a_k^{(1)}\}_{k\geq 0} \sim \{a_k^{(2)}\}_{k\geq 0}$ である．

Proof. 十分性は明かである．必要性を示す．$\{a_k^{(1)}\}_{k\geq 0}^* \cap \{a_k^{(2)}\}_{k\geq 0}^*$ が無限集合であるとすると，無限に多くの非負整数 k_1, k_2 に対して，$a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)}$ となる．一方，Remark 3 より，

$$a_k^{(i)} \ = \ b^{(i)}{\rho_1}^k + o({\rho_1}^k) \ \ (i = 1, 2)$$

である．ただし，$\rho_1 > 1$ で，$b^{(1)}, b^{(2)} > 0$ である．従って，任意の正の数 ε に対して，ある非負整数 $k_0 = k_0(\varepsilon)$ が存在して，$k \geq k_0$ のとき，

$$(b^{(i)} - \varepsilon){\rho_1}^k \leq a_k^{(i)} \leq (b^{(i)} + \varepsilon){\rho_1}^k \ \ (i = 1, 2)$$

となる．故に，$a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)}$ なる無限に多くの k_1, k_2 に対して，$k_1, k_2 \geq k_0$ のとき，

$$(b^{(1)} - \varepsilon){\rho_1}^{k_1} \leq (b^{(2)} + \varepsilon){\rho_1}^{k_2}, \ \ (b^{(2)} - \varepsilon){\rho_1}^{k_2} \leq (b^{(1)} + \varepsilon){\rho_1}^{k_1}$$

となる．$\varepsilon < \min\{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ にとれば，

$$0 < \frac{b^{(1)} - \varepsilon}{b^{(2)} + \varepsilon} \leq {\rho_1}^{k_2 - k_1} \leq \frac{b^{(1)} + \varepsilon}{b^{(2)} - \varepsilon}$$

である．従って，ε を十分小さくとれば，$a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)}$ なる k_1, k_2 が k_0 より大きいとき，$k_2 - k_1$ は一定の整数 l に等しくなる．

$$b_k \ = \ a_k^{(1)} - a_{k+l}^{(2)} \ \ (k \geq \max\{0, -l\})$$

とおくと，$\{b_k\}$ は (1) と同じ形の漸化式をみたす線形回帰数列で，無限に多くの 0 を含む．$\{b_k\}$ が恒等的に 0 でないとすると，Lemma 2 により仮定に反する．よって，$k \geq \max\{0, -l\}$ のとき $b_k = 0$ であるから補題が証明された．$\square$

3 定理の証明

Proof of Theorem 1. 必要性は明かである. 十分性を示す. n 変数の単項式

$$P_i(\boldsymbol{z}) = z_1^{a_{n-1}^{(i)}} \cdots z_n^{a_0^{(i)}} \quad (1 \le i \le s)$$

に (6) の行列 Ω による変数変換 (3) を行うと,

$$P_i(\Omega^k \boldsymbol{z}) = z_1^{a_{k+n-1}^{(i)}} \cdots z_n^{a_k^{(i)}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

となる.

$$g_i(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} P_i(\Omega^k \boldsymbol{z}) \quad (1 \le i \le s)$$

とおくと, $f_i(z) = g_i(1, \ldots, 1, z)$ で, $g_i(\boldsymbol{z})$ は関数方程式

$$g_i(\boldsymbol{z}) = g_i(\Omega \boldsymbol{z}) + P_i(\boldsymbol{z}) \quad (1 \le i \le s)$$

をみたす. これに,

$$D_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, D_n = z_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

を作用させると,
${D_1}^{k_1} \cdots {D_n}^{k_n} g_i(\boldsymbol{z})$ $(k_1 + \cdots + k_n = L)$ は $\{{D_1}^{l_1} \cdots {D_n}^{l_n} g_i(\Omega \boldsymbol{z})\}_{l_1 + \cdots + l_n = L}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の線形結合に $\boldsymbol{Q}[z_1, \ldots, z_n]$ の元を加えたものになることが分かる. 従って, 任意の非負整数 L に対して $\{{D_1}^{k_1} \cdots {D_n}^{k_n} g_i(\boldsymbol{z})\}_{1 \le i \le s,\ k_1 + \cdots + k_n \le L}$ は (4) の形の関数方程式をみたし, Lemma 4 より, Ω と $\boldsymbol{\alpha} = (1, \ldots, 1, \alpha)$ は条件 **(I)**~**(IV)** をみたす. $\{f_i^{(l)}(\alpha)\}_{1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L}$ が代数的従属であるとすると, $\{{D_n}^l g_i(\boldsymbol{\alpha})\}_{1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L}$ も代数的従属であり, Lemma 1 より, $\{{D_n}^l g_i(\boldsymbol{z})\}_{1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上 modulo $\boldsymbol{Q}[z_1, \ldots, z_n]$ で線形従属となる. すなわち, 少なくともひとつは 0 でない有理数 c_{il} $(1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L)$ が存在して,

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=0}^{L} c_{il} {D_n}^l g_i(\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{Q}[z_1, \ldots, z_n]$$

となる.

$$R_i(X) = \sum_{l=0}^{L} c_{il} X^l \quad (1 \le i \le s)$$

とおくと,

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{\infty} R_i(a_k^{(i)}) z_1^{a_{k+n-1}^{(i)}} \cdots z_n^{a_k^{(i)}}$$

である.

$$S = \{\ i \in \{1, \ldots, s\} \mid R_i(X) \ne 0\ \}$$

とおくと, $S \ne \emptyset$ である. 非負整数 k_0 が存在して, $k \ge k_0$ のとき $a_{k+1}^{(i)} > a_k^{(i)}$ $(1 \le i \le s)$ であるから, 任意の $i \in S$ について, 十分大きなすべての k に対して $R_i(a_k^{(i)}) \ne 0$

である. 故に, S の元の個数が 1 のときは $h(\boldsymbol{z}) \notin \boldsymbol{Q}[z_1,\ldots,z_n]$ となり矛盾である. S の元の個数が 2 以上のとき, Lemma 5 と同じ記法で, $\{a_k^{(i)}\}_{k\ge 0}^* \cap \{a_k^{(j)}\}_{k\ge 0}^*$ がすべての異なる $i,j\in S$ に対して有限集合であるならば, $h(\boldsymbol{z}) \notin \boldsymbol{Q}[z_1,\ldots,z_n]$ となり矛盾である. 従って, ある異なる $i,j\in S$ に対して, $\{a_k^{(i)}\}_{k\ge 0}^* \cap \{a_k^{(j)}\}_{k\ge 0}^*$ は無限集合である. よって, Lemma 5 より, $\{a_k^{(i)}\}_{k\ge 0} \sim \{a_k^{(j)}\}_{k\ge 0}$ である. $\square$

Proof of Theorem 2. (iii)$\Longrightarrow$(ii) 及び (ii)$\Longrightarrow$(i) は明かである. (i)$\Longrightarrow$(iii) を示す.

乗法的独立な代数的数 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ で $0<|\beta_j|<1$ $(1\le j\le m)$ をみたし,

$$\alpha_i = \zeta_i \prod_{j=1}^{m} {\beta_j}^{l_{ij}} \quad (1\le i\le r) \tag{8}$$

となるものが存在する. ただし, $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ は 1 の巾根で, l_{ij} $(1\le i\le r,\ 1\le j\le m)$ は非負整数である (cf. Loxton and van der Poorten [3], Nishioka [6, p.75, 補題 19]). y_{jp} $(1\le j\le m,\ 1\le p\le n)$ を変数とし, $\boldsymbol{y} = (y_{11},\ldots,y_{1n},\ldots\ldots,y_{m1},\ldots,y_{mn})$ とする.

$$g_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} {\zeta_i}^{a_k} \prod_{j=1}^{m} ({y_{j1}}^{a_{k+n-1}} \cdots {y_{jn}}^{a_k})^{l_{ij}} \quad (1\le i\le r)$$

とおくと,

$$f(\alpha_i) = g_i(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},\beta_1,\ldots\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},\beta_m)$$

である. $1\le i\le r$ に対して ${\zeta_i}^N=1$ となる自然数 N をとる. ある自然数 t と非負整数 u が存在して, $k\ge u$ のとき $a_{k+t}\equiv a_k \pmod N$ となる.

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

とし,

$$\Omega = \mathrm{diag}(\underbrace{{\Omega_1}^t,\ldots,{\Omega_1}^t}_{m}) \tag{10}$$

とおく.

$$g_i(\Omega\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} {\zeta_i}^{a_k} \prod_{j=1}^{m} ({y_{j1}}^{a_{k+t+n-1}} \cdots {y_{jn}}^{a_{k+t}})^{l_{ij}}$$

であるから, $1\le i\le r$ に対し

$$h_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=u}^{\infty} {\zeta_i}^{a_k} \prod_{j=1}^{m} ({y_{j1}}^{a_{k+t+n-1}} \cdots {y_{jn}}^{a_{k+t}})^{l_{ij}} = \sum_{k=t+u}^{\infty} {\zeta_i}^{a_k} \prod_{j=1}^{m} ({y_{j1}}^{a_{k+n-1}} \cdots {y_{jn}}^{a_k})^{l_{ij}}$$

とおくと，

$$g_i(\boldsymbol{y}) - h_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{t+u-1} \zeta_i{}^{a_k} \prod_{j=1}^{m} (y_{j1}{}^{a_{k+n-1}} \cdots y_{jn}{}^{a_k})^{l_{ij}},$$
$$g_i(\Omega\boldsymbol{y}) - h_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{u-1} \zeta_i{}^{a_k} \prod_{j=1}^{m} (y_{j1}{}^{a_{k+t+n-1}} \cdots y_{jn}{}^{a_{k+t}})^{l_{ij}}.$$

従って，

$$g_i(\boldsymbol{y}) - g_i(\Omega\boldsymbol{y}) \in \overline{\boldsymbol{Q}}[\boldsymbol{y}] \quad (1 \le i \le r) \tag{11}$$

である．$|\alpha_i| < 1$ $(1 \le i \le r)$ であるから，(8) より $l_{ij} > 0$ となる j が各 i に対して少なくともひとつ存在する．各 i に対してそのような j をひとつ選んで固定し，

$$D_{i1} = l_{ij}{}^{-1} y_{j1} \frac{\partial}{\partial y_{j1}}, \ldots, D_{in} = l_{ij}{}^{-1} y_{jn} \frac{\partial}{\partial y_{jn}}$$

とおく．これらを (11) に作用させると，$D_{i1}{}^{k_1} \cdots D_{in}{}^{k_n} g_i(\boldsymbol{y})$ $(k_1 + \cdots + k_n = L)$ は $\{D_{i1}{}^{l_1} \cdots D_{in}{}^{l_n} g_i(\Omega\boldsymbol{y})\}_{l_1+\cdots+l_n=L}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の線形結合に $\overline{\boldsymbol{Q}}[\boldsymbol{y}]$ の元を加えたものになることが分かる．

次に，(10) の行列 Ω と $\boldsymbol{\beta} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, \beta_1, \ldots\ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, \beta_m)$ が条件 **(I)**〜**(IV)** をみたすことを示す．Lemma 4 の証明より，(9) の行列 Ω_1 は条件 **(I)** をみたし，その相異なる固有値 $\rho_1, \ldots, \rho_d$ $(d \le n)$ は $\rho_1 > \max\{|\rho_2|, \ldots, |\rho_d|\}$ で ρ_1 は Ω_1 の固有多項式の単根であるから，行列 Ω も条件 **(I)**,**(II)** をみたす．

$$\Omega^k \boldsymbol{\beta} = (\beta_{11}^{(k)}, \ldots, \beta_{1n}^{(k)}, \ldots\ldots, \beta_{m1}^{(k)}, \ldots, \beta_{mn}^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

とおく．線形回帰数列 $\{a_k^{(i)}\}_{k \ge 0}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ を Lemma 4 の証明と同様に定義すると，

$$\beta_{jp}^{(k)} = \beta_j{}^{a_{kt}^{(n-p)}} \quad (1 \le j \le m,\ 1 \le p \le n)$$

である．

$$a_{kt}^{(n-p)} = b^{(n-p)}(\rho_1{}^t)^k + o((\rho_1{}^t)^k), \quad b^{(n-p)} > 0 \quad (1 \le p \le n)$$

であるから，Ω と $\boldsymbol{\beta}$ は条件 **(III)** をみたす．

最後に，Lemma 3 を適用して条件 **(IV)** がみたされることをみる．少なくともひとつは 0 でない mn 個の整数 $i_{11}, \ldots, i_{1n}, \ldots\ldots, i_{m1}, \ldots, i_{mn}$ と自然数 a, b があって，

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{p=1}^{n} \beta_{jp}^{(k)\,i_{jp}} = 1$$

がすべての $k = a + lb$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ に対して成り立つとする．$\{a_k^{(j)}\}_{k \ge 0}$ $(j = 1, \ldots, m)$ を初期値 $a_0^{(j)} = i_{jn}, \ldots, a_{n-1}^{(j)} = i_{j1}$ で漸化式

$$a_{k+n}^{(j)} = c_1 a_{k+n-1}^{(j)} + \cdots + c_n a_k^{(j)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

により定義される線形回帰数列とすると, すべての $k = a + lb$ $(l\ =\ 0, 1, 2, \ldots)$ に対して,

$$\prod_{j=1}^{m} \beta_j^{a_{kt}^{(j)}} \ =\ 1$$

である. 少なくともひとつの j に対して, $\{a_k^{(j)}\}_{k\geq 0}$ は恒等的に 0 ではない. このような j に対して, Lemma 2 より, ある $k_0 = a + l_0 b$ $(l_0 \in \boldsymbol{N}_0)$ で $a_{k_0 t}^{(j)} \neq 0$ となるものが存在する. これは, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ が乗法的独立であることに反するから, 条件 **(IV)** もみたされねばならない.

$\{f^{(l)}(\alpha_i)\}_{1\leq i\leq r,\ 0\leq l\leq L}$ が代数的従属であるとすると, $\{{D_{in}}^l g_i(\boldsymbol{\beta})\}_{1\leq i\leq r,\ 0\leq l\leq L}$ も代数的従属であり, Lemma 1 より, $\{{D_{in}}^l g_i(\boldsymbol{y})\}_{1\leq i\leq r,\ 0\leq l\leq L}$ は $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上 modulo $\overline{\boldsymbol{Q}}[\boldsymbol{y}]$ で線形従属となる. すなわち, 少なくともひとつは 0 でない代数的数 c_{il} $(1 \leq i \leq r,\ 0 \leq l \leq L)$ が存在して,

$$G(\boldsymbol{y}) \ =\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{L} c_{il} {D_{in}}^l g_i(\boldsymbol{y}) \in \overline{\boldsymbol{Q}}[\boldsymbol{y}]$$

となる.

$$R_i(X) \ =\ \sum_{l=0}^{L} c_{il} X^l \ \ (1 \leq i \leq r)$$

とおくと,

$$G(\boldsymbol{y}) \ =\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} R_i(a_k)\zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^{m} ({y_{j1}}^{a_{k+n-1}} \cdots {y_{jn}}^{a_k})^{l_{ij}}$$

である. 従って,

$$\begin{aligned} G(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, y_1, \ldots\ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, y_m) \ &=\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} R_i(a_k)\zeta_i^{a_k} \left(\prod_{j=1}^{m} {y_j}^{l_{ij}}\right)^{a_k} \\ &\in\ \overline{\boldsymbol{Q}}[y_1, \ldots, y_m] \end{aligned} \tag{12}$$

となる.

$$S \ =\ \{\ i \in \{1, \ldots, r\} \mid R_i(X) \neq 0\ \}$$

とおくと, $S \neq \emptyset$ である. $\lambda \in S$ とする.

$$\{i_1, \ldots, i_s\} \ =\ \{\ i \in S \mid l_{ij} = l_{\lambda j}\ \ (1 \leq j \leq m)\ \}$$

とおく.

$$\sum_{q=1}^{s} R_{i_q}(a_k){\zeta_{i_q}}^{a_k} \ =\ 0 \tag{13}$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つことを示す. そうでないとすると, (12) が成り立つことから, ある $\mu \in S \setminus \{i_1, \ldots, i_s\}$ に対して

$$\left(\prod_{j=1}^{m} {y_j}^{l_{\lambda j}}\right)^{a_{k_1}} \ =\ \left(\prod_{j=1}^{m} {y_j}^{l_{\mu j}}\right)^{a_{k_2}}$$

をみたす無限に多くの非負整数 k_1, k_2 が存在しなければならない. このとき, $1 \leq j \leq m$ に対し, $l_{\lambda j} a_{k_1} = l_{\mu j} a_{k_2}$ となるから, 各 j について, $l_{\lambda j} = l_{\mu j} = 0$ となるか, または, $l_{\lambda j} l_{\mu j} > 0$ となるかのどちらかである.

$$T = \{ j \in \{1, \ldots, m\} \mid l_{\lambda j} l_{\mu j} > 0 \}$$

とおくと, $T \neq \emptyset$ で, 任意の $j \in T$ に対して $l_{\lambda j}/l_{\mu j}$ はある正の有理数 c に等しい. また, Lemma 5 より, 任意の $j \in T$ に対して, $\{l_{\lambda j} a_k\}_{k \geq 0} \sim \{l_{\mu j} a_k\}_{k \geq 0}$ である. 従って, ある非負整数 l が存在して,

$$a_{k+l} = c a_k \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

となる. (ただし, 必要なら c^{-1} をあらためて c とおく.) $l = 1$ とすると, $a_k = a_0 c^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ である. これは, 定理の仮定に反する. 次に, $l \geq 2$ とすると, $\Psi(X) = X^l - c$ の少なくとも 2 個の根が $\Phi(X)$ の根になる. $\Psi(X)$ の根の比は 1 の巾根で, $\Psi(X)$ は重根をもたないから, これは仮定に反する. 従って, $l = 0$ であり, $c = 1$ となる. 故に,

$$l_{\lambda j} = l_{\mu j} \ \ (1 \leq j \leq m)$$

である. これは, μ のとり方に反する. よって, (13) が成り立たなければならない.

$$\gamma = \prod_{j=1}^{m} {\beta_j}^{l_{i_1 j}}$$

とおくと, γ は 0 でない代数的数で, $\alpha_{i_q} = \zeta_{i_q} \gamma \ \ (1 \leq q \leq s)$ である. また,

$$L = \max_{1 \leq q \leq s} \deg R_{i_q}(X)$$

とおくと, (13) より,

$$\sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{q=1}^{s} c_{i_q l} {\zeta_{i_q}}^{a_k} \right) {a_k}^l = 0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ. 上式を

$$\sum_{q=1}^{s} c_{i_q L} {\zeta_{i_q}}^{a_k} = -\sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{q=1}^{s} c_{i_q l} {\zeta_{i_q}}^{a_k} \right) {a_k}^{l-L}$$

とかくと, $k \to \infty$ のとき右辺は 0 に近づくが, 左辺は有限個の値しかとらないから, 十分大きなすべての k に対して, 左辺は 0 となる. 以上で, (i)$\Longrightarrow$(iii) が証明された. $\square$

4 例

本節では Theorem 1 および Theorem 2 の例をひとつずつあげる.

Example 1. $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}$ $(i=1,2,3,4)$ は初期値がそれぞれ

$$a_0^{(1)}=1,\ a_1^{(1)}=3,\ a_2^{(1)}=33,\qquad a_0^{(2)}=0,\ a_1^{(2)}=5,\ a_2^{(2)}=29,$$
$$a_0^{(3)}=2,\ a_1^{(3)}=3,\ a_2^{(3)}=29,\qquad a_0^{(4)}=1,\ a_1^{(4)}=5,\ a_2^{(4)}=25$$

である漸化式

$$a_{k+3}^{(i)} \ = \ a_{k+2}^{(i)}+16a_{k+1}^{(i)}+20a_k^{(i)} \ \ (k=0,1,2,\dots\ ,\ i=1,2,3,4) \tag{14}$$

により定義される線形回帰数列とする. このとき, 多項式

$$\Phi(X) \ = \ X^3-X^2-16X-20 \ = \ (X-5)(X+2)^2$$

は Theorem 1 の条件をみたす. また, (14) より, 各 i について, $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0}$ は単調増加であることが分かるから, $\{a_k^{(i)}\}_{k\geq 0} \not\sim \{a_k^{(j)}\}_{k\geq 0}$ $(1\leq i<j\leq 4)$ である.

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k+k(-2)^k},\\
f_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(2)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k+(k-1)(-2)^k},\\
f_3(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(3)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k+(-2)^k},\\
f_4(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(4)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k}.
\end{aligned}$$

とおくと, $0<|\alpha|<1$ をみたす代数的数 α に対して, $\{f_i^{(l)}(\alpha)\}_{1\leq i\leq 4,\ l\geq 0}$ は代数的独立である.

Example 2. m を 3 以上の自然数とする. $\{a_k\}_{k\geq 0}$ は初期値が

$$a_0=1,\ a_1=m+1,\ a_2=6m^2-4m+2$$

である漸化式

$$a_{k+3} \ = \ 2a_{k+2}+(m-1)(3m+1)a_{k+1}+2m(m-1)^2a_k \ \ (k=0,1,2,\dots)$$

により定義される線形回帰数列とする.

$$a_k \ = \ (2m)^k+k(1-m)^k \tag{15}$$

であるから, Theorem 2 の条件はみたされる.

$$f(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$$

とおく．このとき，α を $0<|\alpha|<1$ をみたす代数的数，$\zeta=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}}$ とすると，$\{f^{(l)}(\zeta^j\alpha)\}_{j=0,\dots,m-1,\ l\geq 0}$ は代数的独立である．

実際，$\{f^{(l)}(\zeta^j\alpha)\}_{j=0,\dots,m-1,\ l\geq 0}$ が代数的従属であるとすると，Theorem 2 より，少なくともひとつは 0 でない代数的数 $c_0,\dots,c_{m-1}$ が存在して，

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j(\zeta^j)^{a_k} = 0 \tag{16}$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ．ところが，任意の $k\geq 1$ に対して，(15) より $a_k\equiv k \pmod m$ であるから，(16) が成り立つためには $c_0=\cdots=c_{m-1}=0$ でなければならず，これは矛盾である．

上記の結果から，任意に与えられた相異なる代数的数 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ $(0<|\alpha_i|<1,\ i=1,\dots,r)$ に対して，3 以上の自然数 m を選んで，この例における線形回帰数列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ が Theorem 2 の条件 (iii) をみたさないようにできる．このとき $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$ とおけば $\{f^{(l)}(\alpha_i)\}_{i=1,\dots,r,\ l\geq 0}$ は代数的独立となる．

参考文献

[1] J.W.S. Cassels: Local Field, Cambridge UP, 1986.

[2] F.R. Gantmacher: Applications of the theory of matrices, vol. II, New York, Intersiences, 1959.

[3] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten: Algebraic independence properties of the Fredholm series, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **26** (1978), 31-45.

[4] K. Mahler: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* **101** (1929), 342-366.

[5] D.W. Masser: A vanishing theorem for power series, *Invent. math.* **67** (1982), 275-296.

[6] K. Nishioka: Mahler Functions and Transcendental Numbers **II** (in Japanese), Seminar on Math. Sci., No.21, Keio Univ., 1994.

[7] K. Nishioka: Algebraic independence of Mahler functions and their values, to appear in Tôhoku Math. J.

[8] T. Tanaka: Algebraic independence of certain numbers defined by linear recurrences, Keio Sci. Tech. Reports, vol.47, No.2 (1994), 11-20.

[9] T. Tanaka: Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences, to appear in Acta Arith.