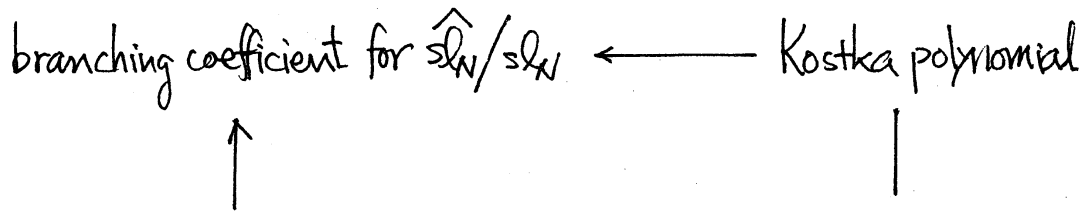


Kostka Polynomials and Crystals

九大数理 山田 泰彦 (Yasuhiko Yamada)

1. Introduction

A.N. Killirov は、フイリ-環 \widehat{sl}_N の部分環 sl_N に対する branching coefficient を Kostka polynomial のある極限で表わす公式を予想した。[Kil]



1 dim. configuration sum ----- Lascoux-Schützenberger 公式

一方、可解格子模型の研究において、1次元配置和というものが計算でき、 \widehat{sl}_N の character (or branching coef.) を与えることが知られている。[DJKMO] [KNM].

本論の目標は、この1次元配置和と Kostka polynomial の Lascoux-Schützenberger による組み合わせ論的公式を結びつけることにより、Killirov の予想を証明することである。

本講義は中屋敷厚氏との共同研究による。[NY]

2. Kostka Polynomials

Kostka Polynomial $K_{\lambda, \mu}(q)$ は、一変数 q に関する多項式で、2つの分割 λ, μ により指定される。その1つの定義は、次の公式により与えられる。[M]

$$A_{\lambda}(x) = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu}(q) P_{\mu}(q, x)$$

こゝに $A_{\lambda}(x)$ は Schur 関数、 $P_{\mu}(q, x)$ は Hall-Littlewood 関数で、具体的な表示は次で与えられる。

$$P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{v_{\lambda}} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(x^{\lambda} \prod_{i < j} \frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$v_{\lambda} = \prod_i [m_i]! \quad (\text{組}. \lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)), \quad x^{\lambda} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots$$

$P_{\lambda}(q=1) = m_{\lambda}$ (monomial 対称関数), $P_{\lambda}(q=0) = A_{\lambda}$ (Schur), とおいている。いくつかの例を示しておく。

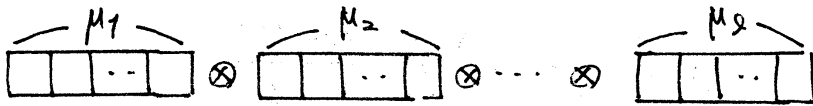
$$\left\{ \begin{array}{l} P_{(1)} = m_{(1)} \\ P_{(2)} = m_{(2)} + (1-q)m_{(1,1)} \\ P_{(1,1)} = m_{(1,1)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{(3)} = m_{(3)} + (1-q)m_{(2,1)} + (1-q)^2 m_{(1,1,1)} \\ P_{(2,1)} = m_{(2,1)} + (1-q)(2+q)m_{(1,1,1)} \\ P_{(1,1,1)} = m_{(1,1,1)} \end{array} \right.$$

✦ Kostka polynomial の例は、

$\lambda \setminus \mu$	3	2,1	1 ³
3	1	q	q ³
2,1		1	q+q ²
1 ³			1

$\lambda \setminus \mu$	4	3,1	2 ²	2,1 ²	1 ⁴
4	1	q	q ²	q ³	q ⁶
3,1		1	q	q+q ²	q ³ +q ⁴ +q ⁵
2 ²			1	q	q ² +q ⁴
2,1 ²				1	q+q ² +q ³
1 ⁴					1

q=1 のとき、 $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}(1)$ は Kostka number とよばれる数で、これは i) 最高 weight λ の sl_n 表現の weight μ の多重度
 又は ii) 完全対称表現たちのテンソル積



の分解に現れるキヤク成分 λ の多重度と見ることが
 できる。

定義からは全く明らかではないが、 $K_{\lambda\mu}(q)$ の係数はすべて非負整数である。この事実は、Lascoux-Schützenberger により証明された。より詳しく、次のことが成り立つ。

定理 (Lascoux-Schützenberger, Butler) [LS][B]

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda,\mu)} q^{c(T)}$$

ここに、 $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ は shape λ , weight μ の semi-standard tableaux, $c(T) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ はその charge であり、次のように計算される。

例. $\lambda = (3, 1)$, $\mu = (2, 1^2)$ とし、 $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ は 2つの要素からなる

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

各々の charge は $c(T_1) = 2$, $c(T_2) = 1$ である。例えば T_1 については、次の図のように各数字 1, 2, 3... の index を計算し、 $c(T_1) = \text{ind}(1) + \text{ind}(2) + \text{ind}(3) = 0 + 1 + 1 = 2$ 。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1_0 & 2_1 \\ \hline 3_1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_0 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

rule。右→左, 上→下の順に列 1, 2, 3... をひきあつめ、各々に index を与える。index は 0 から始めて右上にもどるたびに 1 を加える。
 • 上の手順を可能な限りくりかえす。

我々の主結果は、ここに現わした index に対して、crystal base の理論における energy 関数を用いた新しい公式を与える。

3. Crystals and energy functions

ここでは、crystal baseの理論のうち、我々の必要とする部分について、主に例で説明する。(一般論は[K].[KN]などを参照のこと。)

sl_2 のキヤク表現 $\square, \square\square, \square\square\square, \dots$ などについて、その crystal graph なるものが次のように与えられる。

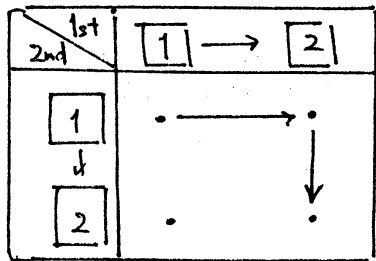
$$\square: \quad \boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$$

$$\square\square: \quad \boxed{11} \rightarrow \boxed{12} \rightarrow \boxed{22}$$

$$\square\square\square: \quad \boxed{111} \rightarrow \boxed{112} \rightarrow \boxed{122} \rightarrow \boxed{221}$$

これらの graph は各表現の weight 空間の構造と、generator f の作用を表わすものと見なせる。重要なことは tensor 積にも canonical に crystal graph の構造が入り込めることであり、例で示せば

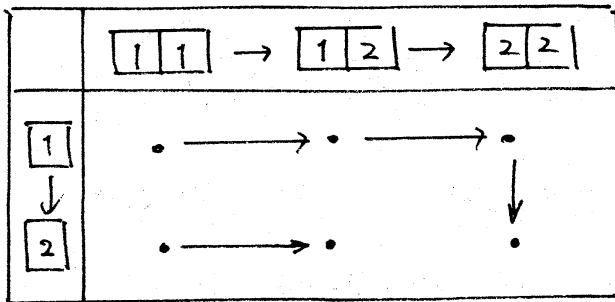
$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \square (= \phi)$$



$$\underbrace{\boxed{1} \otimes \boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \otimes \boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \otimes \boxed{2}}_{\square\square}$$

$$\underbrace{\boxed{1} \otimes \boxed{2}}_{\square} = \phi$$

$$\square\square \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (= \square)$$



$$\underbrace{\square\square \otimes \square \rightarrow \dots}_{\square\square\square}$$

$$\underbrace{\square\square \otimes \square \rightarrow \dots}_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} (= \square)}$$

同じとなっている。

同様に、分解

$$\square\square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square\square \oplus 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

に対応して、対応する graph は4つの成分からなり、各々の最高 weight 要素は次のようである。

$$\square\square\square\square \text{ の h.w. } \quad \square\square \otimes \square \otimes \square \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \text{ の h.w. } \quad \square\square \otimes \square \otimes \square \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\square\square \otimes \square \otimes \square \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \text{ の h.w. } \quad \square\square \otimes \square \otimes \square \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

各々の h.w. 要素には、右端に示したような $\mathcal{J}(g, (211))$ の元

が対応する。一般に、次の bijection がある。

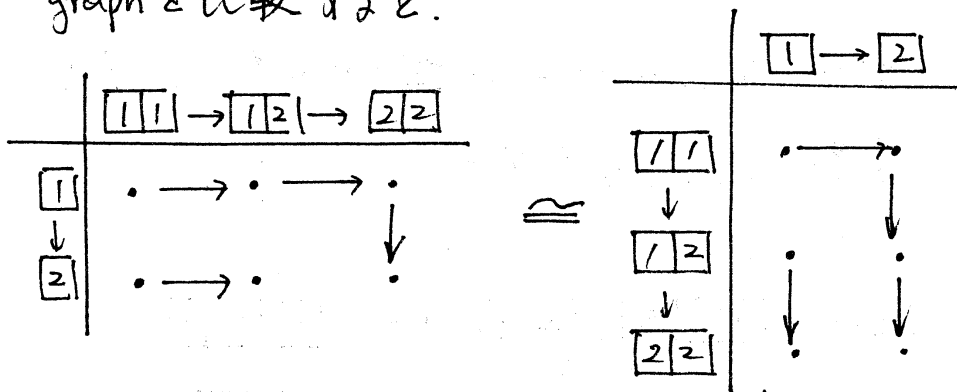
Prop. $\mathcal{T}(\lambda, \mu) \xleftrightarrow{1\text{-to-1}}$

$$\left\{ \text{h.w.要素 (of weight } \lambda) \text{ in } \overbrace{\square \cdots \square}^{M_1} \otimes \overbrace{\square \cdots \square}^{M_2} \otimes \cdots \otimes \overbrace{\square \cdots \square}^{M_k} \right\}$$

我々は Lascoux-Schützenberger の公式 α 和をこの対応で、右辺の各 h.w.要素 α 和と見たり。この時、重み関数 $c(T)$ と index の crystal 理論での表示を考える。

同型と energy 関数 (the combinatorial R-matrix).

また α 例で説明しよう。 $\square \square \square \otimes \square$ と $\square \otimes \square \square \square$ の graph を比較すると。



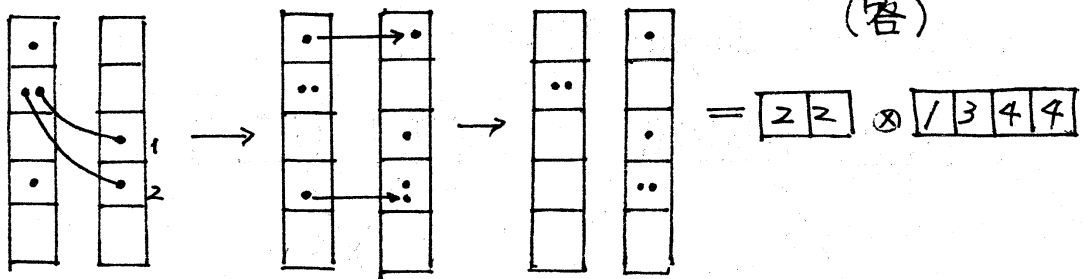
各 graph の対応する頂点を同一視して 次の同型が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \\ \square \square \square \otimes \square = \square \otimes \square \square \square \end{array} \right.$$

一般に、 sln の表現 $\overbrace{\square \cdots \square}^{k_1} \otimes \overbrace{\square \cdots \square}^{k_2}$ ($k_1 \geq k_2$) と、
 これを入れかえたものとの同型を次の rule で与えることが
 できる。

例. sln_5 . $k_1=4$. $k_2=2$. で $\boxed{1224} \otimes \boxed{34}$ の行き先？

これを得子には次の図を書く。



rule: 右列一番上の \square_1 に 左列の \square で 右の \square_1 より上にあるもの
 のうち一番下のもの (のみ) を選んで線をおく。

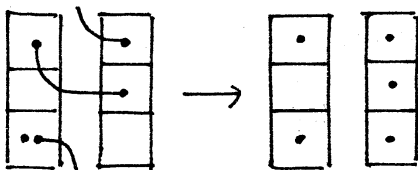
• 右列二番目の \square_2 に 同様の相方を (残ったものから) 選んで
 線をおく。以下 同様にくり返す。

• 左列で 上にある \square が存在しないときは 一番下まで
 もどって 相手をさがす。(次の例参照)

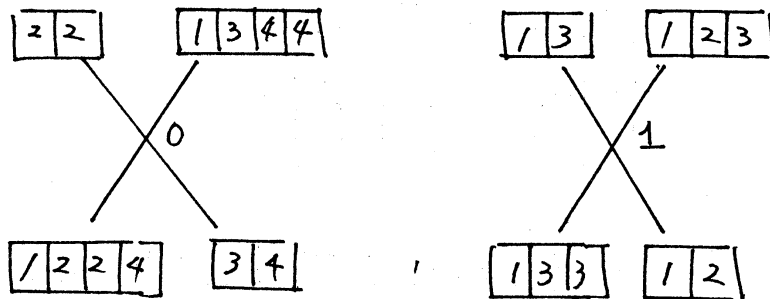
• 右列の \square をすべて消せば 箱が終えたら、左列の残った \square を
 右へ移動させる。

例

$$\boxed{133} \otimes \boxed{12} = \boxed{13} \otimes \boxed{123}$$



上記の rule は、energy 関数も与えてくれる。energy 関数は、上記の同型を 3D のクリスタルの同型に拡張したときの 0 -th arrow との共立性によって定義される ([KNM], [NY]) が今の場合は、単に、“ (i) と下から回って来る line の数” に他ならない事を示すことができる。以上の同型と energy 関数の data を次の diagram で表わそう。



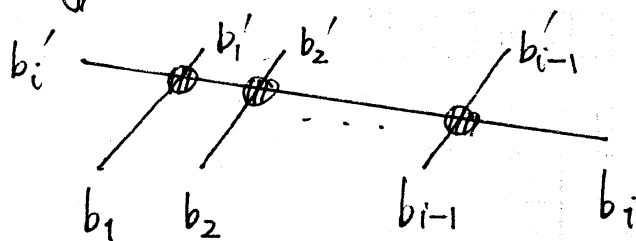
4. Main Theorem

$T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ に対して、 $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_r$ を tensor 積

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_1 & & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array} \otimes \dots \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_2 & & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array}$ における対応する highest weight 要素とする。

定理 [NY]

T_i における i -th letter の index $ind(i)$ は次の diagram の energy 関数の和で与えられる。

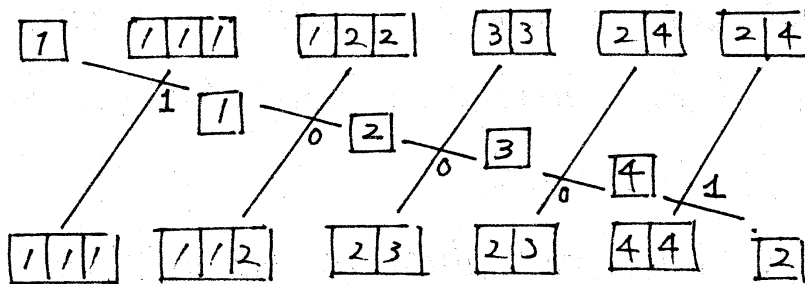


例. $T =$

1	1	1	2	2
2	3	4	6	
3	4			
5	5			

\leftrightarrow $[1/1/1] \otimes [1/1/2] \otimes [2/3] \otimes [2/3] \otimes [4/4] \otimes [2]$

この6番目の成分 $[2]$ の index $\text{ind}(6) = 2$ は次の図で求めらる



この定理と [DJKMO] 等の結果を組み合わせると、目標とした Killirova 予想が従う。詳細は [NY] を見て下さい。

Reference

[B] Butler, L.M. Subgroup lattices and symmetric functions, Memoir of the AMS Vol. 112 No.59 (1994)

[DJKMO] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T. and Okado, M. One dimensional configuration sums in vertex models and affine Lie algebra characters, LMP 17, 69-77 (1989)

- [K] Kashiwara, M. On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* 63 No.2 465-516 (1991)
- [KNM] Kang, S.-J., Kashiwara, M., Misra, K., Miwa, T., Nakashima, T., Nakayashiki, A. Affine crystals and vertex models, *Int. J. Mod. Phys. A7* Suppl.1A, 449-484 (1992)
- [KN] Kashiwara, M. and Nakashima, T. Crystal graph for representations of the q -analogue of classical Lie algebras, *J. Alg.* 165, 295-345 (1994)
- [Ki] Kirillov, A.N., Dilogarithm identities, hep-th/9408113 (1994)
- [M] Macdonald, I. Symmetric functions and Hall polynomials, second edition. Oxford Univ. Press (1995)
- [LS] Lascoux, A. and Schützenberger, M.P., Sur une conjecture de H.O. Foulkes, *C.R. Acad. Sc. Paris* 288A, 323-324 (1978)
- [NY] Nakayashiki, A., Yamada, Y., Kostka polynomials and energy functions in Solvable Lattice models, preprint (1995)