

P-VALENTLY STARLIKE FUNCTIONS AND CONVEX FUNCTIONS について

和歌山大学・教育 福井誠一
(Seiichi FUKUI)

§1. 準備

U を複素平面 C 内の開単位円板 $U = \{z \in C ; |z| < 1\}$ とする. p, n を正の整数として

$$f(z) = z^p + a_{p+n}z^{p+n} + \dots \tag{1.1}$$

を U 内で正則な関数とし, この関数の全体を $\Lambda_p(n)$ とおく. $p > \alpha \geq 0$ を満たす定数 α に対して $f(z) \in \Lambda_p(n)$ のとき,

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z \in U \tag{1.2}$$

を満たす関数を p-valently starlike function of order α (位数 α の p 葉星型関数) といってこの関数全体を $S^*_p(\alpha)$ とおく. また, $f(z) \in \Lambda_p(n)$ のとき,

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right) > \alpha, \quad z \in U \tag{1.3}$$

を満たす関数を p-valently convex function of order α (位数 α の p 葉凸型関数) といってこの関数全体を $K_p(\alpha)$ とおく. $p=n=1$ のときは, $\Lambda_1(1) = \Lambda$ とおく. また, $S^*_1(\alpha) = S^*(\alpha)$, $K_1(\alpha) = K(\alpha)$, $S^*(0) = S^*$, $K(0) = K$ とする. S を U から $f(U)$ ($f(z) \in \Lambda$) の上への 1 対 1 正則な関数 $f(z)$ の全体とすると, S は単葉関数族と呼ばれ

$$\Lambda \supset S \supset S^* \supset K \tag{1.4}$$

は知られている.

Marx [3] と Strohäcker [4] は独立に次の結果を示した.

定理 M-S. $K \subset S^*(1/2)$.

即ち, すべての凸型関数は位数 $1/2$ の星型関数であることを示している. また, 次のようにも表現できる.

任意の $f(z) \in A$ にたいして, $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) > 0, z \in U$ が成立すれば,

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}, z \in U \text{ が成立する.} \quad (1.5)$$

この報告では, この Marx-Strohhäcker の結果が p 葉な関数についても成立するか否かに答え
たものである. 特に, 極値関数について詳しく述べる.

§2. p 葉関数について

p 葉関数については次の結果が得られる.

定理 1. 関数族 $A_p(n)$ 内では,

$$K_p(\alpha) \subset S_p^*(\beta) \quad (2.1)$$

が成立する. ただし, α, β は $p > \alpha \geq 0, p > \beta \geq 0$ を満たし, さらに次の条件を満たすものとする.

$$p > \beta \geq \frac{p}{2} \text{ のとき, } \beta + \frac{n(\beta - p)}{2\beta} \leq \alpha, \quad (2.2)$$

$$\frac{p}{2} \geq \beta \geq 0 \text{ のとき, } \beta + \frac{n\beta}{2(\beta - p)} \leq \alpha. \quad (2.3)$$

これは, 次の補題 2 (福井 [2] 定理 2) の直接の結果である.

補題 2. 関数 $f(z) \in A_p(n)$ に対して, α, β を実数として,

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \frac{zf'(z)}{f'(z)}\right) + \alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad z \in U \quad (2.4)$$

を満たせば, $f(z) \in S_p^*(\gamma)$ である. ただし, $(1 + \alpha)p > \beta$ かつ

$$p > \gamma \geq \frac{p}{2} \text{ のとき, } (1 + \alpha)\gamma + \frac{n(\gamma - p)}{2\gamma} \leq \beta, \quad (2.5)$$

$$\frac{p}{2} \geq \gamma \geq 0 \text{ のとき, } (1 + \alpha)\gamma + \frac{n\gamma}{2(\gamma - p)} \leq \beta \quad (2.6)$$

を満たすものとする.

補題2で, $\alpha=0$ とおき, β を α , γ を β と置換すると, 定理1が得られる. また, 定理1で $\alpha=0$, $n=1$ として次の系3を得る.

系 3. $K_p(0) \subset S^*_p(0)$. (2.7)

この結果は最良である. 即ち, どんな正の数 α に対しても, $K_p(0) \subset S^*_p(\alpha)$ とはならない. 何故なら, 極値関数

$$f_p(z) = \frac{P_p(z)}{(1-z)^{2p-1}}, \quad (2.8)$$

$$P_p(z) = z^p + \left(-\frac{p-1}{p+1}\right)z^{p+1} + \dots + \left(-\frac{p-1}{p+1}\right)\left(-\frac{p-2}{p+2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2p-1}\right)z^{2p-1} \quad (2.9)$$

が存在するからである.

§3. 極値関数 $f_p(z)$ が $f_p(z) \in K_p(0)$ であつ, $f_p(z) \in S^*_p(0)$ であることの証明
この極値関数は,

$$f'_p(z) = \frac{pz^{p-1}}{(1-z)^{2p}} \quad (3.1)$$

即ち,

$$1 + \frac{zf'_p(z)}{f_p(z)} = p \cdot \frac{1+z}{1-z} \quad (3.2)$$

から求められたものである. (3.2) から $f_p(z) \in K_p(0)$ は明らかである. 系3の結果から, $f_p(z) \in S^*_p(0)$ が成立していることは認めてよい. 次に, どんな正の α に対しても決して

$$f_p(z) \in S^*_p(\alpha) \quad \text{即ち,} \quad \operatorname{Re} \frac{zf'_p(z)}{f_p(z)} > \alpha, \quad z \in U \quad (3.3)$$

とならないことを示さなければならない.

$$f_p(z) = \frac{P_p(z)}{(1-z)^{2p}} \quad \text{とおくと,} \quad f'_p(z) = \frac{(1-z)P'_p(z) + (2p-1)P_p(z)}{(1-z)^{2p}} \quad \text{となるから,}$$

$$(1-z)P'_p(z) + (2p-1)P_p(z) = pz^{p-1} \quad (3.4)$$

が得られ、これを解いて (2.8), (2.9) を得たのである。

さて, $f_p(z) \in S^*_p(0)$ を示すために,

$$W(z) = \frac{zf'_p(z)}{f_p(z)} = \frac{pz^p}{(1-z)P_p(z)} = \frac{p}{(1-z)Q(z)} = \frac{p}{R(z)} \quad (3.5)$$

とおいて, $\operatorname{Re} W(z) > 0$, $z \in U$ を示さなければならない。それには,

$$P_p(z) = z^p Q(z) \quad (3.6)$$

$$R(z) = U(z) + iV(z) \quad (3.7)$$

から,

$$Q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{p-1} z^{p-1}, \quad (3.8)$$

$$q_k = \left(-\frac{p-1}{p+1}\right) \left(-\frac{p-2}{p+2}\right) \cdots \left(-\frac{p-k}{p+k}\right), \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$R(z) = 1 + (q_1 - 1)z + (q_2 - q_1)z^2 + \cdots + (q_{p-1} - q_{p-2})z^{p-1} + q_{p-1}z^p \quad (3.9)$$

を得て, これから, $\operatorname{Re} W(z) = \frac{pU(z)}{U(z)^2 + V(z)^2}$, となり, $U(z)$ は系 3 から $U(z) > 0$, $z \in U$ が成

立し, 特に, $|z| \leq 1$ で調和関数である. $z \rightarrow 1$ のとき $\operatorname{Re} W(z) \rightarrow 0$ を示せばよい.

調和関数の最小値の原理から, $|z| = 1$ で考えてよい. $r=1$ として,

$R(e^{i\theta}) = U(e^{i\theta}) + iV(e^{i\theta})$ を $R(\theta) = U(\theta) + iV(\theta)$ とおく. このとき, (3.5) と (3.7) から

$$\operatorname{Re} W(\theta) = \frac{pU(\theta)}{U(\theta)^2 + V(\theta)^2} \quad (3.10)$$

を得, また, (3.7), (3.9) から次の関係式を得る.

$$U(\theta) = 1 + (q_1 - 1)\cos\theta + (q_2 - q_1)\cos 2\theta + \cdots + (q_{p-1} - q_{p-2})\cos(p-1)\theta - q_{p-1}\cos p\theta,$$

$$V(\theta) = (q_1 - 1)\sin\theta + (q_2 - q_1)\sin 2\theta + \cdots + (q_{p-1} - q_{p-2})\sin(p-1)\theta - q_{p-1}\sin p\theta.$$

故に, $U(0) = V(0) = U'(0) = V'(0) = 0$, $V'(0) = -\frac{p}{2p-1} \neq 0$ ($U'(0) = Q(1) + 2Q'(1)$, $V'(0)$

$= -P'_p(1) = -Q(1)$ に注意する) から,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} W(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{pU(\theta)}{U(\theta)^2 + V(\theta)^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{pU'(\theta)}{2(U(\theta)U'(\theta) + V(\theta)V'(\theta))} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{pU'(\theta)}{2(U(\theta)U'(\theta) + U'(\theta)^2 + V(\theta)V'(\theta)) + V'(\theta)^2} = 0 \end{aligned}$$

を得る。故に、 $z=1$ の近くには $\operatorname{Re} W(\theta) > 0$, $z \in U$ でかつ $\operatorname{Re} W(z) \neq 0$ となる点が存在するからである。

§4. コメント

本稿が出来上がるまでには、何人かのアドバイスを戴いた。ここにその経緯を述べて、お礼に変えたい。

まず、系3を予想したのは布川氏である。これを著者は[2]からの系として導いた。しかし、定理1の証明には、直接[1]を使って証明することもできる。注意することは、いずれにしても

定理1は sharp な結果ではない。はじめに、極値関数 $f_p(z)$ が $f_p'(z) = \frac{pz^{p-1}}{(1-z)^{2p}}$ から得ら

れることを示したのは、著者である。山川氏は $p=2, 3$ のとき直接 $f_2(z) = \frac{z^2(z-3)}{3(z-1)^3}$,

$f_3(z) = -\frac{z^3(10-5z^2+z^3)}{10(z-1)^5}$ を求めて $f_j(z) \in K_j(0)$ と同時に $f_j(z) \in S^*_j(0)$ ($j=1, 2$)

を証明した。また、等角写像図をコンピュータで描いて示した。さらに、 $U(\theta) = A(1 - \cos \theta)^p$ (A は定数)と予想した。著者は $p=2, 3, 4, 5$ までは、山川氏とは違う方法で証明をし、この A について具体的数値を得ていた。後に、須川氏が

$$U(\theta) = \frac{2^p(p!)^2}{(2p)!} (1 - \cos \theta)^p = \frac{1 \cdot 2 \cdots p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)} (1 - \cos \theta)^p$$

を得たとの報告を受けた。また、須川氏と布川氏には極値関数の一般の p についての証明では有力な助言を戴いた。その後、布川氏はこれについて別証明を得たとの報告を受けている。

REFERENCES

- [1] S.Fukui, On Jack's lemma and Miller-Mocanu's lemma, Bull.Fac. Edu.Wakayama Univ.Nat. Sci., 45(1995),1-7.
- [2] S.Fukui, α -starlike functions of order β について, 京都大学数理解析研究所講究録 917(1995),1-6.
- [3] A.Marks, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann., (1932), 40-67.
- [4] E.Strohhäcker, Beiträge zur Theorie der schlichten Functionen, Math. Z., 37(1933), 356-380.