数理解析研究所講究録
964巻 1996年 132-137

$R(I,J)$ の COHEN-MACAULAY 性と REES 環の RATIONAL SINGULARITY について

中村幸男 (YUKIO NAKAMURA)

東京都立大学理学部

1. 序

本稿では次の定理についての動機, 応用, 及びその証明について報告する.

定理 1.1. $(A,\mathfrak{m})$ を *2* 次元 *Cohen-Macaulay* 局所環で剰余体は無限体のもの, I, J は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. 次の条件

(1) $R(I)$, $R(J)$ は *Cohen-Macaulay,*

(2) I は整閉,

(3) $Y=\mathrm{Proj}R(J)$ とおくとき, Y は正規スキームであるか, または $I\mathcal{O}_Y$ が可逆層である,

が充されるとき, $R(I,J)$ は *Cohen-Macaulay* 環となる.

ここで $R(I)$, $R(J)$ はそれぞれ Rees 環をあらわし, $R(I,J)$ は 2 重 Rees 環, すなわち $R(I,J)=A[It,Js]$ の形の A-代数のこととする (t, s は A 上の不定元).

$R(I,J)$ の Cohen-Macaulay 性については, [V1], [HHRTa] などで調べられており, そこでは 定理 1.1 の条件 (1) まで仮定し, (2), (3) の代わりに I と J の joint reduction number がゼロという条件を仮定して $R(I,J)$ の Cohen-Macaulay 性を導いている. また [V2] では A が 2 次元正則局所環で I, J が整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるとき, I と J の joint reduction number がゼロとなることを導いており, 従ってこのときは $R(I,J)$ は Cohen-Macaulay となっている. さらに J. Ribbe は, A が rational な 2 次元局所環のとき (cf. 定義 1.3), I, J が整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルで (このとき [L1; Theorem 7.1] と [LT; Corollary 5.4] より I と J の reduction number はそれぞれ 1 以下となり Rees 環 $R(I)$, $R(J)$ は Cohen-Macaulay となる)

$I\mathcal{O}_Y$ が可逆層であるとき I と J の joint reduction number がゼロとなることを示している (cf. 補題 1.5). 定理 1.1 は Ribbe 氏の結果の影響を受けて得られたものであり, さらに彼及び筆者は以下に述べる Lipman のアイデアに影響され, $R(I,J)$ の Cohen-Macaulay 性に興味を持つことになった. そのアイデアというのは Rees 環 $R(I)$ の rational 性が, 特殊な J を選んでの $R(I,J)$ の Cohen-Macaulay 性から導かれるのではないかというものである.

以下, Lipman の手法を述べる. $(A,\mathfrak{m})$ を Noether 局所環, I, J を A のイデアルとする. $B=A[It]$, $C=A[Js]$ とおき (t, s はそれぞれ A 上の不定元), M を B の極大な斉次イデアルとし, $X=\mathrm{Proj}B$, $Y=\mathrm{Proj}C$ とおく.

補題 1.2. *$Y'=\mathrm{Proj}B[Js]$ $(B[Js]=A[It,Js])$ とおく. もし Y が正則スキームで $I\mathcal{O}_Y$ が可逆層ならば, Y' も正則である.*

証明. $B[Js]=A[It,Js]$ で, t, s の次数を $\deg t=0$, $\deg s=1$ と思うことにする. 次数付き環の射 $A[Js]\to B[Js]$ を考えると, これは A-スキームの射 $Y'\to Y$ を導く. $Q\in Y'$ ととり, $\mathfrak{q}=Q\cap C\in Y$ とおく. $C_{(\mathfrak{q})}$ で $\mathfrak{q}$ に属さぬ C の斉次元による局所化とする. $C_{(\mathfrak{q})}\cong\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}[T,T^{-1}]$ であり (T は不定元), これは正則環. また $I\mathcal{O}_Y$ は可逆であるから, $IC_{(\mathfrak{q})}\cong I\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}[T,T^{-1}]$ は単項イデアルである. 今, $B[Js]_{(Q)}$ は $A[Js]_{(\mathfrak{q})}[It]$ を局所化したものであり, $C_{(\mathfrak{q})}[It]=C_{(\mathfrak{q})}[IC_{(\mathfrak{q})}t]$ で, これは正則環上の単項イデアルによる Rees 環であるからやはり正則である. 従って $\mathcal{O}_{Y',Q}=[B[Js]_{(Q)}]_0$ は正則局所環となる.

定義 1.3. 正規整域 A に対し, A が rational (rational singularity のみを持つ) とは, 正則スキーム Y と 双有理な固有射 $Y\to\mathrm{Spec}A$ が存在して, $H^i(Y,\mathcal{O}_Y)=(0)$ $(i>0)$ をみたすことである.

以下, A は 2 次元 excellent rational な局所環で, I は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし, $B=R(I)$ は正規であるものと仮定して, 局所環 $R(I)_M$ の rational 性を調べてみる. [L2; Theorem] より X は特異点解消, $Y\to X$ を持つ. Y は $\mathrm{Spec}A$ の特異点解消でもあるから, A の rational 性より, $H^i(Y,\mathcal{O}_Y)=(0)$ $(i>0)$ である. さらに [L2; p. 155 C] より, Y は, ある $\mathfrak{m}$-準素イデアル J により $Y=\mathrm{Proj}R(J)$ の形に書ける事がいえる.

一方 [L3; Theorem 4.1] によれば, Y が Cohen-Macaulay で $H^0(Y,\mathcal{O}_Y)=A$ かつ $H^i(Y,\mathcal{O}_Y)=(0)$ $(i>0)$ ということから, 十分大きい e をとって, $R(J)^{(e)}=R(J^e)$ は Cohen-Macaulay となる. よって始めから $R(J)$ は Cohen-Macaulay と仮定してよい. いま $I\mathcal{O}_Y$ は可逆層だから ($Y\to X$ が存在していることに注意), 定理 1.1 を用いて $R(I,J)$ は Cohen-Macaulay と成る. $Y''=Y'\times\mathrm{Spec}B_M$ とおく. $Y''=\mathrm{Proj}R(JB_M)$ に再び [L3; Theorem 4.1] を適用して, $H^i(Y'',\mathcal{O}_{Y''})=(0)$ $(i>0)$ となる, 補題 1.2 より $Y''\to\mathrm{Spec}B_M$ は特異点解消であるから B_M は rational.

結局次の主張が示された. (ここでは定理 1.1 は使われていない)

定理 1.4 (Lipman-Ribbe). $(A,\mathfrak{m})$ は *excellent rational* な *2* 次元局所環, I, J は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. このとき $R(I)_M$ は *rational* である.

最後に Ribbe の示した結果を簡単に紹介して, この節を終わりにしたいと思う.

補題 1.5 (Ribbe). $(A,\mathfrak{m})$ は *2* 次元 *rational* な局所環, I, J は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルで $I\mathcal{O}_Y$ が可逆層であると仮定する. このとき $R(I,J)$ は *Cohen-Macaulay* である.

証明. $a\in I$, $b\in J$ を I, J の joint reduction, すなわち, 十分大きい整数 n に対して $(IJ)^{n+1}=(aJ+bI)(IJ)^n$ を充すものととる. $IJ\mathcal{O}_Y$ は可逆なので, $IJ\mathcal{O}_Y=(aJ+bI)\mathcal{O}_Y$ となる. よって完全列 $0\to\mathcal{O}_Y\to J\mathcal{O}_Y\oplus I\mathcal{O}_Y\stackrel{[a,b]}{\to}IJ\mathcal{O}_Y\to 0$ がとれる. 今, $H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=(0)$ より, $H^0(Y,J\mathcal{O}_Y)\oplus H^0(Y,I\mathcal{O}_Y)\stackrel{[a,b]}{\to}H^0(Y,\mathcal{O}_Y)$ は全射. I, J, IJ は整閉なので, 上の全射は $J\oplus I\stackrel{[a,b]}{\to}IJ$ に他ならなく, 故に $IJ=aJ+bI$. これは, I, J が joint reduction number ゼロということをいっており (これが定義), よって [HHRTa] から $R(I,J)$ の Cohen-Macaulay 性が従う.

この証明をみても解るように, Ribbe 氏の証明は 2 次元 rational ring の性質に依っているところが多いように思える. しかしながら, 次節で述べるように, 定理 1.1 の証明はイデアルの analytic deviation の理論に依ったものであり, analytic deviation の理論の高次元化はかなり進んだものがあるので, これを用いて定理 1.1 や $R(I)$ の rational 性の判定の高次元化が得られないであろうかと思っている.

2. 定理の証明

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環で, I, J は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. $B = R(I) = A[It]$, $C = R(J) = A[Js]$ とおき, M, N をそれぞれ B, C の極大な斉次イデアルとする. また $Y = \mathrm{Proj}C$ とおく.

補題 2.1. *B, C は Cohen-Macaulay 環とする. Y は正規スキーム であるか, または $I\mathcal{O}_Y$ が 可逆層であると仮定する. このとき次は同値である.*

(1) *$R(I, J)$ は Cohen-Macaulay 環.*

(2) *$\mathrm{depth} C_N / IC_N > 0$.*

証明. イデアル IC_N について, $\mathrm{ht}_{C_N} IC_N = 1$, $\ell(IC_N) = 2$ である (ℓ は analytic spread のこと). 実際, $\mathrm{ht}_{C_N} IC_N > 0$ は自明で, 全射 $C/IC \to C/\mathfrak{m}C$ があることから $\dim C/IC \geq 2$ となり, $\mathrm{ht}_{C_N} IC_N = 1$ となる. また, 同型 $C_N[It]/NC_N[It] \cong A[It]/\mathfrak{m}A[It]$ より, $\ell(IC_N) = \ell(I) = 2$ となる. K を I の minimal reduction とするとき, KC_N は IC_N の minimal reduction であり, $r_{KC_N}(IC_N) = r_K(I)$ となることが容易にわかる (ここで r は reduction number とした). いま B は Cohen-Macaulay なので, $a(G(I)) < 0$ となり, $r_{KC_N}(IC_N) \leq 1$ がいえる. さらに, 任意の $Q \in V(IC_N)$ で $\mathrm{ht}_{C_N} Q = 1$ となるものに対して, $(IC_N)_Q$ は単項イデアルとなっている. 実際, $Q \in V(IC)$ で $\mathrm{ht}_C IC = 1$ ならば, Q は IC の 極小素イデアルであり, $Q \in Y$ となる. もし $I\mathcal{O}_Y$ が可逆ならば, $I\mathcal{O}_{Y,Q}$ は単項で, IC_Q も単項となる. もし Y が正規ならば, $\mathcal{O}_{Y,Q}$ は D.V.R. となり, やはり $I\mathcal{O}_{Y,Q}$ は単項である. これは IC_Q が単項であることを意味する. よって, [HH; Theorem 2.9] が適用できて, $G(IC_N)$ が Cohen-Macaulay であることの必要十分条件は, $\mathrm{depth} C_N/IC_N > 0$ となる. いま $R(I, J)$ が Cohen-Macaulay ならば, $R(IC_N)$ も Cohen-Macaulay であり, $G(IC_N)$ が Cohen-Macaulay となり, $\mathrm{depth} C_N/IC_N > 0$ を得る. 逆に, $G(IC_N)$ が Cohen-Macaulay ならば, [GH; Proposition 2.4] より $a(G(IC_N)) = \max\{r_{KC_N}(IC_N) - \ell(IC_N), -\mathrm{ht}_{C_N} IC_N\} < 0$ となるので, $R(IC_N)$ が Cohen-Macaulay となり, これは $R(I, J)$ が Cohen-Macaulay を意味する.

次の補題は一般の状況で成立する.

補題 2.2. $(A,\mathfrak{m})$ を *Noether* 局所環で, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は, 無限体とする. I, J は A のイデアルで, $\mathrm{ht}_A J > 0$ となるものとする. このとき, 元 $a \in J$ が存在して, a は J の *minimal reduction* の一部であり, $IJ : a \subseteq \overline{I}$ を充す.

証明. A は被約と仮定してよいことは容易に確かめられる. $S = B[t^{-1}] \subseteq A[t,t^{-1}]$ (拡張された I の Rees 環) とおく. S も被約であり, $\overline{S}$ を S の全商環における整閉包とすると $\overline{S}$ は Krull 整域の直積である. $\mathrm{Ass}_{\overline{S}}\overline{S}/t^{-1}\overline{S} = \{P_1, P_2, ..., P_r\}$ とおく. ここで $\overline{S}_{P_i}$ は D.V.R. となる事に注意する. $V_i = \overline{S}_{P_i}$, $\mathfrak{n}_i = P_i\overline{S}_{P_i}$ とおく. $JV_i \neq (0)$ なので, $J \not\subseteq J\mathfrak{n}_i \cap A$ となる. $\mathfrak{a}_i = J \cap J\mathfrak{n}_i$ $(i = 1, ..., r)$ とおく. 一方, $\mathrm{Assh}_C C/\mathfrak{m}C = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_u\}$ とおき, イデアル $\mathfrak{b}_j \subseteq A$ を $\mathfrak{b}_j t = [\mathfrak{p}_j]_1$ となるものとする. このとき $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j$ は J に真に含まれるイデアルであり, $a \in J$ を $a \notin (\cup\mathfrak{a}_i)\cup(\cup\mathfrak{b}_j)$ となるものを取ることができ, これが求める元である. 実際, $as \in C$ は $C/\mathfrak{m}C$ の斉次なパラメーターの一部となるので, a は J の minimal reduction の一部となる. $IJ : a \subseteq \overline{I}$ を示す. $a \in A$ を $ax \in IJ$ ととる. $ax/1 \in IJV_i = aIV_i$ であるから, $x/1 \in IV_i$. また, $I \subseteq t^{-1}\overline{S}$ であり, $t^{-1}\overline{S} = Q_1 \cap Q_2 ... \cap Q_r$ を準素分解 $(\sqrt{Q_i} = P_i)$ とすれば, $x/1 \in IV_i \subseteq Q_i\overline{S}_{P_i}$. 故に $x \in Q_i$ $(i = 1, ..., r)$ となる. 従って $x \in t^{-1}\overline{S}$ となり, $xt \in \overline{S}$ となる. これは $x \in \overline{I}$ 意味する.

定理 *1.1* の証明. $(a,b) \subseteq J$ を minimal reducution で, a は補題 2.2 でとったものとする. I は整閉なので $IJ : a = I$ となっている. $as \in C$ が C/IC-正則元であることを示す. そうすれば $\mathrm{depth} C_N/IC_N > 0$ で補題 2.1 より $R(I,J)$ が Cohen-Macaulay となる. そこで $C/IC \xrightarrow{as} C/IC(1)$ が単射であることを斉次成分ごとにみる. つまり, 任意の $n \geq 0$ に対して, $J^n/IJ^n \xrightarrow{a} J^{n+1}/IJ^{n+1}$ が単射をいう. それには $IJ^{n+1} : a = IJ^n$ $(n \geq 0)$ を示せば十分である. $n = 0$ で正しい. $n > 0$ とし, $n-1$ で正しいと仮定する. (i.e. $(a) \cap IJ^n = aIJ^{n-1}$ を仮定する.) 今, C が Cohen-Macaulay なので, $G(J)$ も Cohen-Macaulay であり, $a(G(J)) < 0$ であるから, $J^2 = (a,b)J$ となっている. $x \in IJ^{n+1} : a$ とする. $ax \in IJ^{n+1} \cap (a)$ であり, $IJ^{n+1} \cap (a) = (a,b)IJ^n \cap (a) = aIJ^n + (a) \cap bIJ^n$ であり, $(a) \cap bIJ^n = b(IJ^n \cap ((a) : b)) = b(IJ^n \cap (a))$ であり, 帰納法の仮定より $(a) \cap IJ^n = aIJ^{n-1}$, よって $ax \in aIJ^n$. 従って $IJ^{n+1} : a \subseteq IJ^n$ を得る. 逆の包含

は明らか.

REFERENCES

[GH] S. Goto and S. Huckaba, *On graded rings associated to analytic deviation one ideals*, Amer. J. Math. **116** (1994), 905-919.

[L1] J. Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, I.H.E.S. **36** (1969), 195-279.

[L2] J. Lipman, *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. Math. **107** (1978), 151-207.

[L3] J. Lipman, *Cohen-Macaulayness in graded algebras*, preprint.

[LT] J. Lipman and B. Tessier, *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math J. **28** (1981), 97-116.

[HHRTa] M. Herrmann, E. Hyry, J. Ribbe and Z. Tang, *Reduction numbers and multiplicities of multigraded structures*, preprint.

[HH] S. Huckaba and C. Huneke, *Powers of ideals having small analytic deviation*, Amer. J. Math. **114** (1992), 367-403.

[V1] J. K. Verma, *Joint reductions and Rees akgebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109** (1991), 335-343.

[V2] J. K. Verma, *Joint reductions of complete ideals*, Nagoya Math. J. **118** (1990), 155-163.