数理解析研究所講究録
964巻 1996年 145-152



# Tight closure の理論を使ってできる Arithmetic Macaulayfication について

東京都立大学理学部数学教室　蔵野 和彦 (Kazuhiko Kurano)

以下は、姫路獨協大学の山岸氏との共同研究です。

## 1 Introduction

$(A, m)$ がネーター局所環とする。スキームの射 $\pi : X \to \mathrm{Spec}(A)$ が双有理な固有射で $X$ が Cohen-Macaulay (各点の局所環が Cohen-Macaulay) であるとき、$\pi$ は $A$ のマコーレー化 (Macaulayfication) であるということにする。

$(A, m)$ を Gorenstein 局所環の準同型像で、$\dim A = d + s$ とする。$L$ を $A$ のイデアルで、$\mathrm{ht}_A L = \dim G(L) \otimes A/m = d > 0$ (つまり、$L$ は equi-multiple) を充たすものとする。さらに、$z_1, \ldots, z_s \in A$ を、$A/L$ のパラメーター系となるように取る。($\dim A/L = s$ に注意。このとき、$z_1, \ldots, z_s$ は、$A$ のパラメーター系の一部になることに注意。)

このとき、次が成立する。([6])

**定理 1** 上の状況の下で、次は同値。

(1) $\mathrm{Proj}(R(L))$ は Cohen-Macaulay。

(2) 次の (a), (b) が成立する。

(a) $n \gg 0$ に対して $\mathrm{depth}\, L^n/L^{n+1} = s$ である。(つまり、$n \gg 0$ に対して、$z_1, \ldots, z_s$ は $L^n/L^{n+1}$- 正則列である。

(b) $\mathrm{Proj}(R(\overline{L}))$ は Cohen-Macaulay。ここで、$\overline{A} = A/(z_1, \ldots, z_s)$, $\overline{L} = L\overline{A}$ とする。

つまり、 Proj$(R(L))$ の Cohen-Macaulay 性を判定するためには、定理 1 の (2) の (a) と (b) を確かめればよい。

次の命題 2 ([6]) では、定理 1 の (2) の (b) が成立するためのある充分条件が与えられる。 d- 列、 u.s.d- 列等の定義、基本的な性質については、後藤 - 山岸 [3] を参照。

**命題 2** 定理 1 と同じ状況の下で (今、 $\dim \overline{A} = d > 0$ であり、 $\overline{L}$ は maximal primary ideal であることに注意)、さらに、次の 3 条件のうちの一つが成立するとする。

(I) $\overline{L}$ は $\overline{A}$ 上の u.s.d- 列で生成される。

(II) $\overline{L}^{r+1} = q\overline{L}^r$ を充たす整数 $r \geq 0$ とイデアル $q = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}) \subseteq \overline{L}$ が存在し、かつ、 $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}$ は、 $\overline{L}^r$ 上の u.s.d- 列である。

(III) $A/m$ が代数的閉体、 $\overline{L}^{r+1} = q\overline{L}^r$ を充たす整数 $r \geq 0$ とイデアル $q = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}) \subseteq \overline{L}$ が存在し、かつ、 $q = (\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_d})$ を充たす $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_d}$ は必ず $\overline{L}^r$ 上の d- 列である。

このとき、定理 1 の (2) の (b) は成立する。つまり、 Proj$(R(\overline{L}))$ は Cohen-Macaulay である。

<u>今までの仮定に加えて、さらに次を仮定する。</u>

$A$ は、エクセレント正則局所環の像とし、剰余体 $A/m$ は代数的閉体と仮定する。さらに、 $A$ は、標数 $p > 0$ の体を含む整閉整域とする。また、 $y_1, \ldots, y_d$ は $A$ のパラメーター系の一部で、これらはすべて test element と仮定する。さらに、 $d \geq 3$ とする。 $I = (y_1, \ldots, y_d)$, $L = I^*$ とおく。このとき任意の自然数 $n$ に対して $L^{n+1} = I^n L = (I^n)^*$ が成立し、特に $L$ は equi-multiple である。(詳しくは、次の章を参照のこと。)

このとき、 $L$ は、命題 2 の条件 (III) を充たす ([6])。 ($r = 1, q = I\overline{A}$ として。)

故に、定理 1、命題 2 によって、今の状況で、 Proj$(R(L))$ が Cohen-Macaulay であるための必要充分条件は、定理 1 の (2) の (a) が成立することであることがわかる。

このことから、直ちに次が証明できる ([6])。

**定理 3** $s = 0, 1$ であるとき、 Proj$(R(L))$ は Cohen-Macaulay。 ($s = 0$ のときは、 [8]、 $s = 1$ のときは、 [1], [6])

実は、定理 3 では、剰余体 $A/m$ は代数的閉体と仮定する必要はない。実際、 [6] の論文と appendix では、 $s = 0, 1$ の場合にその仮定をしないでリース環 $R(L)$ の局所コホモロ

ジー群が計算される。以下の章の目的は、まさに、リース環 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算である。

## 2 Tight closure について

$p$ を素数とし、$C$ を標数 $p$ のネーター環とする。

**定義 4** $J$ を $C$ のイデアルとする。$C^\circ = C \backslash \cup_{P \in \mathrm{Min}\, C} P$ とおく。$J^*$ を次の様に定義する。$x \in C$ に対して、ある $c \in C^\circ$ が存在して充分大きい $e$ に対して $cx^{p^e} \in J^{[p^e]} = (y^{p^e} \mid y \in J)$ が成立するときに $x \in J^*$ とする。$J^*$ をイデアル $J$ の tight closure という。

任意の $C$ のイデアル $J$ と任意の $x \in J^*$ と任意の非負整数 $e$ に対して、$cx^{p^e} \in J^{[p^e]}$ を充たす $c \in C^\circ$ を、$C$ の test element という。

次の性質は、colon capturing と言われる。

**補題 5** $(C, m)$ を標数 $p$ の *equi-dimensional excellent* 局所環とする。$x_1, \ldots, x_d$ を $C$ のパラメーター系とし、$I$ と $J$ を *(polynomial) subring* $D = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_d] \subset C$ の *monomial* イデアルとする。このとき、

$$
\begin{aligned}
(IC)^* \underset{C}{:} JC &= ((I \underset{D}{:} J)C)^*, \\
(IC)^* \cap (JC)^* &= ((I \cap J)C)^*.
\end{aligned}
$$

が成立する。

以上の性質等は、[5] を参照。

以下、最後まで、次を仮定する。

$(A, m)$ は、$d+s$ 次元エクセレント正則局所環の像とする (ここでは、剰余体 $A/m$ は代数的閉体とは仮定しない)。さらに、$A$ は、標数 $p > 0$ の体を含む整閉整域とする。また、$y_1, \ldots, y_d$ は $A$ のパラメーター系の一部で、これらはすべて test element と仮定する。さらに、$d \geq 3$ とする。$I = (y_1, \ldots, y_d)$, $L = I^*$ とおく。

このとき、次が成立する ([8])。

**補題 6** このとき任意の自然数 $n$ に対して $L^{n+1} = I^n L = (I^n)^*$ が成立し、特に $L$ は *equi-multiple* である。

このとき、[8], [1] によって次のことがわかる。

**定理 7** *(1)* $s=0$ かつ $i \geq d-2\ (=d+s-2)$ のとき、$R(L)^{(i)} = R(L^i)$ は *Cohen-Macaulay* 環である *([8])*.

*(2)* $s=1$ かつ $i \geq d-1\ (=d+s-2)$ のとき、$R(L)^{(i)} = R(L^i)$ は *Cohen-Macaulay* 環である *([1])*.

我々の目標は、$R(L)$ の局所コホモロジー群の計算によって上の定理に別証明を付け、$d+s-2$ の意味を解析することである。

次の補題が、後の証明の鍵である。

**補題 8** $1 \leq i \leq j \leq d$ に対して、$(y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{L}{:} y_i^{n_i} y_j^{n_j} = (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{L}{:} y_j^{n_j}$ が成立する。

つまり、$y_1, \ldots, y_d$ は $L$ 上の *u.s.d.*-列である。*(*$y_1, \ldots, y_d$ は $A$ 上の *u.s.d.*-列であることは、もっと簡単に証明できる。*)*

証明. $x \in (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{L}{:} y_i^{n_i} y_j^{n_j}$ をとる。このとき、補題 5 により

$$(y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{L}{:} y_i^{n_i} y_j^{n_j} \subseteq (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{A}{:} y_i^{n_i} y_j^{n_j} \subseteq (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})^*$$

であることがわかる。さらに、$y_j^{n_j}$ は、test element であることより、

$$y_j^{n_j} x \in (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})$$

が成立する。故に、

$$y_j^{n_j} x = y_1^{n_1} w_1 + \cdots + y_{i-1}^{n_{i-1}} w_{i-1}.$$

と書ける。このとき、再び補題 5 を使って、$m = 1, \ldots, i-1$ に対して

$$w_m \in (y_1^{n_1}, \ldots, y_{m-1}^{n_{m-1}}, y_{m+1}^{n_{m+1}}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}}, y_j^{n_j}) \underset{A}{:} y_m^{n_m} \subseteq L$$

が成立する。このとき、

$$x \in L \cap (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{A}{:} y_j^{n_j} = (y_1^{n_1}, \ldots, y_{i-1}^{n_{i-1}})L \underset{L}{:} y_j^{n_j}.$$

がわかる。 証明終

## 3 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算

この章で、 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算をする。詳しくは [6] 参照。
$M = mR(L) + R(L)_+$, $N = LR(L) + R(L)_+$ を、 $R(L)$ の斉次イデアルとする。
まず、次を証明する。

定理 **9** 次が成立する。

*(1)* $k = 0, 1$ に対して、 $H_N^k(G(L)) = (0)$ 。

*(2)* $k = 2, \ldots, d-1$ に対して、 $H_N^k(G(L)) = [H_N^k(G(L))]_{1-k} = H_L^k(A)$。

*(3)* $a(G(L)) \leq 1 - d$.

*(4)* $k = 0, 1, 2, 3$ に対して、 $H_N^k(R(L)) = (0)$。

*(5)* $k = 4, \ldots, d$ に対して、

$$[H_N^k(R(L))]_n = \begin{cases} H_L^{k-1}(A) & 3 - k \leq n \leq -1 \text{ のとき} \\ (0) & \text{その他}. \end{cases}$$

*(6)* $a(R(L)) = -1$. *(cf. Lemma (6.3) in Part I of [2]).*

ここで、 $a(-)$ は、 a-invariant *(cf. [4])* を表すものとする。

証明. 完全列

$$0 \longrightarrow R(L)_+ \longrightarrow R(L) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を見る。 $L$ の、イデアル $I$ に関するリース加群を $R_I(L)$ とおく。つまり、

$$[R_I(L)]_n = \begin{cases} I^n L & (n \geq 0) \\ (0) & (n < 0) \end{cases}$$

である。このとき、補題 6 によって $L^2 = IL$ が成立することより、 $R(L)_+ = R_I(L)(-1)$ が成立する。このとき、補題 8 により、 $y_1, \ldots, y_d$ は $L$ 上の u.s.d- 列である。このことより、リース加群 $R_I(L)$ の局所コホモロジー $H_N^k(R_I(L))$ は、 [3] の結果を使うことによって次のようになることがわかる。

- $k = 0, 1, 2$ のとき、 $H_N^k(R_I(L)) = (0)$.

- $3 \leq k \leq d$ のとき、

$$[H_N^k(R_I(L))]_n = \begin{cases} H_I^{k-1}(L) = H_L^{k-1}(A) & 2 - k \leq n \leq -1 \text{ のとき} \\ (0) & \text{その他}. \end{cases}$$

- $a(R_I(L)) < 0$.

さらに、完全列

$$0 \longrightarrow R_I(L) \longrightarrow R(L) \longrightarrow G(L) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow G_I(L)(-1) \longrightarrow G(L) \longrightarrow A/L \longrightarrow 0$$

を使うことにより、定理の証明ができる。詳しくは、[6] 参照。 証明終

$s = 0$ の場合は $\sqrt{N} = M$ であるから、このとき、$H^k_N(R(L)) = H^k_M(R(L))$ である。さらに、任意の自然数 $n$ に対して

$$\left(H^k_M(R(L))\right)^{(n)} = H^k_{M\cap R(L)^{(n)}}(R(L)^{(n)})$$

であることより ([4])、直ちに次の系がわかる。(定理 7 と比較してください。)

系 **10** $s = 0$ とする。このとき、$R(L^n)$ が *Cohen-Macaulay* 環であるための必要充分条件は、$n \geq d - 2$ である。

次に、$s > 0$ の場合を考える。

$z_1, \dots, z_s \in A$ を、$A/L$ のパラメーター系とする。(このとき、$z_1, \dots, z_s, y_1, \dots, y_d$ は、$A$ のパラメーター系であることに注意。)

また、$\sqrt{\underline{z} + N} = M$ であることに注意すれば、スペクトル系列

$$E_2^{pq} = H^p_{(\underline{z})} H^q_N(R(L)) \Rightarrow H^{p+q}_M(R(L))$$

があるがあることがわかる。

$s = 1$ の場合は、上のスペクトル系列を使って次の結果を得た。

定理 **11** *$s = 1$ ($\dim A = d + s = d + 1$) とする。また、$i = 2, \dots, d$ と $j = 0, 1$ に対して、$H^j_i$ を*

$$H^j_i = H^j_{(z_1)}\left(\frac{(y_1, \dots, y_i)^*}{\sum_{k=1}^i (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_i)^*}\right).$$

*とおく。(補題 8 でコメントしたが、$y_1, \dots, y_d$ は $A$ 上の $u.s.d$-列である。従って、[3] の Theorem (3.9) によって $i < d$ であるときは $H^j_i = H^j_{(z_1)}(H^i_L(A))$ が成立する。) このとき、次が成立する。*

*(1) $k = 0, 1$ のとき、$H^k_M(G(L)) = (0)$.*

*(2)* $H^2_M(G(L)) = [H^2_M(G(L))]_{-1} = H^0_2$.

*(3)* $k = 3, \ldots, d$ のとき、

$$[H^k_M(G(L))]_n = \begin{cases} H^1_{k-1} & n = 2-k \\ H^0_k & n = 1-k \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

*(4)* $a(G(L)) \leq 1-d$ かつ $[H^{d+1}_M(G)]_{1-d} = H^1_d$.

*(5)* $k = 0,1,2,3$ のとき、$H^k_M(R(L)) = (0)$.

*(6)* $H^4_M(R(L)) = [H^4_M(R(L))]_{-1} = H^0_3$.

*(7)* $k = 5, \ldots, d+1$ のとき、

$$[H^k_M(R(L))]_n = \begin{cases} H^{k-1}_m(A) & 4-k \leq n \leq -1 \\ H^0_{k-1} & n = 3-k \\ (0) & \text{その他} \end{cases}$$

*(8)* $a(R(L)) = -1$.

このことより、直ちに次の系がわかる。(定理 7 と比較してください。)

**系 12** $s = 1$ とする。このとき、$n \geq d-3 = d+s-2$ であれば、$R(L^n)$ は *Cohen-Macaulay* 環である。また、$R(L^n)$ が *Cohen-Macaulay* 環であれば、$n \geq d-2 = d+s-3$ が成立する。

## 参考文献


[1] I. M. Aberbach, Arithmetic Macaulayfication using ideals of dimension one, preprint.

[2] S. Goto and K. Nishida, *The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees Algebras associated to filtrations,* Mem. Amer. Math. Soc., Number 526, 1994

[3] S. Goto and K. Yamagishi, The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology, preprint.

[4] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, I, *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), 179–213.

[5] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 31–116.

[6] K. KURANO, On Macaulayfication obtained by a blow-up whose center is an equimultiple ideal,
K. YAMAGISHI, Unconditioned strong d-sequences and local cohomology of Rees and associated graded modules (appendix), preprint.

[7] T. KAWASAKI, On Macaulayfication of certain quasi-projective schemes, preprint.

[8] C. HUNEKE AND K. E. SMITH, A tight closure approach to arithmetic Macaulayfication, preprint.

東京都立大学理学部数学教室
192-03 東京都八王子市南大沢 1-1
E-mail address: kurano@math.metro-u.ac.jp