

## Affine semigroup rings of codimension two

早大 教育 衛藤 和文 (Kazufumi Eto)

### 1 はじめに

$k$  を体とし、 $S$  を加法的半群  $\mathbf{N}_0^s$  の有限生成部分半群とする、但し  $e$  は自然数、 $\mathbf{N}_0$  は 0 と自然数全体からなる集合。このとき、半群環  $k[S]$  が定義される。この環をアフィン半群環という。また、 $k[S] \cong k \left[ \prod_{i=1}^s t_i^{n_{i1}}, \dots, \prod_{i=1}^s t_i^{n_{ir}} \right]$  ( $n_{ij} \geq 0$ ) のとき、次のような自然な環準同型写像が与えられ、

$$\begin{aligned} k[X_1, \dots, X_r] &\longrightarrow k[S] \\ X_j &\longrightarrow \prod_{i=1}^s t_i^{n_{ij}} \end{aligned}$$

その核をアフィン半群環の定義イデアルという。

ここでは、その定義イデアルの高さが 2 の場合を取り扱う。この場合について、今までに知られている結果を述べよう。1970 年、Herzog は  $s = 1$  のとき (必然的に  $r = 3$ )、その定義イデアルは、高々 3 元で生成されることを証明した ([7])。また、鴨井氏によって、 $S$  が simplicial 半群のとき  $k[S]$  が Cohen-Macaulay であることと定義イデアルが高々 3 元で生成されることが同値であることが証明された ([9])。さらに simplicial な場合に関しては最近の Morales の結果もある ([11])。

一方で、 $\mathbf{P}^3$  の (projective) monomial curve の座標環もアフィン半群環で、その定義イデアルの高さも 2 である。この場合は Bresinsky らによって様々な性質が (例えば minimal free resolution) が調べられている ([1], [2], [3], [4], [8])。

この報告では、 $S$  が simplicial であることを仮定せずに、しかもすべての結果を含むような理論があることを紹介します。その中で最も驚くべきものは、簡単に定義イデアルの最小生成系を求めるアルゴリズムが存在することだと思えます。将来、この方向が定義イデアルの高さが 3 以上の場合にも応用できることを期待しています。

## 2 定義イデアルの最小生成系

$k[S] \cong k \left[ \prod_i^s t_i^{n_{i1}}, \dots, \prod_i^s t_i^{n_{ir}} \right]$ ,  $A = k[X_1, \dots, X_r]$  とする。このとき  
 $V = \text{Ker} \begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{s1} & \cdots & n_{sr} \end{pmatrix} \subset \mathbf{Z}^r$  とおく。  
 $v \in V$  に対し、

$$F(v) = \prod_{\sigma_j(v) < 0} X_j^{-\sigma_j(v)} - \prod_{\sigma_j(v) > 0} X_j^{\sigma_j(v)} \in A$$

とおき、

$$I(V) = (F(v))_{v \in V} \quad \left( \begin{array}{l} \text{すべての } F(v) \text{ によって生成} \\ \text{される } A \text{ のイデアル} \end{array} \right)$$

とおく。

このとき  $I(V)$  が  $k[S]$  の定義イデアルになる。より一般に、 $\mathbf{Z}^r$  の部分加群  $V$  に対して  $A$  のイデアル  $I(V)$  は定義できることを注意する。事実上、重要なのは  $V$  が positive の場合である。 $V$  が positive とは、ある自然数  $n_1, \dots, n_r$  が存在し、 $V$  が  $\text{Ker}(n_1, \dots, n_r)$  に含まれることである。但し、 $(n_1, \dots, n_r) \in \text{Hom}(\mathbf{Z}^r, \mathbf{Z})$ 。  $V$  が positive のとき、 $A/I(V)$  は positively graded ring になる。実際、 $\deg X_i = n_i$  とおけば、各  $F(v)$  は homogeneous になり  $I(V)$  は homogeneous ideal になる。

さらに degree を固定したとき次の補題が成立。

**補題 2.1**  $V$  が positive のとき (その positive degree に関して)  $v_1, v_2 \in V$  について、

$$\deg F(v_1) \leq \deg F(v_1 + v_2)$$

ならば

$$\deg F(v_1 + v_2) \leq \deg F(2v_1 + v_2)$$

この補題は大変重要である。例えば

$$\begin{aligned} \deg F(v_1) &\leq \deg F(v_1 + v_2) \\ \text{かつ } \deg F(v_2) &\leq \deg F(v_1 + v_2) \end{aligned}$$

のとき、 $F(v_1+v_2)$  はすべての  $F(mv_1+nv_2)$  ( $m > 0, n > 0$ ) の形であらわされる多項式の中で degree 最小であることがわかる。さらに、 $F(v_1), F(v_2)$  が最小生成系の一部で、

$$F(v_1+v_2) \notin (F(v_1), F(v_2))$$

ならば、 $F(v_1+v_2)$  が最小生成系に含まれることが期待される (実際そうである)。

一方、 $F(v_1+v_2) \in (F(v_1), F(v_2))$  の場合はどのようなになっているかという、

**補題 2.2**  $\text{rank} \langle v_1, v_2 \rangle = 2$  とする。このとき  $F(v_1+v_2) \in (F(v_1), F(v_2))$  となるための必要十分条件は、次の符号条件が成り立たないことである。

$$\begin{aligned} \exists i, i' \quad \sigma_i(v_1) > 0, \sigma_{i'}(v_1) < 0 \\ \sigma_i(v_2) < 0, \sigma_{i'}(v_2) > 0. \end{aligned}$$

上の補題によって、次がわかる。

$F(v_1+v_2) \in (F(v_1), F(v_2))$  ならば、  
任意の  $m > 0, n > 0$  に対して、

$$F(mv_1+nv_2) \in (F(v_1), F(v_2)).$$

すなわち、 $F(v_1+v_2)$  がイデアル  $(F(v_1), F(v_2))$  に入るかどうかによって、すべての  $F(mv_1+nv_2)$  という形の多項式がそのイデアルに入るかどうかかわかる。

この2つの補題によって、次の最小生成系を求めるアルゴリズムをえる。

### 《 アルゴリズム 》

- (1)  $V = \langle v_1, v_2 \rangle$  となる  $v_1, v_2$  を選ぶ。
- (2)  $v_1, v_2$  の degree を最小化する。

すなわち、 $F(v_1), F(v_2)$  の degree と  $F(v_1+v_2), F(v_1-v_2)$  の degree を比較する。もし、それらの degree より

$\deg F(v_1), \deg F(v_2)$  が等号を含めて小さければ O.K. もし大きければ、例えば、

$$\deg F(v_1) > \deg F(v_1 + v_2)$$

のときは、 $v_1 + v_2$  を  $v_1$  と置きなおして、もう一度比較する。明らかにこの操作は有限回で終わる。

- (3)  $v_1, v_2, -v_1$  と並べ、前の補題の符号条件を各隣り合った元についてチェックする。符号条件をみたしているときは、その間に 2 つの元を加えたものを入れ、再び条件を新しく隣り合った元についてチェックする。もし条件をみたしてないときは、そのまま何も加えない。加えるものが無くなった時点で作業は終わる。

ここにあらわれた元の中で  $-v_1$  以外のそれぞれの元に対応する  $F(v)$  という形の多項式が  $I(V)$  の最小生成系をなす。

例  $V = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  の場合。

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  とおくと、 $V = \langle v_1, v_2 \rangle$  で、degree 最小である。そこで、上のアルゴリズムの (3) を行くと、

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_1 & v_2 & -v_1 \end{array}$$

から、

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_1 & 4v_1 + v_2 & 3v_1 + v_2 & 2v_1 + v_2 & v_1 + v_2 & v_2 & -v_1 \end{array}$$

をえる。このとき、

$$F(v_1), F(4v_1 + v_2), F(3v_1 + v_2), F(2v_1 + v_2), F(v_1 + v_2), F(v_2)$$

が  $I(V)$  の最小生成系である。

### 3 Minimal free resolution

前の節で、 $I(V)$  の最小生成系が求まったので、Bresinsky ([1]) と同様の方法で minimal free resolution をえる。

**定理 3.1**  $A/I(V)$  は次の *minimal free resolution* をもつ。但し、 $a = \mu(I(V)) \geq 3$ 。

$$0 \longrightarrow A^{a-3} \longrightarrow A^{2(a-2)} \longrightarrow A^a \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

この結果、

**系 3.2**  $A/I(V)$  が *Cohen-Macaulay* であるための必要十分条件は、 $\mu(I(V)) \leq 3$  である。

さらに、鴨井 [10], Bresinsky et al. [3] の拡張として、次の結果を示すことができる。

**定理 3.3** (1)  $A/I(V)$  が *non Cohen-Macaulay  $k$ -Buchsbaum* ならば、 $r = 4$  ( $r = \dim A$ )。

(2)  $A/I(V)$  が *Buchsbaum* ならば、 $\mu(I(V)) \leq 4$ 。

(3)  $A/I(V)$  が  *$k$ -Buchsbaum* ならば、 $\mu(I(V)) \leq k + 3$ 。

但し、 $A/I(V)$  が  *$k$ -Buchsbaum* とは、 $m^k H_m^{r-3}(A/I(V)) = 0$  となることである、ここで  $m = (X_1, \dots, X_r)$ 。

**注意**  $A/I(V)$  が *non Cohen-Macaulay  $k$ -Buchsbaum* アフィン半群環のとき、(1) より、 $r = 4$ ,  $\dim A/I(V) = 2$  となる。ゆえに、その定義する半群は必然的に simplicial になる。特に Buchsbaum の場合に、どのような半群になるかは鴨井 [10] によって研究されている。

また、non simplicial 半群に付随した半群環で、Cohen-Macaulay になるものも存在する。

**注意** 上の定理は、Cohen-Macaulay 性などの性質が、係数体  $k$  の標数によらないことを示している。一般の半群環については、そのようなことはいえない ([14])。

## 4 最後に

講演で最後に述べたことに関する正確な statement を付け加えます。  
もちろん、 $\text{ht } I(V)$  に関する制限はありません。

まず、次を仮定する。

$V$  は positive,  $\text{rank } V = r_0$ ,

$\exists v_1, \dots, v_{r_0} \in V$

s.t.  $V = \langle v_1, \dots, v_{r_0} \rangle, I(V) = (F(v_{j_1} + \dots + v_{j_s}))$   
 $1 \leq s \leq r_0$   
 $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq r_0$

このとき、

**定理 4.1** 環  $A/I(V)$  は *Cohen-Macaulay* である。

この定理は実際 free resolution を作ることによって示される。 $r_0$  が小さい場合の free resolution は次のようになる。

$$0 \longrightarrow A^2 \longrightarrow A^3 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (r_0 = 2)$$

$$0 \longrightarrow A^6 \longrightarrow A^{12} \longrightarrow A^7 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (r_0 = 3)$$

$$0 \longrightarrow A^{24} \longrightarrow A^{60} \longrightarrow A^{50} \longrightarrow A^{15} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (r_0 = 4)$$

定理の条件をみたす例としては、

- (1)  $I(V)$  が almost complete intersection,
- (2)  $A/I(V)$  が planar distributive lattice に付随した環.  
(講演ではここがはっきりしなかったところです)

がある。

この節の内容については、現在論文準備中です。

## 参考文献

- [1] H. Bresinsky. Minimal free resolutions of monomial curves in  $\mathbf{P}_k^3$ .  
*Linear Algebra and Appl.*, **59**:121–129, (1984).
- [2] H. Bresinsky. On the Cohen-Macaulay property for monomial curves  
in  $\mathbf{P}^3$ . *Monatsh. Math.*, **98**:21–28, (1984).

- [3] H. Bresinsky, F. Curtis, M. Fiorentini, and L. T. Hoa. On the structure of local cohomology modules for monomial curves in  $\mathbf{P}_K^3$ . *Nagoya Math. J.*, **136**:81–114, (1994).
- [4] H. Bresinsky, P. Schenzel, and W. Vogel. On liaison, arithmetical Buchsbaum curves and monomial curves in  $\mathbf{P}^3$ . *J. Algebra*, **86**:283–301, (1984).
- [5] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, 1993. Cambridge studies in adv. math. 39.
- [6] K. Eto. Affine semigroup rings of codimension two. (to appear).
- [7] J. Herzog. Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta Math.*, **3**:175–193, (1970).
- [8] L. T. Hoa. On monomial  $k$ -Buchsbaum curves in  $\mathbf{P}^3$ . *Manuscripta Math.*, **73**:423–436, (1991).
- [9] Y. Kamoi. Defining ideals of Cohen-Macaulay semigroup rings. *Comm. in algebra*, **20**(11):3163–3189, (1992).
- [10] Y. Kamoi. Defining ideals of Buchsbaum semigroup rings. *Nagoya Math. J.*, **136**:115–131, (1994).
- [11] M. Morales. Equations des variétés monomiales en codimension deux. *J. Algebra*, **175**:1082–1095, (1995).
- [12] J. Stückrad and W. Vogel. *Buchsbaum Rings and Applications*. Springer-Verlag, 1986.
- [13] N. Terai. Distributive lattices and their associated rings. In 第17回可換環論シンポジウム報告集, pages 89–97, 1995.
- [14] N. V. Trung and L. T. Hoa. Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298**:145–167, (1986).