数理解析研究所講究録
964巻 1996年 120-131

Arithmetic degree (非孤立素因子込みの“次数”) について

柳川 浩二

名古屋大学　理学部　数学教室
yanagawa@math.nagoya-u.ac.jp

本稿の内容は, 宮崎 誓氏, W. Vogel 氏との共同研究である ([7] 参照).

1　準素分解と算術次数

k を体 (簡単の為 $\#k=\infty$ とする), $S=k[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ を $n+1$ 変数の多項式環とし, 各 x_i の次数を 1 として 次数付環とみなす. これの無縁イデアル を m と記す, つまり $m=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$.

$M=\bigoplus M_i$ を有限生成の次数付 S-加群とする。御存知のように, M の次数 $\deg M$ は M の Hilbert 多項式によって定義される. 具体的に言うと, $d=\dim M\geq 1$ の時には,

$$t\gg 0 \quad \text{に対して} \quad \dim_k M_t=\frac{\deg M}{(d-1)!}t^{d-1}+(d-2\text{-次以下の項}),$$

$d=0$ ならば, $\deg M=\dim_k M$.

ところが, 良く知られているように, $\deg M$ は $\mathrm{Assh}(M):=\{P\in \mathrm{Ass}(M)\,|\,\dim S/P=\dim M\}$ の元における M の局所的な情報のみで決まってしまう. つまり,

$$\deg M=\sum_{P\in \mathrm{Assh}(M)}\ell(M_P)\deg(S/P)$$

である. もちろん $\ell(-)$ は, S_P 加群としての長さを表す. 本稿のテーマである **arithmetic degree** (算術次数) ” とは, 非孤立素因子も含め $\mathrm{Ass}(M)$ の全ての元における情報を考慮した “refine された” 次数であり, 最近では 主として computational な立場から, 活発に研究されている ([1, 9] 等).

各整数 $i\geq -1$ に対し,

$$M_{\leq i}:=\{x\in M\,|\,\dim(S/\operatorname{ann}(x))\leq i\},$$

と置くと, $M_{\leq i}$ は M の次数付部分加群であり $\mathrm{Ass}(M_{\leq i}) = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \mid \dim S/P \leq i\}$ であって, なおかつ $M_{>i} := M/M_{\leq i}$ と置いた時に, $\mathrm{Ass}(M_{>i}) = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \mid \dim S/P > i\} = \mathrm{Ass}\, M \setminus \mathrm{Ass}(M_{\leq i})$ となる. ただし, $M_{\leq -1} = \{0\}$ とする.

定義 1.1 各 $r \geq -1$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{arith-deg}_r(M) &:= \begin{cases} \deg(M_{\leq r+1}) & \dim M_{\leq r+1} = r+1 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ &= \sum_{P \in \mathrm{Spec}\, S,\ \dim S/P = r+1} \ell(H_P^0(M_P)) \cdot \deg(S/P). \end{aligned}$$

また 簡単の為, イデアル $I \subset S$ に対し, $\text{arith-deg}_r(S/I)$ を $\text{arith-deg}_r(I)$ と書く.

$\ell(H_P^0(M_P))$ を M の P における **length multiplicity** と呼ぶ.

二つ目の等式で, 素イデアル P に対し $H_P^0(M_P) \neq 0$ は $P \in \mathrm{Ass}(M)$ と同値であるし, $P \in \mathrm{Min}\, M$ ならば $M_P = H_P^0(M_P)$ である. 従って, $d = \dim M$ とおくと, $\text{arith-deg}_{d-1} M = \deg M$ である (arithmetic degree に関しては, [1, 9] に於ける記号法に従ったが, 彼らは射影幾何的な次元を採用しているので, 環論的な Krull 次元とは, 番号付けが一つずれることに注意).

一見煩わしい定義であるが, 命題 1.4 で示すように, 局所双対性をうまく利用して (準素分解を経由せずに) かなりの例まで $\text{arith-deg}_r(-)$ を, *Macaulay* 等のソフトを用いて具体的に計算できる (計算機を用いた準素分解は, computational commutative algebra の重要なテーマの一つで, 実際に実行可能なのだが, 大変 時間がかかるようである. [3] を参照). まず, 次の事実がある. ただし, 零加群の次元は -1 とし, $\mathrm{codim}\, M := \dim S - \dim M = \mathrm{ht}(\mathrm{ann}(M))$ と定義する.

命題 1.2 (c.f., [3]) 任意の $0 \leq i \leq n+1$ について $\mathrm{codim}(\mathrm{Ext}_S^i(M,S)) \geq i$ である. また, $\mathrm{codim}(\mathrm{Ext}_S^i(M,S)) = i$ となる為の必要充分条件は, Mが 高さ i の素因子を持つ事である. さらに, $\mathrm{ht}(P) = i$ なる S の斉次素イデアル P に対し, $P \in \mathrm{Ass}(M)$ と $P \in \mathrm{Min}(\mathrm{Ext}_S^i(M,S))$ は 同値.

注意 1.3 上の命題で, S を $(n+1)$-次元の Gorenstein 局所環としても, 同様の事が成立する. 本稿 第 3 節の 命題 3.4も参照のこと.

命題 1.4 (c.f., [10]) 任意の $r \geq -1$ について,

$$\begin{aligned} \text{arith-deg}_r(M) &= \begin{cases} \deg \mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S) & \mathrm{codim}(\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)) = n-r \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ &= \deg(\mathrm{Ext}_S^{n-r}(\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S),S)). \end{aligned}$$

以後しばらく, arithmetic degree に関して, これまでに得られている代表的な結果を紹介する.

まず, イデアルの arithmetic degree の上限を, 剰余環の (Castelnuovo–Mumford) regularity を用いて表すという方向の研究がいくつか存在する. Bayer, Mumford や その周辺の人達は, regularity を 環の "複雑さ" を表す不変量と捉えているようなので, 自然な問題設定と言う気がする. これについては, [1, 6] 等を参照して頂きたい.

以後 arith-deg$(I) := \sum_{r\geq -1}$ arith-deg$_r(I)$ とおく.

定理 1.5 (Sturmfels et.al. [9, Theorem 3.1]) I を 単項式の集合 $\{m_1, m_2, \cdots, m_s\}$ を極小生成元に持つイデアル とすると,

$$\max\{\deg(m_i) \mid 1 \leq i \leq s\} \leq \text{arith-deg}(I) \leq (\prod_{i=1}^{s} \deg(m_i)) + s - \mathrm{ht}(I)$$

が成り立つ.

上の不等式は (左右とも), 単項式イデアルでない場合には, 簡単な反例がある.

例 1.6 (i) 一般のイデアルの場合の左側の不等式の反例; $S = k[x, y, u, v]$, $I = (x^2, xy, xu^t + yv^t, y^2)$ とすると, arith-deg$(I) = \deg(S/I) = 2$ なので, $t \geq 2$ ならば, 左側の不等式が成立しない.

(ii) 右側の不等式の反例; 同じく $S = k[x, y, u, v]$ とし, $I = (xv - yu, x^{b-a}u^a - y^b, u^b - y^a v^{b-a})$ と置く. arith-deg$_1(I) = \deg(S/I) = a + b$, arith-deg$_{-1}(I) = 0$ であるが, 何と arith-deg$_0(I) = \binom{b-a+1}{3}$ であり, $b \gg a$ ならば右側の不等式が成立しない.

arithmetic degree は 1966 年の Hartshorne [5] で既に考察されている ("arithmetic degree" という用語は使われてないが). "普通の" degree は, Hilbert 多項式のみで決まるので, flat deformation で不変であるが, arithmetic degree は 不変ではない. ただし, 命題 1.4 からも分かるように上半連続ではある (これが [5] における, arithmetic degree そのものに関する主結果であった). 特に 次の事が言える.

定理 1.7 (c.f., [9, 10]) $I \subset S$ を斉次イデアル, in(I) を (ある monomial order に関する) I の initial ideal とする. このとき,

$$\text{arith-deg}_r(\mathrm{in}(I)) \geq \text{arith-deg}_r(I).$$

Gröbner 基底と flat deformation の関係については, [1, 2] を参照して欲しい.

定理 1.7 に於ける不等式の ギャップは 一般には非常に大きい. 例えば, 例 1.6 (i) の S/I であるが, 適当な変数変換をした上で, reverse lexicographic order を入れて考えると,

$$
\begin{aligned}
& \text{arith-deg}(\text{in}(I)) \\
\geq\ & \text{in}(I) \text{ の極小生成元の内で最も次数の高いものの次数} \qquad (\text{定理 1.5 より}) \\
=\ & \text{reg}(\text{in}(I)) \qquad (\text{“generic initial ideal” の基本的性質. [2] 参照}) \\
=\ & \text{reg}(I) \qquad (\text{上に同じ}) \\
\geq\ & t+1
\end{aligned}
$$

$\text{arith-deg}(I) = 2$ であったから, その差はいくらでも大きく成り得る事が分かる.

今回の筆者の講演には登場しなかったが, geometric degree という類似の不変量も [1] で定義されている. これは, arithmetic degree から非孤立素因子の寄与を除いたものであり, 具体的には

$$\text{geom-deg}_r(M) := \sum_{P \in \text{Min}(M),\, \dim S/I = r+1} \ell(H^0_P(M_P)) \deg(S/P)$$

で定義される. これは文字通り, arithmetic degree 程には 計算し易くないようである. 面白いことに, arithmetic degree とは逆に,

$$\text{geom-deg}_r(\text{in}(I)) \leq \text{geom-deg}_r(I)$$

が成立している ([9]). 実際に 不等号となる例も, generic initial ideal の手法を用いて簡単に構成できる. 一般に, in(I) は I より “悪く” なるので, I では極小素因子であったものが, in(I) では非孤立素因子になる場合があるからである.

また, arithmetic degree は, “effective Nullstellensatz” と呼ばれる問題とも関連があり, 次が成り立つ. ただし, あまり sharp な上限ではない. [7] では, これをある程度改良している.

定理 1.8 ([9, Theorem 2.2]) $I \subset S$ を斉次イデアル, $s = \text{arith-deg}(I)$ とすると,

$$(\sqrt{I})^s \subset I.$$

また, Vasconcelos [10] では, Noether の正規化と arithmetic degree との関連が, 考察されている.

2 算術次数と Bezout の定理

この節では, $f \in S$ を M-正則な斉次元 (実際には, もう少し弱い条件でも良い) とした時の, $\text{arith-deg}_r(M)$ と $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM)$ との関係について, 基礎的な考察を行なう. 標語的に言えば, arithmetic degree に関する Bezout の定理である. この節及び次節の結果は, すべて [7] で得られたものである.

<u>定理</u> **2.1** r を非負整数とし, $f \in S$ を $\dim(S/P) \geq r+1$ なる $P \in \text{Ass}(M)$ に含まれない斉次元とする. このとき,

$$\begin{aligned}
&\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\
&= \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M,S)}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M) \\
&= \text{arith-deg}_{r-1}(M_{>r+1}/fM_{>r+1}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M).
\end{aligned}$$

さらに, $P \subset S$ を $\dim S/P = r$ なる 斉次素イデアルとしたとき, $[0:f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M,S)}$ や $M_{>r+1}/fM_{>r+1}$ の P に於ける length multiplicity は,

$$H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \simeq H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P)$$

の S_P 加群としての長さで与えられる.

$H_P^1(M_P)$ は S_P 加群として 必ずしも有限生成ではないので, $H_P^1(M_P) \neq 0$ かつ $f \in P$ であっても, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \neq 0$ とは限らない. 一方, $(M_{>r+1})_P$ は, S_P 加群として Krull 次元 1 の素因子を持たないので, $H_P^1((M_{>r+1})_P)$ は S_P 加群として常に長さ有限 (特に有限生成) である. よって, $H_P^1((M_{>r+1})_P) \neq 0$ かつ $f \in P$ ならば 必ず $H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P) \neq 0$. また $(M_{>r+1})_P \neq 0$ であれば必ず, これの S_P 加群としての depth は 1 以上なので, 従って次の系を得る.

<u>系</u> **2.2** 定理 2.1 と同じ状況で, 以下は同値.

(i) $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M)$

(ii) f が, $P \in \text{Ass}\, M \bigcup \text{Ass}(\text{Ext}_S^{n-r}(M,S))$ 且つ $\dim S/P = r$ なる P に含まれない.

(iii) f が, $\dim S/P = r$ であって $P \in \text{Ass}\, M$ 或いは $\text{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P = 1$ となる 斉次素イデアル P に含まれない.

よって, 特に, $r \geq 1$ ならば, 一般の f について (i) の等号が成立.

注意 2.3 上の系で, $r = \dim M - 1$, つまり arith-$\deg_r(M) = \deg M$ の場合を考えよう. 良く知られているように, $\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M, S)$ は $r+1 (= \dim M)$ 次元の加群で, さらに Serre の S_2 条件を満たす. 従って $P \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M, S))$ ならば常に $\dim S/P = r+1$ である. よって 上の系の (i) と (ii) の同値性から, 系と同じ条件下で, $\deg(M/fM) = \deg(f) \cdot \deg M$ となる為の必要充分条件は, f が $P \in \mathrm{Ass}\, M$ 且つ $\dim S/P = r$ なる P に含まれない事であると分かる. これは, 条件 (iii) と $M_{>r+1} = 0$ からも従う. いずれにせよ, これは良く知られた事実であり, 直接証明する事も易しい.

定理 2.1 に ほぼ近い結果は [6] で既に得られており, これが今回の研究の出発点となったが, そこでは, arith-$\deg_{r-1}(M/fM) >$ arith-$\deg_r M$ になる為の条件が 上の系の (ii) のようには具体的に求められておらず, 一般の f で等号が成立する事を示すにも, H. Flenner の別の結果 (本稿の 命題 3.2の後半に当たるもの) を必要とした.

系 2.2 を見ると, $\dim(S/P) = r$ なる斉次素イデアルに対して, $(M_{>r+1})_P \neq 0$ ならば $\mathrm{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P \geq 2$ であるという条件が, ここでは重要であることが分かる. これは, Serre の S_2 条件より弱い条件である ($\mathrm{Ass}(M)$ の元の高さが揃っていれば, もちろん同値). 次の結果を示すのも, 難しくない.

系 2.4 I を S の斉次イデアル とする. もし S/I (resp. S/I^{sat}, ここで $I^{\mathrm{sat}} := \bigcup [I : m^n]$) が Serre の S_2 条件を充たすならば, すべての $r \geq 0$ (resp. $r \geq 1$) に対して,

$$\text{arith-}\deg_{r-1}(I + (f)) = \deg(f) \cdot \text{arith-}\deg_r(I)$$

が成立する. $\mathrm{Ass}(S/I)$ の元が全て同じ高さを持てば, 逆も正しい.

本研究集会中に, 都立大の 川崎健氏からも御指摘があったように, S_2 条件を満たす局所環は, (よほど特異な例でもない限り) 等次元かつ埋込素因子を持たない, つまり 0-イデアルの素因子による剰余環は全て同じ次元をもつ (S_1 ならば 埋込素因子を持たない事は ほぼ自明なので, 等次元を示す部分が本質的. この結果は良く知られたもののようで, [4] 等に紹介されているが, 私が調べた範囲では証明が見当たらなかったので, 以下に証明を与えておく). よって特に, S/I が S_2 条件を満たせば, すべての $r < \dim S/I - 1$ に対し, arith-$\deg_r(I) = 0$ である.

命題 2.5 **(本稿の大筋とはあまり関係ありません)** (A, m) を *catenary* な ネーター局所環で S_2 条件を満たすものとする. このとき A は等次元である. すなわち, 任意の 極小素因子 P に対し, $\dim A/P = \dim A$ である.

証明. 背理法で示す. つまり, $\mathrm{Min}(A) \neq \mathrm{Assh}(A)$ を仮定して矛盾を導く.

$0 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ を, 0 イデアルの最短の準素分解とする.

$$I := \bigcap_{\sqrt{Q_i} \in \mathrm{Assh}(A)} Q_i, \qquad J := \bigcap_{\sqrt{Q_i} \notin \mathrm{Assh}(A)} Q_i$$

と置く. 仮定より, J は真のイデアルであり, $I \cap J = 0$, $\dim A/J < \dim A/I$ である. $I+J$ の任意の極小素因子は, I や J を含むが, それらの極小素因子ではない. 従って, $\mathrm{ht}(I+J) \geq 2$ である (I の極小素因子と $I+J$ の極小素因子の間の 素イデアル鎖を考えよ. A が catenary であることに注意).

$I+J$ の極小素因子で A を局所化して, $I+J$ が m-準素イデアルと仮定して良い. $\dim A \geq 2$ かつ $\mathrm{depth}\, A \geq 2$ である (S_2 より). A/I や A/J は 作り方から depth が 正であり, 一方, $A/(I+J)$ は depth が 0 である. 短完全列

$$0 \to A \to A/I \oplus A/J \to A/(I+J) \to 0$$

に, いわゆる "depth lemma" を用いると (何となれば, local cohomology の長完全列を考えると), $\mathrm{depth}\, A = 1$ となり, 仮定に反する. □

<u>例</u> **2.6** (i) $I \subset S$ が素イデアル, $f \notin P$, $r \geq 1$ であっても,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) > \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

となる例は多い. このとき f は, $(S/I)_P$ が Cohen–Macaulay <u>でない</u>ような斉次素イデアル P に含まれる.

非常に簡単な例を挙げると, $X \subset \mathbf{P}^n$ を Cohen–Macaulay でない特異点 p を持つ既約かつ被約な曲面とした時, $\mathbf{P}^r$ の超曲面 F が X と正規交叉しても, F が p を含めば $X \cap F$ は p を必ず embedded component に持ってしまい, $X \cap F$ の 0-次の arithmetic degree は 0 ではない (p における重複度が現れる). しかし, X 自身の 1-次の arithmetic degree は 0 である.

(ii) $S = k[x, y, z]$, $I = (x) \cap (x^2, y)$ とおく. 言うまでもなく S/I は S_2 を満たさず, よって Cohen–Macaulay でもないが, $(S/I)_{>1} \simeq k[y, z]$ なので, 系 2.2 から, $f \in S$ が S/I-正則ならば常に,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

が全ての r について成立. つまり, (i) での現象の "逆" は一般には (特に, $\mathrm{Ass}(S/I)$ の元の高さが揃ってない場合には) 正しくない.

(iii) 上の (ii) のような状況で, 1 次元 (Krull 次元では 2 次元) の既約成分が, いわゆる "double line" ならば等号は成立しない. $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ とし, 斉次イデアル $Q =$

$(x_0x_3 - x_1x_2, x_0^2, x_1^2, x_0x_1)$ を考える. Q は (x_0, x_1)-準素イデアルであり, “double line” の定義イデアルである. $I = Q \cap (x_0^2, x_1, x_2)$ とおく. I は 埋込成分であるような閉点を持った double line の定義イデアル である. *Macaulay* でも計算できるが, $\mathrm{codim}(\mathrm{Ext}_S^3(S/I, S)) = 3$ かつ $\deg \mathrm{Ext}_S^3(S/I, S) = 1$ である. よって, $\text{arith-deg}_0(I) = 1$ (埋込成分の閉点の寄与がカウントされている). しかし, さらに計算を進めると $\mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}_S^3(S/I, S)) \ni (x_0, x_1, x_2, x_3)$ (これを見る為には $\mathrm{Ext}_S^4(\mathrm{Ext}_S^3(S/I, S), S))$ を計算して, 命題 1.2 を用いると良い). よって, 系 2.2 より, $f \in (x_0, x_1, x_2, x_3) \setminus (x_0, x_1, x_2)$ なる全ての斉次元 f に対し,

$$\text{arith-deg}_{-1}(I + (f)) > \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_0(I)$$

であって, 等号は成立しない. これは, $(S/I)_{>1} = S/Q$ の depth が 1 である事からも分かる.

定理 2.1 の証明の概略. まず,

$$\begin{aligned} &\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\ &= \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M) \end{aligned}$$

であるが, 命題 1.2 に注意しながら Ext の長完全列を繰り返し扱う事で, 割と機械的に示せるので省略する.

次に, $[0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)}$ の P における length multiplicity が, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P)$ の S_P 加群としての長さに等しい事をいう (この証明を通じて, P は $\dim S/P = r$ なる斉次素イデアルとする). 命題 1.2 から分かるように, $\dim[0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)} \leq r$ であるから, これの P に於ける length multiplicity は, $[0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)} \otimes S_P$ の S_P 加群としての長さに等しい. ところが, 局所双対性より,

$$\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M, S) \otimes S_P \simeq \mathrm{Ext}_{S_P}^{n-r}(M_P, S_P) \simeq (H_P^1(M_P))^\vee.$$

ここで $(-)^\vee$ は, 局所環 S_P の Matlis dual である. よって, 主張は Matlis dual の基本的な性質から従う.

次に, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \simeq H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P)$ を示す. $P \notin \mathrm{Ass}(M_{>r+1})$ であるから, $H_P^0((M_{>r+1})_P) = 0$. また, $\dim_{S_P}(M_{\leq r+1})_P \leq 1$ であるから, $H_P^2((M_{\leq r+1})_P) = 0$ である. 一方, 注意 1.3 及び f に関する条件から, 積写像

$$\mathrm{Ext}_{S_P}^{n-r}((M_{\leq r+1})_P, S_P) \xrightarrow{\cdot f} \mathrm{Ext}_{S_P}^{n-r}((M_{\leq r+1})_P, S_P)$$

は単射であり, 局所双対性より,

$$H_P^1((M_{\leq r+1})_P) \xrightarrow{\cdot f} H_P^1((M_{\leq r+1})_P)$$

は全射となる. よって, 短完全列

$$0 \to M_{\leq r+1} \to M \to M_{>r+1} \to 0$$

から, 図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1_P((M_{\leq r+1})_P) & \to & H^1_P(M) & \to & H^1_P((M_{>r+1})_P) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \cdot f & & \downarrow \cdot f & & \downarrow \cdot f & & \\
0 & \to & H^1_P((M_{\leq r+1})_P) & \to & H^1_P(M) & \to & H^1_P((M_{>r+1})_P) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & \mathrm{Coker} & \simeq & (\mathrm{Coker})' & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

が得られ, 求める同型が証明された.

最後に,

$$\begin{aligned}
&\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\
&= \text{arith-deg}_{r-1}(M_{>r+1}/fM_{>r+1}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M)
\end{aligned}$$

を証明する. これまでに証明した事から, $M_{>r+1}/fM_{>r+1}$ の P に於ける length multiplicity が, N/fN の S_P 加群としての長さに等しい事をいえば充分である (ただし, $N := H^1_P((M_{>r+1})_P)$ と置いた). ここで N 自身 S_P 加群として長さ有限であるから, N/fN の長さは, $[0:f]_N$ の長さに一致する事に注意. $(M_{>r+1})_P \neq 0$ でさえあれば, これの S_P 加群としての depth は 必ず 1 以上であるから,

$$0 \to (M_{>r+1})_P \to (M_{>r+1})_P \to (M_{>r+1}/fM_{>r+1})_P \to 0$$

に $H^*_P(-)$ を施せば, 求める結論が得られる. □

3 双対化複体と 超平面切断の既約成分

$\mathrm{Ass}(M)$ と $\mathrm{Ass}(M/fM)$ との関連も, $\mathrm{Ext}^*_S(M,S)$ からの情報で見ることが出来る. 一般に f を M-正則 ($M/H^0_m(M)$ 正則でも良い) であるような斉次元とすると,

$$\mathrm{Ass}(M/fM) \supset \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f))$$

が成り立つ事に注意. 我々は, いつ等号が成立するかを, 具体的に知ることが出来る.

<u>定理</u> **3.1** f を M-正則であるような斉次元とする.

$$\mathrm{Ass}(M/fM) = \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f))$$

となる為の必要充分条件は, f が, 全ての $0 \le i \le n$ に対し $\mathrm{Ext}^i_S(M,S)$ の 高さ $i+1$ の極小素因子に含まれない事である. さらに強く,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ass}(M/fM) \setminus \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}\, M} \mathrm{Min}(S/P' + (f)) \\ = \ & \{P \,|\, P \text{ は } \mathrm{Ext}_S^{\mathrm{ht}(P)-1}(M,S) \text{ の極小素因子で } f \in P \text{ なるもの }\}.\end{aligned}$$

上の定理の後者の条件を, 系 2.2 の (iii) ふうに読み換えると, f が, $\dim S/P = r$, $(M_{\le r+1})_P = 0$, $(M_{>r+1})_P \ne 0$ なおかつ $\mathrm{depth}_{S_p}(M_{>r+1})_P = 1$ であるような斉次素イデアル P に含まれないという事である.

次の結果 (の後半部分) は, H. Flenner からの "private communication" という形で, [6] で既に紹介されていた (彼の有名な "local Bertini" の論文に登場する手法からも証明できるらしい).

<u>命題</u> **3.2** f を $M/H^0_m(M)$ -正則であるような斉次元とする.

$$\mathrm{Ass}(M/fM) \setminus \{m\} \subset \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f)) \qquad (**)$$

となる為の必要充分条件は, f が 全ての $0 \le i \le n-1$ に対し $\mathrm{Ext}^i_S(M,S)$ の 高さ $i+1$ の極小素因子に含まれない事である. 特に, 一般の f に対しては $(**)$ が成立.

証明は 3.1, 3.2 とも, 命題 1.2 を機械的に用いるだけであり, 難しくない.

<u>例</u> **3.3** (i) $S = k[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$, $I := (x_1,x_2) \cap (x_3,x_4)$ と置く. *Macaulay* でも計算できるが, $\mathrm{Ext}^2_S(S/I,S)$ は高さ 3 の素因子を持たず, $\mathrm{Ext}^4_S(S/I,S) = 0$, かつ $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\} = \mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}^3_S(S/I,S))$ である. よって S/I に関して, 定理 3.1 の等号が成立する為の必要充分条件は, f が (x_1,x_2,x_3,x_4) に含まれない事である. (幾何的に言えば, $X := \mathrm{Proj}(S/I)$ は, $\mathbf{P}^4$ の中の, 一点 p ((x_1,x_2,x_3,x_4) に対応した閉点) で交わる二つの平面である. $\mathbf{P}^4$ の超曲面 F は, たとえ X の各既約成分 (二つの平面) と正規交叉しても, $p \in F$ ならば, p は $X \cap F$ の埋込成分である.

(ii) 例 2.6 (iii) に於いて, $\mathrm{Ext}^3_S(S/I,S)$ は, (x_0,x_1,x_2,x_3) を素因子に持つが, これは 極小素因子ではないので, 定理 3.1 に於ける等号は常に成立する.

双対化複体 $D^\bullet$ を持ったネーター局所環 (A,m) に対しても, 上記の結果と同様な事が成り立つ.

双対化複体の基本的性質から, 一般に, ある整数 n が存在して,

$$\mathrm{Hom}^i(A/m, D^\bullet) = \begin{cases} A/m & i = n \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる. $n=0$ のとき, $D^\bullet$ を **正規化された** (normalized) 双対化複体と呼ぶ. 双対化複体の添字をずらしたものも, また双対化複体であるから, 一度 双対化複体が存在すれば, 正規化されたものも存在する.

$D^\bullet$ を 正規化された双対化複体とし, 有限生成 A-加群 M に対して,

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, D^\bullet) := H^i(\mathrm{Hom}(M, D^\bullet))$$

と置くと, 局所双対性より,

$$\mathrm{Ext}^{-i}_A(M, D^\bullet) = (H^i_m(M))^\vee,$$

である. ここで, $(-)^\vee$ は, A に於ける Matlis dual を表す. とくに, A が 標準加群 ω_A を持った d-次元 Cohen–Macaulay 環の時は,

$$\mathrm{Ext}^{-i}_A(M, D^\bullet) = \mathrm{Ext}^{d-i}_A(M, \omega_A)$$

である. $\mathrm{Ext}^*_A(M, D^\bullet)$ に対しても, 命題 1.2 と同様な事が成り立っている.

<u>命題</u> **3.4** (c.f., [8]) (A,m) を ネーター局所環, $D^\bullet$ を正規化された双対化複体, M を有限生成 A-加群 とする. 任意の $i \geq 0$ について $\dim(\mathrm{Ext}^{-i}_A(M, D^\bullet)) \leq i$ である. また, $\dim(\mathrm{Ext}^{-i}_A(M, D^\bullet)) = i$ となる為の必要充分条件は, Mが $\dim A/P = i$ なる素因子 P を持つ事である. さらに, $\dim A/P = i$ なる A の斉次素イデアル P に対し, $P \in \mathrm{Ass}(M)$ と $P \in \mathrm{Min}(\mathrm{Ext}^{-i}_A(M, D^\bullet)$ は 同値.

これを用いて, 次が言える.

<u>定理</u> **3.5** 命題 *3.4* と同じ条件下で, $f \in m$ を M-正則であるとする.

$$\mathrm{Ass}(M/fM) = \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(A/P' + (f))$$

となる為の必要充分条件は, f が, 全ての $1 \leq i \leq n$ に対し $\mathrm{Ext}^{-i}_A(M, S)$ の 次元 $i-1$ の極小素因子に含まれない事である. さらに強く,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ass}(M/fM) \setminus \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}\, M} \mathrm{Min}(S/P' + (f)) \\ &= \{P \,|\, P \text{ は } \mathrm{Ext}_A^{-\dim A/P - 1}(M, D^\bullet) \text{ の極小素因子で } f \in P \text{ なるもの.}\} \end{aligned}$$

参考文献

[1] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1-48, Cambridge University Press 1993.

[2] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Springer–Verlag, (1995).

[3] D. Eisenbud, C. Huneke and W. Vasconcelos, Direct methods for primary decomposition, Invent. Math. **110** (1992), 207-235.

[4] R. Hartshorne, Complete intersections and conectedness, Amer. J. Math. **84** (1962), 497–508.

[5] R. Hartshorne, Connectedness of Hilbert scheme, Publications Math. I.H.E.S. **29** (1966), 261–304.

[6] C. Miyazaki and W. Vogel, Towards a theory of arithmetic degrees, to appear in Manuscripta Math.

[7] C. Miyazaki, W. Vogel and K. Yanagawa, Associated primes and arithmetic degrees, Preprint.

[8] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer-Verlag, 1986.

[9] B. Sturmfels, N.V. Trung and W. Vogel, Bounds on degrees of projective schemes, Math. Ann. **302** (1995), 417-432.

[10] W. Vasconcelos, The reduction number of an algebra, to appear in Compositio Math.