数理解析研究所講究録
965巻 1996年 1-11

On Shimura lifting of degree 2

名古屋市立保育短大 丹羽伸二 (Shinji Niwa)

半整数次元保型形式から整数次元保型形式を作るいわゆる志村対応を2次のジーゲル保型形式の場合に拡張しようという試みは、[1],[2],[5],[6]などにあるが完全な類似はまだない。解析的なジーゲル保型形式からL関数が一致する解析的または非解析的なジーゲル保型形式をつくることが出来れば完全な類似といえるが、そのような対応は存在するかどうかも判っていない。[5]においては半整数次元の保型形式は(保型表現は) non-degenerate が仮定されており、解析的なジーゲル保型形式は対象外ではあるが、theta correspondence により一応 L関数を保った対応が得られているので、それを改造して解析的なジーゲル保型形式の場合にも適用できないかというのが動機であった。残念ながら今のところ目標に程遠く、[5]に対する remark か解説ぐらいにしかなっていないかもしれないが、判ったことを報告す

3. [3]と重複する所が多くなるが記号を説明する必要もあるのでゆるされたい。$V=M_{5,1}(\mathbb{R})$ のとき $G=Sp_2(\mathbb{R})$ の $\mathcal{S}(V\times V)$ 上の Weil 表現を

$$r\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} f(X) = \exp\left(\pi i\,\mathrm{tr}\left(S\begin{pmatrix} & & E \\ & 2 & \\ E & & \end{pmatrix}[X]\right)\right) f(X)$$

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} f(X) = \gamma\,(\det A)^{5/2} f(XA)$$

$$r\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} f(X) = -2i\int_V\int_V \exp\left(\pi i\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} E & & \\ & 2 & \\ & & E \end{pmatrix}[Y]\right) f(Y)\,dY$$

で定義する。ただし $f\in\mathcal{S}(V\times V)$, $S={}^tS\in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $A\in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{cases}1 & \det A>0\\ -i & \det A<0\end{cases}$ である。

一方 $X={}^t(a,b,c,d,f)\in V$ に対し

$$\sigma(X)=\begin{pmatrix} 0 & a & c & -f \\ -a & 0 & -f & -c \\ -c & b & 0 & d \\ f & c & -d & 0 \end{pmatrix}$$

とし $g\in G$ の $V\times V$ への作用を

$$(X_1,X_2)^g=\left(\sigma^{-1}({}^tg\,\sigma(X_1)g),\ \sigma^{-1}({}^tg\,\sigma(X)g)\right),$$

として $g\in G$ の $\mathcal{S}(V\times V)$ の作用 $\rho(g)$ を $\rho(g)f(X)=f(X^g)$ で定義する。r は射影表現なので G の2重の被覆群

$$\tilde{G}=\{(g,\varepsilon)\mid g\in G,\ \varepsilon=\pm1\}$$

ととの $\mathcal{S}(V\times V)$ への表現 $\tilde{r}$ ができる。G や $\tilde{G}$ 上の不変微分作用素の環の基底を L_1, L_2 とする。$\tilde{G}$ の class 1 表現の Whittaker 関数 W は

$L_1 W = \varepsilon_1' W$, $L_2 W = \varepsilon_2' W$,

W は急減少,

$$W\left(\left(\begin{pmatrix}1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -x_0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & \begin{matrix}x_1 & x_2\\ x_2 & x_3\end{matrix}\\ & E\end{pmatrix}, 1\right)(g,\varepsilon)\right)$$

$$= \exp(2\pi i(x_0+x_3))\,W(g,\varepsilon),$$

$$W((g,\varepsilon)(k,\varepsilon')) = W(g,\varepsilon)\,\varepsilon'/\sqrt{J(k, iE)}$$

を満たす（$\forall k \in K = G \cap SO(4)$）。ただし $J\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, Z\right) = \det(CZ+D)$ である。W はトーラス上の値

$$\tilde{W}(t,y) = W\left(\left(\begin{pmatrix}\sqrt{ty} & & & \\ & \sqrt{t/y} & & \\ & & 1/\sqrt{yt} & \\ & & & \sqrt{y/t}\end{pmatrix}, 1\right)\right)$$

できまるが、この値は [3] に書いてある。この値を使うと Γ-factor を与える local integral が計算できる。

Prop.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \tilde{W}(t,y)\exp(-2\pi t/y)\,y^{-3/2}K_{\rho_1+1/2}(2\pi y)\,t^{\rho_2-3/2}\,dt\,dy$$

$$= c'(s_1, s_2)$$

$$\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+3/2+\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+3/2-\nu_1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{-s_1+s_2+3/2+\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s_1+s_2+3/2-\nu_1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+3/2+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+3/2-\nu_2}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{-s_1+s_2+3/2+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s_1+s_2+3/2-\nu_2}{2}\right)$$

$$\Gamma(s_2+1)^{-1}\Gamma\left(\frac{-s_1+s_2+1}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2}{2}\right)^{-1}$$

ここで $c'(s_1, s_2)$ は具体的に判かる s_1, s_2 の初等函数で,

ν_1, ν_2 は L_1, L_2 の固有値 δ_1', δ_2' と

$$\delta_1' = 2(\nu_1^2+\nu_2^2-5),$$
$$\delta_2' = (\nu_1^2-\nu_2^2)^2-6(\nu_1^2+\nu_2^2)+21$$

で結ばれている。([3] の関係式は間違っている。

$\delta_1 = 4(\lambda_1+\lambda_2-2)$, $\delta_2 = 8(2\lambda_1\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2+2)$, $\lambda_1 = \nu_1^2-\frac{1}{4}$,

$\lambda_2 = \nu_2^2-\frac{1}{4}$ が正しい。)

H_2 を2次のジーゲル上半平面, N を奇数,

$$\Gamma = \Gamma_0(4N) = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}) \,\middle|\, C \equiv 0 \bmod 4N\right\}$$

とする。$Z \in H_2$ に対し

$$\theta(Z) = \sum_{M \in M_{2,1}(\mathbb{Z})} \exp(2\pi i Z[M]),$$

$j(\gamma,z)=\theta(\gamma z)/\theta(z)$, χはDirichlet characterとするとき

$f(\gamma z)=j(\gamma,z)^{\ell}\chi(\det D)f(z)\quad(\forall\gamma\in\Gamma)$,

fの$\tilde{G}$へのもち上げ$\tilde{f}$がL_1, L_2の固有関数で

$L_1\tilde{f}=\delta_1'\tilde{f}$, $L_2\tilde{f}=\delta_2'\tilde{f}$,

fは緩増大,

Gのすべての max. parabolic subgp. の unip. radical U に対し

$$\int_{\Gamma\cap U\backslash U} f(uz)=0$$

という性質をもったH_2上の関数fと、そのtheta liftingを考える。とりあえず$\ell=1$とする。$f(z)$は

$$f(z)=\sum_{2T={}^t2T\in M_{2,2}(\mathbb{Z})} a(T,Y)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(TX)),\quad z=X+iY$$

とFourier展開され更に$m\in\mathbb{Z}$に対し

$$a\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&m^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ty&0\\0&t/y\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\right]\right)$$
$$=\sum_{n\neq 0} a_n^{(m^2)}\,\tilde{W}(m^2|n|t,|n|y)\exp(2\pi i nx)\begin{cases}1 & n>0\\ (-i) & n<0\end{cases}$$

という展開が出来、Whittaker-Fourier係数$a_n^{(m^2)}$がきまる。theta liftingの積分核となるtheta関数Θは

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in (1/\sqrt{4N})\mathbb{Z} \right\},$$

$$L_\theta = \{ (a, b) \mid a, b \in \sqrt{N}\mathbb{Z} \},$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \sqrt{4N}\,\mathbb{Z} \right\}$$

$$k(X) = P(X) \exp\left(-\pi \operatorname{tr} \begin{pmatrix} E & & \\ & 2 & \\ & & E \end{pmatrix} [X]\right) \in \mathcal{S}(M_{5,2}(\mathbb{R}))$$

($P(X)$はXの多項式関数), $\chi'(*) = \chi(*)\left(\frac{N}{*}\right)$とするとき

$$\Theta'(g, h) = \sum_{l_1 \in L_1,\ l_\theta \in L_\theta,\ l_2 \in L_2} \overline{\chi'}(4N \det l_1) r(g) \rho(h) k\begin{pmatrix} l_1 \\ l_\theta \\ l_2 \end{pmatrix},$$

$$\Theta(z, w) = \Theta'(g, h)\sqrt{J(g, iE)}, \quad (z = g iE, w = h iE \in H_2)$$

によって定義する。今は$l = 1$としているので、つまり weight は$\frac{1}{2}$としているので$P(X) = 1$とする。あとで$P(X)$について論ずる。便宜的に$\hat{f}(z) = f(-(4Nz)^{-1})/\sqrt{\det z}$を用いて、fの theta lift Fを

$$F(w) = \int_{\Gamma \backslash H_2} \hat{f}(z)\,\Theta(z, w) |Y|^{\frac{1}{2}} dX dY / |Y|^3$$

$$, (z = X + iY)$$

で定義する。[3] にあるように

$$L(4N, s_1, s_2, F)$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{4N} \int_0^{4N} F\begin{pmatrix} x_1+iy_1 & 0 \\ 0 & x_2+iy_2 \end{pmatrix} y_1^{s_1-1} y_2^{s_2-1}$$
$$dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$
$$= c(s_1, s_2)\Gamma'(s_1, s_2) L_{4N}(s_1, s_2) D_f(s_1, s_2),$$

ただし

$$\Gamma'(s_1, s_2) = \Gamma\left(\frac{s_2-s_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2}{2}\right)\Gamma(s_1+1)$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{w}(t, y)\exp(-2\pi t/y)\, y^{-3/2} K_{s_1+1/2}(2\pi y)\, t^{s_2-3/2}\, dt\, dy,$$
$$L_{4N}(s_1, s_2) = \left(\sum_{(n,4N)=1} \chi'(n) n^{-s_1-s_2-2}\right)\left(\sum_{(n,4N)=1} \chi'(n) n^{s_1-s_2-1}\right),$$

$$D_f(s_1, s_2)$$
$$= \sum_{m\neq 0} \sum_{n>0} a_n^{(m^2)} (m^2 n)^{-s_2+1/2} \sum_{c>0} c^{-2s_1-2} \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ d \bmod c}} \exp\left(\frac{2\pi i d n}{c}\right),$$

$c(s_1, s_2)$は指数関数となるが，fがHecke作用素の同時固有関数のときは[1]，[6]と同様にして$D_f(s_1, s_2)$はL関数で表わせる。簡単のため$N=1$，$\chi=1$とすると$D_f(s_1, s_2)$は次のTh.の左辺に$\zeta(2s_1+2)^{-1}$を掛けたものに一致する。

Th. f が $^{\forall}p$ に対し

$$T(1,p,p^2,p)f=\lambda_p f,\quad T(1,1,p^2,p^2)f=\omega_p f$$

とし，f の spinor L関数 $L_f(s)$ と書くと，即ち

$$L_f(s)=\prod_p\left(1-\lambda_p p^{5/2}p^{-s}+(p^{-3}(1+p^2)+p\omega_p)p^{-2s}\right.$$
$$\left.-\lambda p^{\frac{3}{2}}p^{-3s}+p^{-2}p^{-4s}\right)$$

とすると

$$\sum_{n_1,n_2>0}\sum_{\substack{m|n_1\\ m|n_2}} a^{(m^2)}_{\frac{n_1n_2}{m^2}}\ m^{-1}\,n_1^{-(s_2+s_1)+\frac{1}{2}}\,n_2^{-(s_2-s_1)+\frac{3}{2}}$$
$$=a_1^{(1)}\ L_f(s_1+s_2+1)\,L_f(s_2-s_1)$$
$$\prod_p\left\{(1-p^{-2s_2-2})\left(1-p^{-\frac{5}{2}}\left(p^{-(s_2+s_1)+1/2}+p^{-(s_2-s_1)+3/2}\right)+p^{-2s_2-3}\right)\right\}$$

特にこれは $s_2=s_1$ とすると f の spinor L とその特殊値の積になる。一方 $s_2=s_1$ のとき $L(4N,s_1,s_2,F)$ は F の $\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X)$ に関する generalized Whittaker 関数による展開の係数 $A_0\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ と F の spinor L関数の積になるので Hecke 作用素の commutation relation [2] を使えば結局 $A_0\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ が $a_1^{(1)}$ と f の spinor L の特殊値の積

で表わせたことになる。なお Friedberg, Wong [1] は

$$\sum_{m>0}\sum_{n>0} a_n^{(m^2)}(mn)^{-s}$$

を考え、これが f の standard L 関数

$$\prod_p \Bigl(1+(-\omega_p-p^{-4}+p^{-2})p^{-s}+p^{-6}(\lambda_p^2p^8-2p^4\omega_p-2)p^{-2s}$$
$$-p^{-8}(p^4\omega_p-p^2+1)p^{-3s}+p^{-8}p^{-4s}\Bigr)$$

になることを示している。もっとも彼らの結果はすべて $Sp(2,\mathbb{Q})$ 上の保型形式に関するものであって、$Sp(2,\mathbb{R})$ 上のものではない。

Θ を定義する時に用いた $\phi(X)=P(X)\exp\left(-\pi\begin{pmatrix} E & & \\ & 2 & \\ & & E\end{pmatrix}[X]\right)\in\mathcal{S}(M_{5,2}(\mathbb{R}))$ の多項式関数 $P(X)$ を $l>1$ の場合 (weight が高い場合) や vector valued の f を扱うとき、どのように取ればよいかは、よく解らないが、例えば vector valued の f を扱うには次のようにすればよいと思われる。今まで Weil 表現 r は $\begin{pmatrix} & & E\\ & 2 & \\ E & & \end{pmatrix}$ に対応するものを取っていたが、

$$S_0=\begin{pmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&&\\&&&-2&\\&&&&-2\end{pmatrix}$$

に対応する Weil 表現に変え、同じ記号 r を使う。$G=Sp(2,\mathbb{R})$ の直交群として の作用 ρ も変るが同じ記号 ρ を用いる。

V_0 を $M_{5,2}(\mathbb{R})$ に $\mathrm{tr}({}^tX S_0 Y)$ で内積を入れた空間, V_1 は $M_{3,2}(\mathbb{R})$ に $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$ で内積を入れたもの, r_1 を対応する G の $\mathcal{S}(V_1)$ 上の Weil 表現, V_2 は $M_{2,2}(\mathbb{R})$ に $\begin{pmatrix}-2&\\&-2\end{pmatrix}$ で内積を入れたもの, r_2 はその Weil 表現とする。すると $r=r_1\otimes r_2$ となり, ρ を $G\cap SO(4)=K$ に制限した $\rho|_K$ は $\rho_1\boxtimes\rho_2$, ρ_1 は $SO(3)$ の $\mathcal{S}(V_1)$ 上の表現, ρ_2 は $SO(2)$ の $\mathcal{S}(V_2)$ 上の表現となる。これらはいわゆるシュレーディンガーモデルであってエルミット関数が基底になっている。これらをホックモデルに移って考えると空間の基底は monomial で例えば $r_2(k)$, ($k=\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}\in K$) は $\begin{pmatrix}z_1&z_2\\w_1&w_2\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}z_1&z_2\\w_1&w_2\end{pmatrix}(A+Bi)$ といった作用になっている。両モデルの対応は n 次のエルミット関数と n 次の monomial であるが, K に制限して考えている時はエルミット多項式と monomial が対応していると思ってよい。$\begin{pmatrix}z_1&z_2\\w_1&w_2\end{pmatrix}$ の m 次の symmetric square

$$\begin{pmatrix}z_1^m, & z_1^{m-1}z_2, & \cdots \\ z_1^{m-1}w_1, & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

を作ると, ホック表現として $A+Bi\in U(2)$ の n 次 symmetric square が右から作用し, 左から $SO(2)$ の元が n 次 symmetric square で作用する。この $SO(2)$ の作用を既約分解し既約成分に当る z_1, z_2, w_1, w_2 の多項式で $z_1^{k_1}z_2^{k_2}w_1^{l_1}w_2^{l_2}$

を$H_{\ell_1}(z_1)H_{\ell_2}(z_2)H_{\ell_1}(w_1)H_{\ell_2}(w_2)$に置きかえることにより$P(x)$を求めることが出来る。$\delta(\sigma_2)$の方も同様のことができる。

References

[1] S. Friedberg and S. Wong, On the Shimura correspondence for $GSp(4)$, Math. Ann. 290 (1991) 183-207

[2] T. Ibukiyama, Construction of half integral weight Siegel modular forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ from automorphic forms on compact twist $Sp(2)$, J. Reine Angew. Math. 359 (1985), 188-220

[3] S. Niwa, On Siegel wave form on the covering group of $Sp(2,\mathbb{R})$, 数理研講究録 843 (1993). 36-44

[4] S. Niwa, Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbb{R})$, Proc. Japan Acad. 71, Ser. A (1995) 189-191

[5] I. I. Piatetski-Shapiro and D. Soudry, Automorphic forms on symplectic group of order four, Lecture notes, IHES (1983)

[6] T. Hina, On Siegel modular forms of half integral weight, preprint (1984)

[7] J. Igusa, Theta functions