数理解析研究所講究録
965 巻 1996 年 178-182

CENTRAL CRITICAL VALUE に関する結果の紹介

池田 保 (京都大学理学研究科)

ここでは次の論文の結果を紹介する。

"The central critical value of a triple product L-function" Ann. Math. 133 (1991) pp. 605–672,

§1 The triple product L-function

$G = GL_2$ を $\mathbb{Q}$ 上に定義された代数群とみる。π_i, $(i = 1, 2, 3)$ を $G(\mathbb{A})$ の cuspidal な保形表現で、正則保型形式 f_i $(i = 1, 2, 3)$ によってそれぞれ生成されるものとする。$f_i \in S_{k_i}(N_i, \varepsilon_i)$ は new form であるとする。$k_1 \geq k_2 \geq k_3$ と仮定し、$w = k_1 + k_2 + k_3 - 3$ とおく。Bad place の集合を $S = \{\infty\} \cup \{p \,|\, p \text{ は } N_1 N_2 N_3 \text{ の約数}\}$ とおく。

f_i の L- 関数を $\sum_{n=1}^{\infty} a_i(n) n^{-s} = L(s, f_i) = \prod_p L(s, \pi_{i,p})$ とする。$p \notin S$ の時、

$$L(s, \pi_{i,p}) = (1 - a_i(p)p^{-s} + \varepsilon_i(p)p^{1-2s})^{-1} = \det(1 - A_{i,p}\, p^{-s})^{-1}$$

と表される。 ここで $A_{i,p}$ は適当な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の元である。この時、3 重 L 関数の局所因子 $L(s, \pi_{1,p} \times \pi_{2,p} \times \pi_{3,p})$ を

$$L(s, \pi_{1,p} \times \pi_{2,p} \times \pi_{3,p}) = \det(1 - A_{1,p} \otimes A_{2,p} \otimes A_{3,p}\, p^{-s})^{-1}$$

で定義する。$p \in S$ の時も適当に局所因子 $L(s, \pi_{1,p} \times \pi_{2,p} \times \pi_{3,p})$ を定義することができ、

$$L_{fin}(s, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3) = \prod_{p<\infty} L_{fin}(s, \pi_{1,p} \otimes \pi_{2,p} \otimes \pi_{3,p})$$

とおく。 この時 $L_{fin}(s, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ と $L_{fin}(w + 1 - s, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ の間には適当な関数等式が成り立つ。$L_{fin}(s, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ は関数等式の中心 $s = \frac{w+1}{2}$ において正則である。また、すべての局所因子 $L(s, \pi_{1,p} \otimes \pi_{2,p} \otimes \pi_{3,p})$ は $s = \frac{w+1}{2}$ において零点も極も持たない。

§1 Garrett の積分表示

$\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 $\mathbb{G}$ と $\mathbb{G}$ の character $\nu : \mathbb{G} \to \mathrm{GL}_1$ を

$$\mathbb{G} = \{g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathrm{GL}_2^3 \,|\, \det g_1 = \det g_2 = \det g_3\}$$

$$\nu(g) = \det g_1 = \det g_2 = \det g_3$$

と定義する。$\mathbb{G}(\mathbb{A})$ の保形表現 Π を $\Pi(g) = |\nu(g)|^{\frac{w}{2}} \pi_1(g_1) \otimes \pi_2(g_2) \otimes \pi_3(g_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ で定義する。

$\mathbb{H} = GSp_3$ とおき、$\mathbb{G}$ の $\mathbb{H}$ へのうめこみ ι を

$$\iota\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & & b_1 & & \\ & a_2 & & & b_2 & \\ & & a_3 & & & b_3 \\ \hline c_1 & & & d_1 & & \\ & c_2 & & & d_2 & \\ & & c_3 & & & d_3 \end{array}\right)$$

によって定義する。

$P \subset \mathbb{H}$ を Siegel parabolic subgroup, $K_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}$ を standard maximal compact subgroup とする。$P(\mathbb{A})$ の character λ_s を

$$\lambda_s\left(\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \alpha\, {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\right) = |\alpha|^{-3s} |\det A|^{2s}$$

で定義し、誘導表現の空間 $I_s = \mathrm{Ind}_P^{\mathbb{H}}(\lambda_s)$ を $\mathbb{H}$ 上の右 $K_{\mathbb{H}}$ 有限な関数 f で

$$f(ph) = \lambda_s(p)\delta_P^{\frac{1}{2}}(p) f(h), \qquad p = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \alpha\, {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$$

と定義する。ここで $\delta_P^{\frac{1}{2}}(p) = |\det A|^2 |\alpha|^3$ で与えられる。

各 $s \in \mathbb{C}$ に対して $\Phi_s \in I_s$ で Φ_s の $K_{\mathbb{H}}$ への制限は s によらないようなものをとる。

$$E(s, \Phi_s, h) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{H}(\mathbb{Q})} \Phi_s(\gamma h), \qquad h \in \mathbb{H}(\mathbb{A})$$

とおく。$E(s, \Phi_s, h)$ は s の関数として全 s 平面に有理型に解析接続される。

$E(s, \Phi_s, h)$ の normalization $E^*(s, \Phi_s, h)$ を

$$E^*(s, \Phi_s, h) = \zeta_S(2s+2)\zeta_S(4s+2)E(s, \Phi_s, h)$$

と定義する。ここで $\zeta_S(s) = \prod_{v \notin S} \zeta_v(s)$ である。

Π に属する保型形式 $F(g) = f_1(g_1)f_2(g_2)f_3(g_3)$ をとり、

$$Z(s, \Phi_s, F) = \int_{Z_{\mathbb{G}}(\mathbb{A})\mathbb{G}(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{G}(\mathbb{A})} E^*(s, \Phi_s, \iota(g)) F(g)\, dg$$

とおく。$Z(s, \Phi_s, F)$ は Euler 積に分解され、$v \notin S$ の積は

$$L_S(s + \frac{1}{2}, \Pi) = L_S(s + \frac{w+1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$$

に等しい。$v \in S$ の部分の積は $s = 0$ において零点を持たず、そこで代数的な値をもつ。この積分表示から $L_{fin}(\frac{w+1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ の性質を知ることができる。たとえば、$k_1 < k_2 + k_3$, $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \bmod 2$ の時、ある代数的数 c と整数 a で

$$L_{fin}(\frac{w+1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3) = c\pi^a \langle f_1, f_1 \rangle \langle f_2, f_2 \rangle \langle f_3, f_3 \rangle,$$

と書けることが Garrett, Orloff らにより証明されている。

§2. Siegel-Weil の公式

誘導表現の空間 $I_s = \mathrm{Ind}_P^{\mathbb{H}}(\lambda_s)$ は局所的な誘導表現 $I_{s,v}$ の tensor 積に分解される。

$$I_s = \otimes_v I_{s,v}.$$

Proposition. *(Gustafson, Kudla, Rallis)* $I_{s,v}$ は $s=0$ において 2 つの既約表現の直和分解される。

$$I_{0,v} = I^0_{0,v} \oplus I^D_{0,v}.$$

$I^0_{0,v}$ は $K_{\mathbb{H}}$- 不変な *vector* を持つ。$k_v = \mathbb{R}$ の時、$I^D_{0,v}$ の $Sp_3(\mathbb{R})$ への制限は正則離散系列表現と反正則離散系列表現の直和に分解される。

$I^0_{0,v}$ と $I^D_{0,v}$ は $\mathbb{H} = GSp_3$ と 4 変数の直交群の dual pair を用いて次のように記述される。

$\mathbb{D}_v$ を $\mathbb{Q}_v$ 上の（唯一の）四元数体とする。$\mathbb{D}_v$ を被約ノルムで $\mathbb{Q}_v$ 上の二次空間とみたものを W^D_v とおく。一方 $M_2(\mathbb{Q}_v)$ を行列式で $\mathbb{Q}_v$ 上の二次空間とみたものを W^0_v とおく。これらの二次形式の similitude の群をそれぞれ $GO(W^D_v)$, $GO(W^0_v)$ とする。$\mathbb{H} \times GO(W^D_v)$ の元 (h,k) で h と k の multiplier が相等しいようなものからなる部分群を R^D_v で表す。同様に R^0_v も定義する。

この時 $Sp_3(\mathbb{Q}_v) \times O(W^D_v)$ の $\mathcal{S}((W^D_v)^3)$ 上の Weil 表現 ω^D_v を R^D_v に拡張することができる。 この拡張もまた ω^D_v で表すことにする。同様に $Sp_3(\mathbb{Q}_v) \times O(W^0_v)$ の $\mathcal{S}((W^0_v)^3)$ 上の Weil 表現 ω^0_v も R^0_v に拡張することができる。 この拡張もやはり ω^0_v で表す。

$\mathcal{S}((W^D_v)^3)$ から $I_{0,v}$ への写像を

$$\phi_v \mapsto \{h \mapsto \omega^D_v(h)\phi_v(0)\}$$

で定義するとこの写像は $O(W^D_v)$- 不変で、像は $I^D_{0,v}$ に等しい。また、$\mathcal{S}((W^0_v)^3)$ から $I_{0,v}$ への写像を同様に

$$\phi_v \mapsto \{h \mapsto \omega^0_v(h)\phi_v(0)\}$$

で定義するとこの写像は $O(W^0_v)$- 不変で、像は $I^0_{0,v}$ に等しい。

$v \notin S$ の時には Class 1 vector は $I^0_{0,v}$ に属する。k の素点の集合 T に対して ${I_0}^T = \otimes_{v\in T} I^D_{0,v} \otimes'_{v\notin T} I^0_{0,v}$ とおく。ここで $\otimes'$ は class 1 vector に関する制限 tensor 積である。I_0 は

$$I_0 = \oplus_T \otimes {I_0}^T$$

と分解される。

$$I^{\mathrm{odd}}_0 = \oplus_{|T|:\mathrm{odd}}, \qquad I^{\mathrm{even}}_0 = \oplus_{|T|:\mathrm{even}}$$

とおけば $I_0 = I^{\mathrm{odd}}_0 \oplus I^{\mathrm{even}}_0$ が成り立つ。

Φ_s を前節のようにとると $E(s,\Phi_s,h)$ は $s=0$ において正則で、$\Phi_0 \in I^{\mathrm{odd}}_0$ ならば $E(0,\Phi_s,h)=0$ が成り立つ。一方 $\Phi_0 \in I^{\mathrm{even}}_0$ の場合には $E(0,\Phi,h)$ は次のように theta 関数で表される。 $|T|$ が even とする。T のみで分岐する $\mathbb{Q}$ 上の四元数環 $\mathbb{D}$ を取り、$\mathbb{H} \times GO(W^T)$ の部分群 R^T を局所体上の場合と同様に定義する。$\varphi \in \mathcal{S}((W^T(\mathbb{A})^3)$, $(h,h') \in R^T$, $h \in \mathbb{H}(\mathbb{A})$, $h' \in GO(W^T)(\mathbb{A})$ に対して

$$\Theta(h,h';\varphi) = \sum_{x\in W^T(\mathbb{Q})^3} \omega(h,h')\varphi(x),$$

$$I(h;\varphi) = \int_{O(W^T)(\mathbb{Q})\backslash O(W^T)(\mathbb{A})} \Theta(h,\tilde{h}h';\varphi)\,d\tilde{h}$$

と定義する。$T=\emptyset$ のときにはこの積分は必ずしも絶対収束するとは限らないがある種の微分作用素を用いて発散部分を取り除くことにより意味を与えることができる。

定理. $\varphi \in \mathcal{S}(W^T(\mathbb{A})^3)$ は $\mathbb{H}$ の極大 *compact* 部分群の作用で有限であるとする。 Φ_s が $\Phi_0 = \omega(h,h')\varphi(0)$ を満たす時、

$$E(0,\Phi_s;h) = 2I(h;\varphi)$$

が成り立つ。

§3 主定理

ここでは次のような seesaw dual pair を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} = & GSP_3 & & \mathbb{G}^T & \subset GO(W^D)^3 \\ & | & \boxtimes & | & \\ (GL_2)^3 \supset & \mathbb{G} & & \mathbb{H}^T & = GO(W^D) \end{array}$$

この seesaw dual pair から次のような等式が導かれる。

$$\int_{Z_G(\mathbb{A})\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})} I(g;\phi)F(g)\,dg = \int_{Z_{H^T}(\mathbb{A})\mathbb{H}^T(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{H}^T(\mathbb{A})} \theta_\phi(F)(h^T)\,dh^T$$

ここで

$$\theta^\phi(F)(g^T) = \int_{\mathbb{G}^1(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}^1(\mathbb{A})} \theta(\tilde{g}g, g^T;\phi)F(\tilde{g}g)\,d\tilde{g}$$

で定義される関数である。ここで $\mathbb{G}^1 = (SL_2)^3$ である。$GO(W^D)$ の連結成分は $D^\times \times D^\times/\mathbb{G}_m$ であるから、$\{F,\phi\}$ から $\theta_\phi(F)$ を得る対応は本質的には清水-Jacquet-Langlands 対応である。

次の定理は Jacquet によって予想されていたものである。

定理　$L_{fin}(\frac{1}{2},\Pi) = L_{fin}(\frac{1}{2},\pi_1\times\pi_2\times\pi_3)$ が 0 にならないためには、$\mathbb{Q}$ 上の四元数体 D と、$F_1 \in \pi_1^D$, $F_2 \in \pi_2^D$, $F_3 \in \pi_3^D$ が存在して

$$I(F_1,F_2,F_3) = \int_{\mathbb{A}^\times D^\times(\mathbb{Q})\backslash D^\times(\mathbb{A})} F_1(h)F_2(h)F_3(h)|N(h)|\,dh \neq 0$$

が成り立つことである。しかもこのような四元数体 D は存在するならば一意的に定まる。

この D を決めるには次の定理を使えばよい。

定理 (Prasad)　$\pi_{i,v}$, $(i=1,2,3)$ を $GL_2(\mathbb{Q}_v)$ の既約許容表現でその central character の積は自明であるとする。この時 $\varepsilon(\frac{1}{2},\pi_{1,v}\times\pi_{2,v}\times\pi_{3,v}) = \pm 1$ で $\varepsilon(\frac{1}{2},\pi_{1,v}\times\pi_{2,v}\times\pi_{3,v}) = -1$ となるためには、$\pi_{1,v}$, $\pi_{2,v}$, $\pi_{3,v}$ がすべて二乗可積分で $\pi_{1,v}^{D_v}\otimes\pi_{2,v}^{D_v}\otimes\pi_{3,v}^{D_v}$ が $\mathbb{D}_v^\times$ の自明な表現を含むことが必要十分である。

この定理から D は存在するならば、D で分岐する素点の集合は上の条件を満たすような素点の集合と一致することがわかる。特に、D が不定符号の四元数環であるためには、$k_1 \geq k_2 + k_3$ が必要十分であることがわかる。

Seesaw dual の等式をさらに詳しく解析することにより、次の 2 つの定理が示される。

$\mathbb{Q}(\Pi)$ で automorphic representation π_i, $(i=1,2,3)$ に属する new form の Fourier 係数で生成される体とする。

定理 （定符号の場合） $k_1 < k_2 + k_3$ であるとする。この時、各々の bad prime $v \in S$ に対して局所表現 Π_v のみに依存する定数 $c_v \in \mathbb{Q}(\Pi)$ があって、

$$\langle f_1, f_1 \rangle^{-1} \langle f_2, f_2 \rangle^{-1} \langle f_3, f_3 \rangle^{-1} \frac{1}{2\zeta(2)^2} \prod_{v \in S} c_v \, L_{fin}(\frac{1}{2}, \Pi) \in (\mathbb{Q}(\Pi)^{\times})^2$$

が成り立つ。

定理 （不定符号の場合） $k_1 \geq k_2 + k_3$ であるとする。この時、各々の bad prime $v \in S$ に対して局所表現 Π_v のみに依存する定数 $c_v \in \mathbb{Q}(\Pi)$ があって、

$$\langle f_1, f_1 \rangle^{-2} \frac{1}{2\zeta(2)^2} \prod_{v \in S} c_v \, L_{fin}(\frac{1}{2}, \Pi) \in (\mathbb{Q}(\Pi)^{\times})^2$$

が成り立つ。