数理解析研究所講究録
965 巻 1996 年 207-215

Gross - Prasad 予想の紹介

渡部 隆夫 (Takao Watanabe) (阪大理)

このノートは参考文献にある 2 つの論文 [G-P], [G-P 2] の解説です.

1. Orthogonal groups.

この section では k を $\mathrm{ch}(k)\neq 2$ であるような任意の体とする.
V を n-次元 k-ベクトル空間とし, $B\colon V\times V\to k$ を非退化対称双一次形式とする. V の Witt 分解を

$$V=X\oplus V_0\oplus Y,\qquad \begin{cases} X,Y \text{ は maxmal totally isotropic subspaces} \\ V_0 \text{ は anisotropic subspace}\end{cases}$$

として, 基底を

$$X=<e_1,\cdots,e_d>,\quad V_0=<f_1,\cdots,f_{n_0}>,\quad Y=<e_1',\cdots,e_d'>$$
$$B(e_i,e_j)=B(e_i'.e_j')=0,\qquad B(e_i,e_j')=\delta_{ij}$$
$$B(e_i,f_j)=B(e_i',f_j)=0,\qquad B(f_i,f_j)=a_i\delta_{ij}$$

と取る. このとき B の行列は

$$J_B=\begin{pmatrix}0&0&1_d\\0&S&0\\1_d&0&0\end{pmatrix},\qquad S=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_{n_0}\end{pmatrix}$$

となる.

Definition.
(1) $d(V)=(-1)^{[n/2]}\det(J_B)k^{\times 2}\in k^\times/k^{\times 2}$ を discriminant という.
(2) $\dim V_0\leq 2$ (resp. $\dim V_0\leq 1$) のとき V は quasi-split (resp. split) であるという.

[例]
(1) $k=\mathbf{C}$ のとき, 任意の B は split で

$$(V,B)\cong(V',B')\iff \dim V=\dim V'$$

(2) $k=\mathbf{R}$ のとき, B は次の形と同型.

$$B\sim\begin{pmatrix}1_p&0\\0&-1_q\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$(V,B)\cong(V',B')\iff \dim V=\dim V',(p,q)=(p',q')$$

(3) k が有限体のとき, 任意の B は quasi-split で

$$(V,B)\cong(V',B')\iff \dim V=\dim V',\quad d(V)=d(V')$$

(4) k が p-進体のとき, つねに $\dim V_0\leq 4$ である. $(,)_k\colon k^\times\times k^\times\to\{\pm1\}$ を Hilbert symbol として

$$e(V)=\prod_{i<j}(a_i,a_j)_k\qquad \text{(Hasse invariant)}$$

とおくと

$$(V,B)\cong(V',B')\iff \dim V=\dim V',\quad d(V)=d(V'),\quad e(V)=e(V')$$

(5) 一般の k について, $a,b\in k^\times$ とするとき,

$$Q(a)=(k,B_a)\colon B_a(x,y)=axy \qquad \text{(discrimnant } a \text{ の 1 次元 quadratic space)}$$

$$Q(a,b)=(E,B_{a,b})\colon E=\begin{cases} k(\sqrt{a}) & (a\notin k^{\times 2}) \\ k\oplus k & (a\in k^{\times 2}) \end{cases},\quad B_{a,b}(x,y)=\frac{b}{2}(N_{E/k}(x+y)-N_{E/k}(x)-N_{E/k}(y))$$

とする. $\dim E=2$, $d(Q(a,b))=ak^{\times 2}$ で, 任意の 2 次元 quadratic space はこのような $Q(a,b)$ と同型になる.

$$Q(a,b)\cong Q(b)\oplus Q(-ab)$$
$$Q(a,b)\cong Q(a',b') \iff a\equiv a' \mod k^{\times 2},\quad b\equiv b' \mod N_{E/k}(E^\times)$$

である.

(V,B) の特殊直交群を

$$SO(V,B)=SO(V)=\{g\in SL(V)\colon {}^tgJ_Bg=J_B\}$$

とする. V の部分空間を

$$V_r=<e_{r+1},\cdots,e_d>\oplus<f_1,\cdots,f_{n_0}>\oplus<e'_{r+1},\cdots,e'_d>=X_r\oplus V_0\oplus Y_r$$
$$V_r^\perp=<e_1,\cdots,e_r>\oplus<e'_1,\cdots,e'_r>=X^r\oplus Y^r$$

として

$$SO(V_r,B|_{V_r\times V_r})=SO(V_r)\hookrightarrow SO(V)\colon \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 1_r & & & & \\ & * & * & & * \\ & * & * & & * \\ & & & 1_r & \\ & * & * & & * \end{pmatrix}$$

$$GL(X^r)\hookrightarrow SO(V)\colon \delta\mapsto\begin{pmatrix} \delta & & & & \\ & 1_{d-r} & & & \\ & & 1_{n_0} & & \\ & & & {}^t\delta^{-1} & \\ & & & & 1_{d-r} \end{pmatrix}$$

とおく. また

$$P_r=\mathrm{Stab}_{SO(V)}(X^r)=M_r\ltimes N_r\,,\quad \text{(a maximal parabolic subgroup)}$$
$$M_r=\mathrm{Stab}_{SO(V)}(V_r^\perp)=GL(X^r)\times SO(V_r)\,,\quad \text{(a Levi subgroup of } P_r)$$
$$N_r=\left\{\begin{pmatrix} 1_r & * & * & * & * \\ & 1_{d-r} & & * & \\ & & 1_{n_0} & * & \\ & & & 1_r & \\ & & & * & 1_{d-r} \end{pmatrix}\in SO(V)\right\},\quad \text{(the unipotent radical of } P_r)$$

と定義する. N_r は次のようにかける.

$$N_r^{der}=[N_r,N_r]=\left\{n_r(C)=\begin{pmatrix} 1_r & & & C & \\ & 1_{d-r} & & & \\ & & 1_{n_0} & & \\ & & & 1_r & \\ & & & & 1_{d-r} \end{pmatrix}: C\in \mathrm{Alt}_r\right\}\cong X^r\wedge Y^r$$

$$N_r/N_r^{der}=\left\{\bar{n}_r(A,B,D)=\begin{pmatrix} 1_r & A & B & & D \\ & 1_{d-r} & & -{}^tD & \\ & & 1_{n_0} & -S^{-1}{}^tB & \\ & & & 1_r & \\ & & & -{}^tA & 1_{d-r} \end{pmatrix}N_r^{der}\colon \begin{matrix} A,D\in M_{r,d-r} \\ B\in M_{r,n_0} \end{matrix}\right\}\cong X^r\otimes V_1$$

N_r への M_r の作用は

$$\begin{aligned}(\delta g)n_r(C)(\delta g)^{-1} &= n_r(\delta C^t\delta)\\ (\delta g)\overline{n}_r(A,B,D)(\delta g)^{-1} &= \overline{n}_r(\delta(A,B,D)g^{-1})\end{aligned}, \qquad (\delta \in GL(X^r),\ g \in SO(V_r))$$

で与えられる．さらに

$$Q_r = \left\{\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(X^r)\right\}, \qquad \Delta_r = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL(X^r)\right\}$$

とおく．

2. Relevant pairs.

(V,B) は Section 1 と同じとする．

Definition.

(V,W) が relevant pair とは

(i) W は V の部分空間で $B|_{W\times W}$ は non-degenerate

(ii) $W^\perp$ を W の直交補空間とするとき, $\dim W^\perp$ は奇数 $(=2r+1$ とする) でかつ $(W^\perp, B|_{W^\perp\times W^\perp})$ は split する．

このとき V,W の何れか一つは必ず奇数次元になる．そこで V,W の中で奇数次元の方を Z_o で表し, 偶数次元の方を Z_e で表す．

$SO(V)$ による変換を法として $W^\perp$ は次の形になる．

$$W^\perp = <e_1,\cdots,e_r> \oplus Q(\beta) \oplus <e_1',\cdots,e_r'>, \qquad (\beta = d(W^\perp))$$

ゆえに

$$\begin{aligned}W = (W^\perp)^\perp \subset (X^r \oplus Y^r)^\perp = V_r\\ SO(W, B|_{W\times W}) = SO(W) \hookrightarrow SO(V_r) \subset M_r \subset P_r\end{aligned}$$

となる．いま triple (G,H,ℓ) を

$$\begin{aligned}&G = SO(V)\times SO(W)\\ &H = (\Delta_r \times SO(W)) \ltimes N_r \hookrightarrow G\colon h = \delta g n \mapsto (h,g)\\ &\ell\colon H \to k\colon\ \text{a morphism of } H\end{aligned}$$

で定義する．ここで ℓ は次で与えられるものとする．

$r=0$ のとき $\ell\equiv 0$

$r\geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}&\ell_W\colon V_r \to V_r/W \to k\colon \text{a linear functional} \not\equiv 0\\ &\ell_1\colon X^r \to X^r/<e_1,\cdots,e_{r-1}> \cong <e_r> \to k\colon \text{a linear functional} \not\equiv 0\end{aligned}$$

をとり, それから

$$\ell'\colon N_r \to N_r/N_r^{der} \cong X^r \otimes V_r \xrightarrow{\ell_1\otimes\ell_W} k$$

により ℓ' を定義する．このとき

$$\mathrm{Stab}_{M_r}(\ell') = \{m \in M_r\colon \ell'(mnm^{-1}) = \ell'(n) \quad ({}^\forall n \in N_r)\} = Q_r \times SO(W)$$

となる. よって ℓ' は $(Q_r \times SO(W)) \ltimes N_r$ に延長できる. さらに

$$\ell_r\colon \Delta_r \to k\colon \text{a nondegenerate morphism} \qquad (\text{例えば } \ell(\delta) = \delta_{12} + \cdots + \delta_{r-1r} \text{ など})$$

を取り

$$\ell\colon H = (\Delta_r \times SO(W)) \ltimes N_r \to k\colon \ell(\delta g n) = \ell_r(\delta) + \ell'(n)$$

とおく.

Lemma.
(H, ℓ) は $SO(V)$ による変換を法として (V, W) にのみ依存する. (ℓ_W, ℓ_1, ℓ_r のとり方には依存しない)

[例]
(1) V, W が quasi-split かつ $d(V) = ak^{\times 2}, d(W) = bk^{\times 2}$ であるような relevant pair (V, W) は必ず次の形になる.

(QS-1, $a = 1$): $\dim V = 2d, \ \dim W = 2(d-r-1)+1$

$$\begin{cases} V = < e_1, \cdots, e_d > \oplus < e'_1, \cdots, e'_d > \\ W = < e_{r+1}, \cdots, e_{d-1} > \oplus Q(b) \oplus < e'_{r+1}, \cdots, e'_{d-1} > \\ W^\perp = < e_1, \cdots, e_r > \oplus Q(-b) \oplus < e'_1, \cdots, e'_r > \end{cases}, \qquad Q(\pm b) = < \frac{1}{2}(e_d \pm b e'_d) >$$

(QS-1, $a \neq 1$): $\dim V = 2d+2, \ \dim W = 2(d-r)+1$

$$\begin{cases} V = < e_1, \cdots, e_d > \oplus Q(a,b) \oplus < e'_1, \cdots, e'_d > \\ W = < e_{r+1}, \cdots, e_d > \oplus Q(b) \oplus < e'_{r+1}, \cdots, e'_d > \\ W^\perp = < e_1, \cdots, e_r > \oplus Q(-ab) \oplus < e'_1, \cdots, e'_r > \end{cases}, \qquad \begin{aligned} Q(a,b) &= Q(-ab) \oplus Q(b) \\ &= < f_1 > \oplus < f_2 > \end{aligned}$$

(QS-2, $b = 1$): $\dim V = 2d+1, \ \dim W = 2(d-r)$

$$\begin{cases} V = < e_1, \cdots, e_d > \oplus Q(a) \oplus < e'_1, \cdots, e'_d > \\ W = < e_{r+1}, \cdots, e_d > \oplus < e'_{r+1}, \cdots, e'_d > \\ W^\perp = < e_1, \cdots, e_r > \oplus Q(a) \oplus < e'_1, \cdots, e'_d > \end{cases}, \qquad Q(a) = < f_1 >$$

(QS-2, $b \neq 1$): $\dim V = 2d+1, \ \dim W = 2(d-r-1)+2$

$$\begin{cases} V = < e_1, \cdots, e_d > \oplus Q(a) \oplus < e'_1, \cdots, e'_d > \\ W = < e_{r+1}, \cdots, e_{d-1} > \oplus Q(b,a) \oplus < e'_{r+1}, \cdots, e'_{d-1} > \\ W^\perp = < e_1, \cdots, e_r > \oplus Q(ab) \oplus < e'_1, \cdots, e'_d > \end{cases}, \qquad \begin{aligned} Q(b,a) &= Q(-ab) \oplus Q(a) \\ &= < \frac{1}{2}(ae_d - be'_d) > \oplus < f_1 > \end{aligned}$$

(2) (1) の状況でさらに $\dim W \leq 1$ とすると, $SO(W) = 1, r = d$ で

$$H = \Delta_d N_d$$

は $SO(V)$ の maximal unipotent subgroup (これを U_V とかく) になる. ゆえに ℓ として U_V の nondegenerate morphism ℓ_{U_V} が取れる.
(3) (1) の (V, W) から次の relevant pair が生じる.

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{2}{c}{(V,W)} & & \multicolumn{2}{c}{(G,H,\ell)} \\ & & \rightsquigarrow & & \\ (Z_e, Q(d(Z_o))) & (Z_o, 0) & & (SO(Z_e), U_{Z_e}, \ell_{U_{Z_e}}) & (SO(Z_o), U_{Z_o}, \ell_{U_{Z_o}}) \end{array}$$

このとき

$$U = U_{Z_e} \times U_{Z_o} \quad \text{a maximal unipotent subgroup of } G$$
$$\ell_0 = \ell_{U_{Z_e}} \otimes \ell_{U_{Z_o}} : U \to k: \quad \text{a nondegenerate morphism}$$

とおく.

Lemma.
(V, W) が quasi-split relevant pair のとき, H は G の spherical subgroup である.

以下, k を局所体とし, additive character ψ: $k \to \mathbf{C}^1$, $(\psi \neq 1)$ を固定する. このとき, 与えられた relevant pair (V, W) から局所コンパクト群 G, H と character $\theta = \psi \circ \ell$: $H \to \mathbf{C}^1$ が定まる.
(V, W) が quasi-split のとき, $\widehat{U}$ を U の nondegenerate character のなす集合とし, T を G の対角行列からなる maximal torus とする. T は $\widehat{U}$ 上共役で作用する. $\widehat{U}/T$ を $\widehat{U}$ のなかの T-orbit のなす集合とする. とくに, $\theta_0 = \psi \circ \ell_0$ の T-orbit を θ_0^T で表す.

Proposition.
(V, W) が quasi-split relevant pair でかつ $\dim Z_e \geq 4$ のとき, $\widehat{U}/T$ は 構造群 $N_{E/k}(E^\times)/(k^\times)^2$ の principal homogeneous space になる. ここで $E = k[x]/(x^2 - d(Z_e))$ とする.

Definition.
(V, W) を relevant pair とし, $(G, H, \theta = \psi \circ \ell)$ を対応する triple とする. G の許容表現 (π, V_π) に対し

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \theta) = \{\eta: V_\pi \to \mathbf{C} \ \text{continuous linear functional}: \eta(\pi(h)v) = \theta(h)\eta(v) \quad ({}^\forall h \in H)\}$$

とおく. さらに (V, W) が quasi-split ならば,

$$\mathrm{Hom}_U(\pi, \theta_0) = \{\eta: V_\pi \to \mathbf{C} \ \text{continuous linear functional}: \eta(\pi(u)v) = \theta_0(u)\eta(v) \quad ({}^\forall u \in U)\}$$

とおく. ここで k が archimedean ならば許容表現 (π, V_π) は Casselman - Wallach の意味での smooth Frechet representation of moderate growth のカテゴリーで考える.

定理 (Ginzburg, Piatetski-Shapiro and Rallis)
k が nonarchimedean, (V, W) が quasi-split で π が既約ならば $\dim \mathrm{Hom}_H(\pi, \theta) \leq 1$

定理 (Shalika)
(V, W) が quasi-split で π が既約ならば $\dim \mathrm{Hom}_U(\pi, \theta_0) \leq 1$
($\dim \mathrm{Hom}_U(\pi, \theta_0) = 1$ となる π を θ_0-generic という.)

3. Vogan L-packets

W_k を局所体 k の Weil 群, $W_k' = W_k \ltimes \mathbf{C}$ を Weil-Deligne 群とする.
Quasi-split relevant pair (V, W) を固定し, それから生じる triple を (G, H, θ) とする. G の L-群を ${}^LG$ とかく. 具体的には

$${}^LG = \begin{cases} SO_{2d}(\mathbf{C}) \times Sp_{2(d-r)}(\mathbf{C}) & (\text{QS-1}, a = 1) \\ O_{2d+2}(\mathbf{C}) \times Sp_{2(d-r)}(\mathbf{C}) & (\text{QS-1}, a \neq 1) \\ Sp_{2d}(\mathbf{C}) \times SO_{2(d-r)}(\mathbf{C}) & (\text{QS-2}, b = 1) \\ Sp_{2d}(\mathbf{C}) \times O_{2(d-r)+2}(\mathbf{C}) & (\text{QS-2}, b \neq 1) \end{cases}$$

となる. また定数 $D \mod k^{\times 2}$ を

$$D = d(Z_e) = \begin{cases} a & (\text{QS-1}) \\ b & (\text{QS-2}) \end{cases}$$

で定め, 局所類体論により $k(\sqrt{D})/k$ に対応する character を ω_D とする. i.e.

$$\omega_D\colon W_k \to \{\pm 1\}, \qquad \ker \omega_D = W_k \cap \mathrm{Gal}(\overline{k}/k(\sqrt{D}))$$

Definition.
準同型 $\varphi\colon W_k' \to {}^L G$ が次の 3 条件を満たすとき許容的という.
(i) φ は $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-compatible, i.e. $\det \varphi((a,w)) = \omega_D(w) \quad ({}^\forall(a,w) \in W_k)$.
(ii) $\varphi(\mathbf{C})$ は ${}^L G$ の unipotent な元からなる.
(iii) $\varphi(W_k)$ は ${}^L G$ の semisimple な元からなる.
許容準同型のなす集合に同値関係を

$$\varphi \sim \varphi' \iff {}^\exists g \in {}^L G^0 \quad \text{s.t.} \quad \varphi(w') = g\varphi'(w')g^{-1} \qquad ({}^\forall w' \in W_k')$$

で定め

$$\Phi({}^L G) = \{\, 許容準同型\ W_k' \to {}^L G\ の同値類 \,\}$$

とおく.

Definition.
$\varphi \in \Phi({}^L G)$ に対し

$C_\varphi = \{g \in {}^L G^0\colon g\varphi(w') = \varphi(w')g \quad ({}^\forall w' \in W_k')\}$
$A_\varphi = \pi_0(C_\varphi) = C_\varphi/C_\varphi^0$: C_φ の連結成分のなす群
$\widehat{A}_\varphi = \{\chi\colon A_\varphi$ の有限次元既約表現 $\}/\sim, \qquad \chi \sim \chi' \iff {}^\exists g \in C_\varphi \quad \text{s.t.} \quad \chi(gag^{-1}) = \chi'(a) \quad ({}^\forall a \in A_\varphi)$

とおく. このとき

$$\Phi_{pure}({}^L G) = \{(\varphi,\chi)\colon \varphi \in \Phi({}^L G), \chi \in \widehat{A}_\varphi\}$$

の元を pure Langlands parameter という.

Remark.
$G = SO(V) \times SO(W)$ の場合は

$$A_\varphi \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

の形になる ([G-P, Corollary 6.6 and 7.7]) から $\widehat{A}_\varphi = \mathrm{Hom}(A_\varphi, \{\pm 1\})$.

Definition.
2 つの quadratic space V_α, W_α が

$$\dim V_\alpha = \dim V, \quad \dim W_\alpha = \dim W, \quad d(V_\alpha) = d(V), \quad d(W_\alpha) = d(W)$$

をみたすとき, 群 $G_\alpha = SO(V_\alpha) \times SO(W_\alpha)$ を G の pure inner form という.

Remark.
(1) Pure inner form の k-同型類は Galois cohomology

$$H^1(k,G) \cong H^1(k,SO(V)) \times H^1(k,SO(W)) \cong \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

の元と 1 対 1 に対応する. Pure inner form の中で quasi-split になるのは G 自身だけである.
(2) (V_α, W_α) は必ずしも relevant pair にはならない. 実際 k が p-進体の時には

$$(V_\alpha, W_\alpha)\ が\ \text{relevant pair} \iff \frac{e(V_\alpha)}{e(V)} = \frac{e(W_\alpha)}{e(W)}$$

がいえる ([G-P2, Proposition 8.4]).
(V_α, W_α) が relevant pair のとき, 対応する triple を $(G_\alpha, H_\alpha, \theta_\alpha)$ とおく.
いま

$$\Pi(G_\alpha) = \{G_\alpha \text{ の既約許容表現の同型類 }\}, \qquad \Pi(G/k) = \bigsqcup_{\alpha \in H^1(k,G)} \Pi(G_\alpha)$$

$$\Pi_\varphi(G_\alpha) = \varphi \text{ に対応する } G_\alpha \text{ の (conjectural) Langlands } L\text{-packet}, \qquad \Pi_\varphi = \bigsqcup_{\alpha \in H^1(k,G)} \Pi_\varphi(G_\alpha)$$

とおく.

Conjecture 1([G-P])
(1) 任意の $\varphi \in \Phi({}^LG)$ に対し,

$$\sum_{\pi \in \Pi_\varphi(G)} \dim \mathrm{Hom}_U(\pi, \theta_0) \leq 1$$

となる. 左辺の値は T-orbit $\theta_0^T \in \widehat{U}/T$ の選び方によらない.
(左辺の値が 1 になるとき φ は generic であるということにする)
(2) Ad: ${}^LG \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}({}^LG^0))$ を adjoint 表現とするとき

$$\varphi \text{ は generic} \iff L(s, \mathrm{Ad} \circ \varphi) \text{ は } s = 1 \text{ で正則.}$$

が成り立つ.

Conjecture 2([V])
全単射

$$\Phi_{pure}({}^LG) \to \Pi(G/k) \colon (\varphi, \chi) \mapsto \pi(\varphi, \chi)$$

が存在して次を満たす.
(i) 各 $\varphi \in \Phi({}^LG)$ に対し, $\Pi_\varphi = \{\pi(\varphi,\chi) \colon \chi \in \widehat{A}_\varphi\}$ となる. (i.e. Langlands L-packet と consistent)
(ii) $\varphi \in \Phi({}^LG)$ が generic で, $\chi_0 \in \widehat{A}_\varphi$ が trivial character ならば $\pi(\varphi, \chi_0)$ は $\Pi_\varphi(G)$ のなかの θ_0-generic 表現である.
((ii) からこの全単射は T-orbit θ_0^T の取り方に依存する. Π_φ を Vogan L-packet とよぶ)

Conjecture 3([G-P 2])
$\pi = \pi(\varphi, \chi) \in \Pi_\varphi$ が G_α の表現であるとき

$$L(\pi) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{H_\alpha}(\pi, \theta_\alpha) & ((V_\alpha, W_\alpha) \text{ が relevant pair のとき}) \\ 0 & ((V_\alpha, W_\alpha) \text{ が relevant pair でないとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき
(1) 任意の $\varphi \in \Phi({}^LG)$ に対し $\sum_{\pi \in \Pi_\varphi} \dim L(\pi) \leq 1$ である.
(2) φ が generic ならば $\sum_{\pi \in \Pi_\varphi} \dim L(\pi) = 1$ である.

φ が generic のとき, この予想から Π_φ の元 π_1 で $\dim L(\pi_1) = 1$ となるものがただ一つ存在する. Conjecture 2 の全単射 $\widehat{A}_\varphi \to \Pi_\varphi$ により $\pi_1 = \pi(\varphi, \chi_1)$ と表わすとき, χ_1 は次の様なものになると予想されている. いま ${}^LG$ は symplectic 群と直交群の直積であるから, ${}^LG = Sp(M_1) \times O(M_2)$ とかける. ここで M_1, M_2 は $\mathbf{C}$-ベクトル空間である. そこで

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \colon W_k' \to Sp(M_1) \times O(M_2)$$

とするとき, これから symplectic 表現

$$\widetilde{\varphi}=\varphi_1\otimes\varphi_2\colon W_k'\to Sp(M_1)\times O(M_2)\to Sp(M_1\otimes M_2)$$

が定義される. $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in C_\varphi$ を A_φ の元を代表するような involution として

$$\begin{aligned} M_1\otimes M_2(\gamma,-1)&=M_1\otimes M_2 \text{ における } \gamma \text{ の } -1 \text{ 固有空間}\\ M_i(\gamma_i,-1)&=M_i \text{ における } \gamma_i \text{ の } -1 \text{ 固有空間} \qquad (i=1,2)\end{aligned}$$

とおくと, 部分表現

$$\widetilde{\varphi}^\gamma=(\widetilde{\varphi},M_1\otimes M_2(\gamma,-1)),\qquad \varphi_i^\gamma=(\varphi_i,M_i(\gamma_i,-1))\quad (i=1,2)$$

が得られる. また局所類体論から生じる標準写像

$$W_k'\to W_k\to W_k/[W_k,W_k]\cong k^\times$$

により $-1\in k^\times$ に移るような W_k' の元 w_{-1} を一つとる. これから $\chi_1\colon A_\varphi\to\{\pm1\}$ を

$$\chi_1(\gamma)=\varepsilon(\widetilde{\varphi}^\gamma)\det(\varphi_2(w_{-1}))^{\dim(\varphi_1^\gamma)/2}\det(\varphi_2^\gamma(w_{-1}))^{\dim\varphi_1/2}$$

で定義する. ここで $\varepsilon(\widetilde{\varphi}^\gamma)\in\{\pm1\}$ は $\widetilde{\varphi}^\gamma$ の local constant とする. ([G-P, Proposition 9.5]).

Conjecture 4([G-P 2])
φ が generic ならば $\dim L(\pi(\varphi,\chi_1))=1$ である.

次元が小さい場合には $GL(2)$ に関する結果から予想が正しいことが解る. すなわち

定理
次の場合に Conjecture 3, 4 は正しい.
- $\dim V=3$
- $\dim V=4$ かつ $\dim W=1$

また $\dim V=4$ かつ $\dim W=3$ のとき Conjecture 3 は正しい.

Remark.
(1) $\pi(\varphi,\chi_1)\in\Pi_\varphi(G_\alpha)$ となる G_α は次のように決まる. Kottwitz duality と自然な写像

$$H^1(k,G)\times\pi_0(Z({}^LG^0)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)})\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z},\qquad \pi_0(Z({}^LG^0)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)})\to\pi_0(C_\varphi)=A_\varphi$$

により $\chi_1\in\widehat{A}_\varphi$ は $H^1(k,G)$ の元 α を定める. 具体的には

$$(V_\alpha,W_\alpha),\quad \begin{cases}\dim V_\alpha=\dim V, & d(V_\alpha)=d(V), \quad e(V_\alpha)=\chi_1(-1_V,1_W)e(V)\\ \dim W_\alpha=\dim W, & d(W_\alpha)=d(W), \quad e(W_\alpha)=\chi_1(1_V,-1_W)e(W)\end{cases}$$

で定まる. 今の場合

$$\chi_1(-1_V,1_W)=\chi_1(1_V,-1_W)=\varepsilon(\widetilde{\varphi})\det(\varphi_2(w_{-1}))^{\dim\varphi_1/2}$$

となるから, とくに

$$G_\alpha=G\iff\varepsilon(\widetilde{\varphi})\det(\varphi_2(w_{-1}))^{\dim\varphi_1/2}=1$$

がわかる.
(2) $\dim W^\perp=1$ (i.e. $r=0$) の場合を考える. (V_α,W_α) が relevant pair ならば $H_\alpha=SO(W_\alpha)\hookrightarrow G_\alpha=SO(V_\alpha)\times SO(W_\alpha)$ は diagonal embedding かつ $\theta_\alpha\equiv1$ である. ゆえに $\pi=\sigma_1\times\sigma_2\in\Pi(G_\alpha)=\Pi(SO(V_\alpha))\times\Pi(SO(W_\alpha))$ に対し

$$L(\pi)=\mathrm{Hom}_{H_\alpha}(\pi,\theta_\alpha)\cong\mathrm{Hom}_{H_\alpha}(\sigma_1,\sigma_2^\vee),\qquad (\sigma_2^\vee \text{ は } \sigma_2 \text{ の反傾表現})$$

すなわち $L(\pi)$ は $\sigma_1|_{H_\alpha}$ の分解の様子を表わし, Conjecture 3, 4 は

$$\mathrm{Hom}_U(\pi_0,\theta_0)\neq\{0\} \implies \mathrm{Hom}_{H_\alpha}(\pi_1,\theta_\alpha)\neq\{0\}$$

を導く.

4. The global conjecture

この section では k を global field とする. (V,W) を $\dim W^\perp=1$ であるような relevant pair とする. これに対応する triple を (G,H,ℓ) とする. 前の Remark (2) と同様に

$$H=SO(W)\hookrightarrow G=SO(V)\times SO(W)\text{: diagonal embedding}$$
$$\ell\equiv 0$$

である. k の各素点 v に対し, $G_v=G(k_v)$, $H_v=H(k_v)$ などとする. $\mathbb{A}$ を k のアデール環として, $G(\mathbb{A})$, $H(\mathbb{A})$ をアデール群とする.
k の (conjectural) Langlands group を L_k として, G の global tempered Langlands parameter

$$\varphi=\varphi_1\times\varphi_2\colon L_k\to {}^LG=Sp(M_1)\times O(M_2)$$

をとる. 各 v に対し, φ から従う local tempered Langlands parameter を

$$\varphi_v\colon W'_{k_v}\to {}^LG=Sp(M_1)\times O(M_2)$$

とおく. φ_v に対応する local Vogan L-packet を Π_{φ_v} とする. ここで任意の v で次が成り立つと仮定する.

(*i*) φ_v は generic

(*ii*) Conjecture 3 より $\pi_v\in\Pi_{\varphi_v}$ を $\dim L(\pi_v)=1$ となる表現とするとき, $\pi_v\in\Pi_{\varphi_v}(G_v)$

$\pi=\otimes'_v\pi_v$ は $G(\mathbb{A})$ の admissible 表現で

$$\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi,\mathbf{C})\cong\otimes_v L(\pi_v)\cong\mathbf{C}$$

を満たす. さて φ に対して, C_φ, A_φ, $\widetilde{\varphi}$ を local の場合と同様に定義する. 更に A_φ の元を代表する involution $\gamma\in C_\varphi$ に対して, $\widetilde{\varphi}^\gamma=(\widetilde{\varphi},M_1\otimes M_2(\gamma,-1))$ を $\widetilde{\varphi}$ の部分 symplectic 表現とし, これから生じる global root number を

$$\varepsilon(\widetilde{\varphi}^\gamma)=\prod_v\varepsilon(\widetilde{\varphi}_v^\gamma)$$

で表す.

Conjecture 5 ([G-P])
上で構成した π が保型表現であるための必要充分条件は任意の $\gamma C_\varphi^0\in A_\varphi$ について $\varepsilon(\widetilde{\varphi}^\gamma)=1$ となることである. このとき π は $G(\mathbb{A})$ の discrete 保型表現で multiplicity 1 をもつ.

いま π が保型表現で, $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間に実現されているとする. $f\in\pi$ に対して, 積分

$$\ell_H(f)=\int_{H\backslash H(\mathbb{A})}f(h)dh$$

が収束すると仮定する. (π が cuspidal ならばこれはいつも収束する). ℓ_H が恒等的に 0 でなければ, それは 1 次元空間 $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi,\mathbf{C})$ の基底を与える.

Conjecture 6 ([G-P])
$\ell_H\not\equiv 0$ であるための必要充分条件は $L(1/2,\widetilde{\varphi})\neq 0$

References

[G-P] B. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}*, Can. J. Math. **44** (1992), 974 - 1002.

[G-P 2] ———, *On irreducible representations of $SO_{2n+1}\times SO_{2m}$*, Can. J. Math. **46** (1994), 930 - 950.

[V] D. A. Vogan, *The local Langlands conjecture*, Contemporary Math. **145** (1993), 305 - 379.