数理解析研究所講究録
965 巻 1996 年 52-70

Regulator と Bloch-Beilinson 予想 *

今野拓也 † (Takuya Konno)

1 導入

k を代数体とし $\zeta_k(s)$ をその Dedekind のゼータ関数としよう:

$$\zeta_k(s) := \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N_{k/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}^{-s}}.$$

よく知られているように $\zeta_k(s)$ に適切な Γ- 因子

$$\zeta_\infty(s) := \prod_{v=\mathbb{R}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \prod_{v=\mathbb{C}} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$$

をかけたもの $L_k(s) := \zeta_\infty(s)\zeta_k(s)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, 関数等式

$$L_k(s) = \varepsilon_k(s) L_k(1-s)$$

を満たす. ここで $\varepsilon_k(s) := \Delta_k^{1/2-s}$ であり, Δ_k は k の判別式である. また

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

と書いた.

k の regulator 写像は次のように定義されていた. r_1 と r_2 でそれぞれ k の実および複素素点の数を表す. $\mathrm{Hom}(k, \mathbb{C})$ には $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が置換によって作用する. この作用により $\mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}(k,\mathbb{C})}$ を $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$- 加群と見たものを X_k と書こう. k の単数群 $\mathcal{O}_k^\times$ から $(X_k \otimes \mathbb{R})$ のプラスパート, すなわち複素共役の固有値 1 の固有空間 $(X_k \otimes \mathbb{R})^+$ への写像 r を

$$r : \mathcal{O}_k^\times \ni u \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(k,\mathbb{C})} \log |u|_\sigma \cdot \sigma \in (X_k \otimes \mathbb{R})^+$$

と定める. これに $X_k^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}$ の $(X_k \otimes \mathbb{R})^+$ への埋め込みで厚みをつけたもの

$$\tilde{r} : \mathcal{O}_k^\times \oplus X_k^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} \longrightarrow (X_k \otimes \mathbb{R})^+ \simeq \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

---

*1995 年保型形式シンポジウムでの講演.

†九州大学大学院数理学研究科 〒 812-81 福岡市東区箱崎 6-10-1
E-mail address takuya@math.kyushu-u.ac.jp

が k の regulator 写像であった.

V を $\mathbb{R}$ 上の vector 空間とし L をその中の格子とする. Λ を V 内の別の格子とするとき, V/L の体積が1となるような V の Lebesgue 測度に関する V/Λ の体積のことを L **に関する** Λ **の covolume** と呼び, $\mathrm{covol}_L(\Lambda)$ と書く. 以上のもとで $\zeta_k(s)$ に関する Dedekind-Dirichlet の古典的結果は次のように述べられる.

定理 1.1 (Dedekind-Dirichlet)

$$\mathrm{covol}_{X_k^+}(\tilde{r}(\mathcal{O}_k^\times \oplus X_k^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})})) = \lim_{s\to 0} s^{1-r_1-r_2}\zeta_k(s).$$

これが Bloch-Beilinson 予想のもっとも単純で古くから知られている例である. 以下この概説では上の定理の数体上の代数多様体への拡張である Bloch-Beilinson 予想の主張を述べ, しかる後に modular 曲線の場合のこの予想の Beilinson 自身による証明を略説する. 全般にこの概説の内容は [6] から引用されたものであり（多少の版権上の問題があるように思われる）, より詳しく知りたい方はそちらをごらんいただきたい.

なおこの報告集を書くに当たって締め切りをゴールデンウィーク明けまで延ばして待ってくださった村瀬篤先生を始め, 各方面の方にご迷惑をおかけしたことをお詫びします. また原稿作成中に数度にわたって原稿ファイルの半分近くを消去しては作業の非効率化を計ってくださった筆者所有の Macintosh PowerBook 145B にも心から感謝したい.

2 代数多様体の Hasse-Weil ゼータ関数

必要なら Weil の係数制限を行って, 代数多様体は全て $\mathbb{Q}$ 上定義されているとしてよい. X を $\mathbb{Q}$ 上定義された代数多様体とし, $\overline{X} := X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$ と書く. $M = M(X)$ で X に付随した次のコホモロジー群たちの族を表すことにする $(0 \le i \le 2\dim X)$.

- ℓ-進コホモロジー群 $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$;
- de Rham コホモロジー群 $H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$;
- 特異コホモロジー群 $H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$.

このうち特に $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-加群の構造を持っている. 各素数 p に対してその上にある $\bar{\mathbb{Q}}$ の素数 $\bar{p}$ を1つ固定する. $I_{\bar{p}} \subset D_{\bar{p}} \subset \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_{\bar{p}}/\mathbb{Q}_p)$ で $\bar{p}$ での惰性群及び分解群をそれぞれ表す. 定義から $D_{\bar{p}}/I_{\bar{p}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ であったから, $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の p 乗写像の逆像 $\mathrm{Fr}_p \in D_{\bar{p}}/I_{\bar{p}}$ (数論的 Frobenius 元) が取れる. これの逆元 $\Phi_p := \mathrm{Fr}_p^{-1}$ を幾何的 Frobenius 元という. これを使って

$$Z_p(X,T)_i := \det(\mathbf{1} - \Phi_p T | H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_p}), \quad 0 \le i \le 2\dim X \tag{2.1}$$

と定義する. これは $\bar{p}$ の取り方によらない. さらに形式的に

$$L_i(M(X), s) = L_i(X, s) := \prod_p Z_p(X, p^{-s})_i^{-1} \tag{2.2}$$

と定義する. これについて次の作業仮説を仮定しよう.

仮定 2.1

(1) $Z_p(X,T)_i$ は $\mathbb{Z}$ に係数を持ち $\ell \neq p$ によらない. これにより $L_i(X,s)$ の定義が形式的な *Euler* 積として意味を持つ.

(2) $L_i(X,s)$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \frac{i}{2}$ で絶対収束し, 従ってそこで零点を持たない.

(3) $L_i(X,s)$ は全平面に有理型関数として解析接続され, その極は

$$\begin{cases} \frac{i}{2}+1 & i \text{ が偶数の時,} \\ \text{なし} & i \text{ が奇数の時} \end{cases}$$

にのみ起こりうる.

(4) $L_i(X, \frac{i}{2}+1) \neq 0$.

(5) *Gamma* 因子 $L_{\infty,i}(X,s)$ を次のように定める. $H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ の *Hodge* 分解の (p,q)-成分を $H^{p,q}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ と書き $(p+q=i)$,

$$h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}), \quad h^{p,\pm} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,\pm(-1)^p}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$$

(2.3)

$$L_{\infty,i}(X,s) := \begin{cases} \prod_{p<q,\, p+q=i} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} & i \text{ が奇数の時,} \\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s-\frac{i}{2})^{h^{i/2,+}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-\frac{i}{2}+1)^{h^{i/2,-}} \prod_{p<q,\, p+q=i} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} & i \text{ が偶数の時} \end{cases}$$

とおく. このとき s についての指数関数 $\varepsilon_i(X,s)$ が存在して関数等式:

$$L_i(X,s)L_{\infty,i}(X,s) = \varepsilon_i(X,s)L_i(X,i+1-s)L_{\infty,i}(X,i+1-s) \tag{2.4}$$

が成り立つ.

この作業仮説, 特に Gamma 因子の形 (2.3) と関数等式 (2.4) を (2), (3) と組み合わせることにより, $\frac{i}{2}$ 以下の整数点での $L(X,s)$ の位数が簡単に計算できる.

命題 2.2 *m を $\frac{i}{2}$ 以下の整数とし, $F^pH^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$ で $H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$ の Hodge filtration を表す:*

$$F^pH^i_{DR}(X(\mathbb{C})) := \bigoplus_{\substack{j\geq p \\ j+q=i}} H^{j,q}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}).$$

このとき

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{(-1)^{i-m}} - \dim_{\mathbb{C}} F^{i+1-m}H^i_{DR}(X(\mathbb{C})) \\ &\qquad = \begin{cases} \mathrm{ord}_{s=m} L_i(X,s) & m < \frac{i}{2} \text{ の時,} \\ \mathrm{ord}_{s=m} L_i(X,s) - \mathrm{ord}_{s=m+1} L_i(X,s) & m = \frac{i}{2} \text{ の時} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})^{(-1)^{i-m}}$ は $H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ 内の複素共役が $(-1)^{i-m}$ 倍で作用する部分空間を表す.

3 Deligne cohomology と Deligne 予想

3.1 Deligne cohomology の定義

X 上の通常の de Rham 複体

$$\Omega^\bullet : \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \to \Omega^1_{X(\mathbb{C})} \to \Omega^2_{X(\mathbb{C})} \to \dots$$

の頭を少し変形した複体

$$\mathbb{Z}(n)_{\mathcal{D}} : \mathbb{Z}(n) \to \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \to \Omega^1_{X(\mathbb{C})} \to \Omega^2_{X(\mathbb{C})} \to \dots$$

の cohomology 群

$$H^\bullet_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(n)) := H^\bullet(X^{an}, \mathbb{Z}(n)_{\mathcal{D}})$$

のことを **Deligne cohomology** と呼ぶ. $\mathbb{Z}$ を含む可換環 A に対しても $\mathbb{Z}(n)$ のところを $A(n)$ で置き換えて Deligne cohomology $H^\bullet_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{C}}, A(n))$ が得られる. ここでもちろん $A(n)$ は A の n 回 Tate twist $A(2\pi\sqrt{-1})^n$ である.

3.2 他の cohomology との関係

$\Omega^\bullet_{\geq n}$ 及び $\Omega^\bullet_{<n}$ で各々次のような de Rham 複体を途中で切った複体を表す:

$$\Omega^\bullet_{\geq n} : 0 \to \Omega^n_{X(\mathbb{C})} \to \Omega^{n+1}_{X(\mathbb{C})} \to \cdots$$
$$\Omega^\bullet_{<n} : \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \to \Omega^1_{X(\mathbb{C})} \to \cdots \to \Omega^{n-1}_{X(\mathbb{C})} \to 0.$$

するとまず複体の短完全系列

$$\Omega^\bullet_{\geq n} \to \Omega^\bullet \to \Omega^\bullet_{<n}$$

において

- $H^i(\Omega^\bullet_{\geq n}) \to H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$ は単射;
- $\mathrm{Im}[H^i(\Omega^\bullet_{\geq n}) \to H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))] = F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$,

となることから

$$H^i(\Omega^\bullet_{<n}) = H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))/F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$$

がわかる. これを短完全列

$$0 \to \Omega^\bullet_{<n}[-1] \to \mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}(n) \to 0$$

の cohomology 完全系列と組み合わせれば

$$\begin{aligned} \text{(3.1)} \qquad &\to H^{i-1}_{DR}(X(\mathbb{C}))/F^n H^{i-1}_{DR}(X(\mathbb{C})) \to H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(n)) \to H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)) \\ &\to H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))/F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C})) \to \dots \end{aligned}$$

となり, Deligne cohomology が de Rham cohomology と関連づけられる.

3.3 実構造

$H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$ には $H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ の複素共役を比較定理の同型で持ってきた複素共役がある. 従って (3.1) によって Deligne cohomology にも複素共役が作用する. そこで Deligne cohomology の実構造を (X は必ずしも $\mathbb{R}$ 上定義されていないのだが)

$$H^\bullet_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}},\mathbb{Z}(n)) := H^\bullet_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{Z}(n))^+$$

(複素共役の固有値 1 の固有空間) と定義する. 同様に $H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$ にも実構造 $H^i_{DR}(X_{/\mathbb{R}})$ を定義しておく. この実構造は後で regulator を定義するときに必要になる.

3.4 命題 2.2 の書き直し

さて m を $\frac{i+1}{2}$ より小さい整数とする. 従って特に Deligne cohomology の定義に現れる n を $n := i+1-m$ とすれば, $i+1 < 2n$ が成り立つ. (3.1) 内の写像

$$H^{i+1}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n)) \longrightarrow H^{i+1}_{DR}(X(\mathbb{C}))/F^n H^{i+1}_{DR}(X(\mathbb{C}))$$

において, 左辺への複素共役の作用はその係数への作用なので $(-1)^n$ 倍である. ところが $F^n H^{i+1}_{DR}(X(\mathbb{C}))$ の中で複素共役が $(-1)^n$ で作用する部分は $i+1 < 2n$ から

$$\begin{aligned} F^n H^{i+1}_{DR}(X(\mathbb{C})) \cap \overline{F^n H^{i+1}_{DR}(X(\mathbb{C}))} &= \left(\bigoplus_{j\geq n} H^{j,q}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})\right) \cap \left(\bigoplus_{k\geq n} H^{q,k}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})\right) \\ &= \bigoplus_{j,k\geq n} H^{j,k}_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}) = 0 \end{aligned}$$

となる. つまり上の写像は単射であり, 従って (3.1) は

(3.2) $0 \to H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n)) \to H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))/F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C})) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{R}(n)) \to 0$

となる. $\mathbb{C} = \mathbb{R}\oplus\sqrt{-1}\mathbb{R} = \mathbb{R}(n)\oplus\mathbb{R}(n-1)$ と de Rham cohomology と Betti cohomology のあいだの比較定理から

$$H^i_{DR}(X(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}) = H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n-1)) \oplus H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n))$$

だが, (3.2) から $H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n))$ の方は $H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))/F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))$ に埋め込まれるので結局 (3.2) は

$$\begin{aligned} 0 \to H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n)) \to H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n)) \oplus \left(H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n-1))/F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C}))\right) \\ \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{R}(n)) \to 0, \end{aligned}$$

すなわち

$$0 \to F^n H^i_{DR}(X(\mathbb{C})) \to H^i_B(X(\mathbb{C}),\mathbb{R}(n-1)) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{R}(n)) \to 0$$

が得られる. これの "実部" を取ることにより次を得る.

命題 3.1 *(1)* $0 \le i \le 2\dim X$ とし, m を $\frac{i+1}{2}$ より小さい整数とするとき, $n := i+1-m$ と書けば次の **基本完全系列** が成り立つ.

$$(3.3)\quad 0 \to F^n H^i_{DR}(X_{/\mathbb{R}}) \to H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))^{(-1)^{n-1}} \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \to 0.$$

(2) これから特に 命題 *2.2* は次のように書き直される.

$$(3.4)\quad \dim_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) = \begin{cases} \mathrm{ord}_{s=m} L_i(X,s) & m < \frac{i}{2} \text{ の時}, \\ \mathrm{ord}_{s=m} L_i(X,s) - \mathrm{ord}_{s=m+1} L_i(X,s) & m = \frac{i}{2} \text{ の時} \end{cases}$$

3.5 L- 関数の特殊値に関する Deligne 予想

最後に Bloch-Beilinson 予想への動機付けとして $L_i(X,s)$ の特殊値に関する Deligne の予想を復習しておこう. $\frac{i}{2}$ より小さい整数 m が **critical** とは次の互いに同値な 4 条件が成り立つことであった:

(1) $L_{\infty,i}(X,s)$ は $s = m, n$ で極を持たない;

(2) $L_{\infty,i}(X,s)$ は $s = m$ で極を持たない;

(3) $L_i(X,m) \neq 0$;

(4) $H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) = 0$.

このときには 命題 2.2 から同型

$$(3.5)\qquad F^n H^i_{DR}(X_{/\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))^{(-1)^{n-1}}$$

が得られる. ところが $F^n H^i_{DR}(X_{/\mathbb{R}})$ には代数的 de Rham cohomology による $\mathbb{Q}$- 構造があり, $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))^{(-1)^{n-1}}$ にも $\mathbb{Q}$- 構造 $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(n-1))^{(-1)^{n-1}}$ がある. 従って同型 (3.5) の determinant (あるいは Jacobian) の modulo $\mathbb{Q}^\times$ での値 $c_M(m) \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times$ はそれらの $\mathbb{Q}$- 構造たちだけから決まる. これを **twisted motive** $M(m)$ **の Deligne 周期** と呼ぶ.

予想 3.2 (Deligne 予想) *Critical* な m において $L_i(X,m)$ は $c_M(m)$ の有理数倍である.

4 K- 群と絶対 cohomology

Beilinson 予想は上記の Deligne 予想を critical でない m にも拡張するものである. その方法は Deligne の構成に原則的には一致している. すなわち:

(1) Deligne cohomology $H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n))$ に自然な $\mathbb{Q}$- 構造を入れ;

(2) 同型

$$\wedge^{max} F^n H^i_{DR}(X_{/\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \wedge^{max} H^{i+1}_{\mathcal{D}} H(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \xrightarrow{\sim} \wedge^{max} H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))^{(-1)^{n-1}}$$

による両辺の $\mathbb{Q}$- 構造の比 $c_M(m) \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times$ を M の **regulator** として定義する;

(3) L- 関数の特殊値が $c_M(m)$ の有理数倍であることを予想する.

しかし実は (1) の Deligne cohomology の $\mathbb{Q}$- 構造の定義をするのは容易なことではない. 例えば自然な写像

$$H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Q}(n)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n))$$

は全射 (!?) になることが知られており, 係数の $\mathbb{Q}$- 構造を使うわけにはいかない. **Beilinson 予想のハイライトは, K- 群あるいは絶対 cohomology から Deligne cohomology への Chern 類写像の像によって Deligne cohomology に $\mathbb{Q}$- 構造を入れるところである.** 一方で, このように抽象線形代数のハイテクを使って定式化された予想を Rankin-Selberg convolution のような具体的な方法で modular 曲線の場合に証明している点も現代数学の醍醐味を感じさせてくれる. 以下このセクション 4 と次のセクション 5 ではこの Beilinson による秀逸な $\mathbb{Q}$- 構造の導入の概略を紹介する.

4.1 K- 群

非常な抽象論によって定義される K- 群については必要な結果を引用するだけにとどめたい. 興味のある方は [5] などを参照されたい.

X を上の通りとする. X の K- 群とは一言でいえば X 上のベクトル束の圏の "分類" 単体 scheme $BGL(X)$ のプラスパート $BGL(X)^+$ の基本群のことであった:

$$K_n(X) = \pi_n(BGL(X)^+).$$

特に $K_0(X)$ は X 上のベクトル束たちのなす Grothendieck 群である. これからもわかるように K- 群は X に付随した位相幾何的なものたちの親玉のようなものだが, 構成が抽象的なのと大きすぎるために直接これを研究する方法はあまりないように見える. しかし各 n に対して $K_n(X)$ はなにかある cohomology 群を全ての次数について直和を取ったような構造をしていることが感じとれる. そこで $K_n(X)$ をそれらの直和因子にうまく分解し, その各々を X の **絶対 cohomology** として定義したい. 以下ではその分解の方法を [2], [4], [7] などから復習する.

4.2 λ- 環, Adams 作用, 絶対 cohomology

まず A を単位元付き可換環, G を群とし, A 上の有限生成射影 G- 加群の圏を $\mathcal{P}_A(G)$ と書く. $\mathcal{P}_A(G)$ の Grothendieck 群 $R(G, A$ は A 上の tensor 積を乗法とすることで単位元付き可換環の構造を持つ. しかも $R(G, A)$ には wedge 積

$$\wedge^i : R(G, A) \ni M \longmapsto \wedge^i M \in R(G, A)$$

がある. このような構造を直接に $K_0(X)$ に導入したいがそれはかなわぬことなので, まずは次のようにこの状況を抽象化する.

λ- 環

$(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ が **λ- 環** とは

- 単位元付き可換環 R (上の $R(G, A)$ に当たる) と,
- R からそれ自身への写像の族 $\{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (上の $\{\wedge^i\}_i$ に当たる)

の組であって, 条件

(1) $\lambda^0 = 1$, $\lambda^1 = \mathrm{id}_R$;

(2) $\lambda^i(x+y) = \sum_{j=0}^{i} \lambda^j(x)\lambda^{i-j}(y)$, $\forall x, y \in R$

を満たすもののことをいう. $(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ を λ-環とする. $x \in R$ が **λ-次元** n とは

$$\lambda^n(x) \neq 0, \quad \lambda^k(x) = 0 \ \forall k > n$$

なることとする. 実は一般の λ-環についてはあまり意味のあることは証明できない. そこで全ての元が λ-次元 1 の元たちの和で書けるような λ-環を **special** λ-環と呼び, そのようなものに話を限定することにする. 例えば $R(G, A)$ やさらに $K_0(X)$ なども special λ-環である.

Augmentation

加法群として torsion のない単位元付き可換環 S であって, 各 $x \in S$ に対して

$$\binom{x}{i} := \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$$

があるようなものに対して, λ-作用を

$$\lambda^i(x) := \binom{x}{i}$$

と定めれば, これは λ-環になる. このような λ-環を **2項 λ-環** という. Special λ-環 $(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ の **augmentation** とは R の 2項 λ-部分環 $(S, \{\binom{\bullet}{i}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ と S-準同型 $\varepsilon : (R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}) \to (S, \{\binom{\bullet}{i}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ の組のことをいう. 例えば $R(G, A)$ の自明な G-加群たちのはる部分環 S と G-構造を忘れる写像 ε は augmentation である.

Adams 作用

$(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ を special λ-環とする. R 上の **Adams 作用** $\psi^k : R \to R$ $(k \in \mathbb{N})$ は関係式

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi^k(x)T^k = (-T)\frac{d\log\left(\sum_{i=o}^{\infty} \lambda^i(x)(-T)^i\right)}{dT}$$

によって一意に定義される. 例えば $R(G, A)$ では $\psi^k(M)$ は $(\wedge^k M)^{\oplus k}$ から双対を $k-1$ 回とったものである. $(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ を augmentation (S, ε) 付き special λ-環とする. $\tilde{R} := \mathrm{Ker}\varepsilon$ と書く. このとき $(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ のこの augumentation に関する **γ-filtration** $\{R_n\}_n$ が

$$R_n := \left\{ \gamma^{i_1}(x_1)\cdots\gamma^{i_r}(x_r) \;\middle|\; x_j \in \tilde{R}, \ \sum_{j=1}^{r} i_j \geq n \right\} \text{ が } S \text{ 上生成する部分環}$$

で定義される. γ-filtration が **局所巾零** とは

$$\forall x \in \tilde{R}, \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{such that} \qquad \gamma^{i_1}(x_1)\cdots\gamma^{i_r}(x_r) = 0, \ \text{if} \sum_{i=1}^{r} i_j > N$$

なることであった.

さて γ-filtration と Adams 作用の定義を使った簡単な計算からすぐわかるように

$$x \in R_n \implies \psi^k(x) - k^n(x) \in R_{n+1}$$

である. そこで

$$Z_n\tilde{R} := \mathrm{Ker}[(\psi^k - k^n)\cdots(\psi^k - k) : \tilde{R} \to \tilde{R}]$$

とおけば, γ-filtration が局所的に巾零の時 $\tilde{R} = \bigcup_n Z_n\tilde{R}$ が成り立つ. そこで

$$V_i := Z_i\tilde{R} \otimes \mathbb{Q} / Z_{i-1}\tilde{R} \otimes \mathbb{Q}$$

とすれば次を得る.

命題 4.1 *$(R, \{\lambda^i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ を augumentation (S, ε) 付きの special λ-環でその γ-filtration が局所巾零なものとする. このとき $\tilde{R} \otimes \mathbb{Q}$ の ψ^k での k^i-固有空間を V_i として直和分解:*

$$\tilde{R} \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i$$

が成り立つ. これは k によらない.

絶対 cohomology の構成

さて X を上の通りとする. 実は X 上のベクトル束の torsor $p : W \to X$ であって affine scheme であるようなものが存在することが知られている (Jouanolou の補題). すると K-群の定義から $K_i(W) = K_i(X)$ である. そこで $W = \mathrm{Spec}A$ として, 以上の準備的構成を $R(\pi_1(S^n), A)$ に適用して次を得る.

命題 4.2 *(1) $K_n(X)$ は special λ-環で augmentation $\varepsilon : K_n(X) \to H^0(X, \mathbb{Z})$ を持ち, その γ-filtration は局所巾零である.*
(2) $K_n(X)$ 上の Adams 作用 ψ^k たちは cup 積 $K_n(X) \times K_m(X) \to K_{m+n}(X)$ と可換である.

(1) により $K_n(X)$ に命題 4.1 が適用できる:

$$K_n(X) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} K_n^{(i)}(X), \qquad \psi^k|_{K_n^{(i)}(X)} = k^i \cdot \mathrm{id},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

これを使って X の **絶対 cohomology** を

$$H^i_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{Q}(j)) := K^{(j)}_{2j-i}(X)$$

と定義する. 絶対 cohomology については, 例えば $i < 0$ の時に $H^i_{\mathcal{A}}(X)$ が消えるかどうかといった基本的なこともあまり知られていない.

5 Chern 類写像と regulator 写像

5.1 Chern 類

Regulator 写像は Chern 類写像を使って定義される. Chern 類写像の定義を復習しよう.

$\mathbb{C}$ 上の quasi-projective 多様体に analytic な位相を入れたものの圏を $\mathcal{V}$ と書く. n 次のベクトル束の分類単体 scheme は

$$BGL_n : \mathrm{Spec}\mathbb{C} \overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{}} GL_n \overset{\overset{\mathrm{id}\times 1}{\leftarrow}}{\underset{\underset{1\times\mathrm{id}}{\leftarrow}}{\overset{\mu}{\leftarrow}}} GL_n \times GL_n \overset{\overset{\leftarrow}{\leftarrow}}{\underset{\underset{\leftarrow}{\leftarrow}}{}} GL_n \times GL_n \times GL_n \ldots$$

で与えられていた. これは $\mathcal{V}$ 内の単体 scheme だが, これを $\mathcal{V}$ 上の集合の層だと思う. 一方 $\mathcal{V}$ 上の層の複体 $\bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}$ (Deligne の複体) が定義されていた (cf. 3.1). BGL_n は自然に BGL_{n+1} に埋め込まれるから cohomology $H^\bullet(BGL_\bullet, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$ の方にも自然な射影:

$$H^\bullet(BGL_{n+1}, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}) \longrightarrow H^\bullet(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$$

が引き起こされる. そこで記号的に

$$BGL := \varinjlim_n BGL_n, \quad H^\bullet(BGL, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}) := \varprojlim_n H^\bullet(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$$

と書くことにする.

$H^{2j}(BGL, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$ の元 $c_j = \{c_j^{(n)} \in H^{2j}(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ を 1 つ固定する. $\mathcal{V}$ 上の abel 群の層の複体のなす導来圏を $D(\mathcal{V})$ と書くとき, よく知られているように

$$H^{2j}(BGL, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{V})}(N\mathbb{Z}BGL, (\bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})[2j])$$

である. ここで $\mathbb{Z}BGL$ は集合の層 BGL に付随した $\mathbb{Z}$- 加群の層であり, $N\mathbb{Z}BGL$ はそれから次数の正負を逆にして得られる複体:

$$N\mathbb{Z}BGL : \cdots \to (BGL)_{-i} \to (BGL)_{-i-1} \to \ldots$$

である. これから環 A に対して c_j は準同型:

$$c_j : N\mathbb{Z}BGL \longrightarrow (\bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})[2j]$$
$$c_j : N\mathbb{Z}BGL(A) \longrightarrow (\bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})[2j](\mathrm{Spec}A)$$

を引き起こし, cohomology を取ることにより

$$c_{i,j} : H_i(GL(A), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2j-i}(\mathrm{Spec}A, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$$

を与える. これと Hurewicz の写像:

$$K_i(\mathrm{Spec}A) = \pi_i(BGL(A)^+) \longrightarrow H_i(BGL(A)^+, \mathbb{Z}) = H_i(GL(A), \mathbb{Z})$$

を合成することで結局, $H^{2j}(BGL, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$ **の元** c_j **に対して写像:**

$$c_{i,j} : K_i(A) \longrightarrow H^{2j-i}(\mathrm{Spec}A, \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}), \quad i \in \mathbb{N}$$

が得られた. これらの構成は絶対 cohomology の定義のところで述べた議論により affine scheme Spec$A$ から任意の quasi-projective scheme に拡張される. 以下では Chern 類の定

義をし, それを使って普遍 Chern 類と呼ばれる特別な $c_j = \{c_j^{(n)}\}_n$ を定義する. この c_j に対して定まる $c_{i,j}$ がすなわち Chern 類写像である.

Chern 類の定義

$\mathcal{V}$ 内の任意の scheme Y に対して, Y 上の m 次元射影空間を $\mathbf{P}_Y^m$ と書き, その構造射を $\pi_Y : \mathbf{P}_Y^m \to Y$ と書く. このとき準同型

$$\tilde{c} : \mathbb{G}_m[-1] \longrightarrow \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}$$

であって, それが引き起こす写像 $H^1(\mathbf{P}_Y^m, \mathcal{O}_Y^\times) \to H^2(\mathbf{P}_Y^m, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$ による canonical line bundle $\mathcal{O}_Y(1)$ の像を ξ_Y と書くとき, 写像:

$$\bigoplus_{i=0}^{m} H^{\bullet-2i}(Y, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}) \ni (a_i)_i \longmapsto \textstyle\sum_{i=0}^m (\pi_Y^*(a_i) \cup \xi_Y^i) \in H^\bullet(\mathbf{P}_Y^m, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$$

が任意の Y 及び $m \geq 0$ に対して同型になるようなものが存在する.

さらに E を $\mathcal{V}$ 内の単体 scheme BGL_n 上の rank m のベクトル束とし, $\pi_E : \mathbf{P}(E) \to BGL_n$ を E に付随した射影束の構造射とする. $\mathbf{P}(E)$ 上の canonical line bundle の上述の $\tilde{c}$ による像を ξ_E と書くとき,

$$\bigoplus_{i=0}^{m-1} H^{\bullet-2i}(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}) \ni (x_k)_k \longmapsto \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} (\pi_E^*(x_k) \cup \xi_E^k) \in H^\bullet(\mathbf{P}(E), \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$$

は同型である. これから特にこの写像で 0 に行くような元

$$(c_{m-j}(E))_j \in \bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{2m-2j}(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$$

は一意に存在する. この $c_j(E) \in H^{2j}(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}})$ たちのことを E の **Chern 類**と呼ぶ.

5.2 普遍 Chern 類と Chern 類写像

$$\mathrm{Ch}(BGL_n) := H^0(BGL_n, \mathbb{Z}) \times \{(x_j)_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \in \prod_{j\geq 0} H^{2j}(BGL_n, \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}) \mid x_0 = 1\}$$

とおく. これは cup 積を乗法と定めれば, 2項 λ- 環 $H^0(BGL_n, \mathbb{Z})$ による augmentation 付きの special λ- 環である. Chern 類を使って 2項 λ- 環 $H^0(BGL_n, \mathbb{Z})$ による augmentation 付きの special λ- 環の準同型を

$$c : K_0(BGL_n) \ni [E] \longmapsto (\mathrm{rank}E, c_0(E), c_1(E), \dots) \in \mathrm{Ch}(BGL_n)$$

と定義する. ここでもちろん $[E]$ はベクトル束 E の $K_0(BGL_n)$ での類を表す. BGL_n 上の rank n の普遍ベクトル束及び自明なベクトル束を各々 $E^n, 1^n$ と書き,

$$u := \{[E^n] - [1^n]\}_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_n K_0(BGL_n) = K_0(BGL)$$

と定める. 以上のもとで **普遍 Chern 類** $c_j^{(n)}$ を

$$c(u) = (0, c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \dots) \in \mathrm{Ch}(BGL_n)$$

となるものとして定義する.

X を前述の通り $\mathbb{Q}$ 上の quasi-projective 多様体としよう. この普遍 Chern 類 $\{c_j^{(n)}\}_n$ に 5.1 の構成を適用して得られる写像

$$c_{i,j} : K_i(X) \longrightarrow H^{2j-i}(X, \textstyle\bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}), \quad i, j \geq 0$$

が **Chern 類写像** である.

5.3 Chern 指標と regulator 写像

さていよいよ大詰めにかかる. Chern 類写像を使って

$$\mathrm{ch} : K_i(X) \ni x \longmapsto \begin{cases} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} c_{i,j}, & i \geq 1 \text{ のとき} \\ \mathrm{ch}_{0,0} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \tilde{c}_{0,j}, & i = 0 \text{ のとき} \end{cases} \in \bigoplus_{j\geq 0} H^{2j-i}(X, \textstyle\bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}),$$

$$\mathrm{ch}_{0,0} : K_0(X) \xrightarrow{\mathrm{rank}} H^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \textstyle\bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}}),$$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \tilde{c}_{0,j} t^j = \log\Bigl(1 + \sum_{j\in\mathbb{N}} c_{0,j} t^j\Bigr)$$

と **Chern 指標** ch を定義する. この Chern 指標は実は Adams 作用や K- 群の積と可換であり, 従って絶対 cohomology の構成とも可換になる:

$$\mathrm{ch}_{\mathcal{A}} : H^{\bullet}_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H^{\bullet}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Q}(j)).$$

これの “実部” を取ることによりとうとう **regulator 写像**:

$$\mathrm{reg} : H^{\bullet}_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H^{\bullet}_{\mathcal{A}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Q}(j)) \xrightarrow{\mathrm{ch}_{\mathcal{A}}} H^{\bullet}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

が得られた.

6 Bloch-Beilinson 予想

前章の考察により Deligne cohomology の $\mathbb{Q}$- 構造を reg の像として定義し, 前章の冒頭で述べた構成をすることにより Bloch-Beilinson の予想を得る:

予想 6.1 (Bloch-Beilinson) 簡単のため m が $\frac{i}{2}$ より小さい時を考える. $n := i + 1 - m$ であった.

(Conj.1) reg : $H^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, \mathbb{Q}(n)) \otimes \mathbb{R} \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n))$ は同型を与える. 従って絶対 *cohomology* の $\mathbb{Q}$- 構造を持っていくことにより $H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n))$ に $\mathbb{Q}$- 構造が入る.

(Conj.2) 基本完全系列 *(3.3)* から従う同型:

$$\wedge^{max} F^n H^i_{DR}(X_{/\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \wedge^{max} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \xrightarrow{\sim} \wedge^{max} H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))^{(-1)^{n-1}}$$

の左辺に *(Conj.1)* と *de Rham cohomology* の $\mathbb{Q}$- 構造から定まる $\mathbb{Q}$- 構造を入れ, 右辺には係数の $\mathbb{Q}$- 構造から定まる $\mathbb{Q}$- 構造を入れる. この右辺と左辺の $\mathbb{Q}$- 構造の比 $c_M(m) \in \mathbb{R}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$ を M あるいは X の ***regulator*** という. このとき $L_i(X, s)$ の $s = m$ での *Laurent* 展開の 0 でない最低次の係数は $c_M(m)$ の有理数倍である.

7 Modular 曲線に対する Bloch-Beilinson 予想

この原稿の残りの部分では modular 曲線に対する Bloch-Beilinson 予想の Beilinson 自身による証明を紹介する. まずは modular 曲線を我々の使う形で復習しておく.

$G = GL(2)_{\mathbb{Q}}$ とし, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\infty \oplus \mathbb{A}_f$ で $\mathbb{Q}$ の adele 環を表す. $G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K を1つ固定する. $\mathfrak{H}^\pm := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とすれば $G(\mathbb{Q})$ は $\mathfrak{H}^\pm$ に一次分数変換で作用する. このとき K に対応した $\mathbb{Q}$ 上の modular 曲線の $\mathbb{C}$- 有理点のなす複素解析多様体は

$$M_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{H}^\pm \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

で与えられる. 実際にはこの M_K にいくつかの尖点をつけ加えてコンパクト化したもの $\overline{M}_K = M_K \cup M_K^\infty$ (M_K^∞ は尖点の集合) を考察する. $\overline{M}_K$ はなめらかな射影曲線である. この $\overline{M}_K$ に対する予想 6.1 は次のようになる.

予想 7.1

(Conj.1) reg : $H^2_{\mathcal{A}}(\overline{M}_K, \mathbb{Q}(2)) \otimes \mathbb{R} \to H^2_{\mathcal{D}}(\overline{M}_{K,/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2))$ は同型を与える. これにより $H^2_{\mathcal{D}}(\overline{M}_{K,/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2))$ に $\mathbb{Q}$- 構造が入る.

(Conj.2) 基本完全系列 *(3.3)* による同型

$$\wedge^{max} F^2 H^1_{DR}(X_{/\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \wedge^{max} H^2_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2)) \xrightarrow{\sim} \wedge^{max} H^1_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-1))^-$$

の左辺に *(Conj.1)* と *de Rham cohomology* の $\mathbb{Q}$- 構造から定まる $\mathbb{Q}$- 構造を, 右辺には係数の $\mathbb{Q}$- 構造から定まる $\mathbb{Q}$- 構造を入れる. *Regulator* $c_M(0) \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times$ を右辺と左辺の $\mathbb{Q}$- 構造の比と定義したとき, $L_1(X, s)$ の $s = 0$ での *Laurent* 展開の 0 でない最低次の係数は $c_M(0)$ の有理数倍である.

8 保型形式への帰着

次に行うべきはこの予想 7.1 をある保型形式の問題へと帰着することである. そのために (1) modular symbol による K- 群の元の構成, (2) Hecke 対応による $L_1(\overline{M}_K, s)$ の automorphic L-function への分解, (3) reg の具体的な表示, の3つが必要である. これらを順に解説していこう.

8.1 Modular symbol

まず扱う絶対 cohomology が $H^2_{\mathcal{A}}(\overline{M}_K, \mathbb{Q}(2))$ であり, これが $H^2_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}(\overline{M}_K), \mathbb{Q}(2)) \subset K_2(\mathbb{C}(\overline{M}_K))$ に含まれている点に注意する. というのも K- 群は一般には得体の知れないものだが, K_2 の元は symbol による表示を持つからである:

$$K_2(\mathbb{C}(\overline{M}_K)) = \mathbb{C}(\overline{M}_K)^\times \times \mathbb{C}(\overline{M}_K)^\times \big/ \{f \otimes (1-f) \mid f \in \mathbb{C}(\overline{M}_K)^\times, \neq 1\}.$$

ここでもちろん $\mathbb{C}(\overline{M}_K)$ は $\overline{M}_K$ の $\mathbb{C}$ 上の関数体である. $f, g \in \mathbb{C}(\overline{M}_K)^\times$ に対して $f \otimes g$ の $K_2(\mathbb{C}(\overline{M}_K))$ での像を $\{f, g\}$ と書く (**modular symbol**, f, g が meromorphic modular form なのでこう呼ばれる).

次に modular 単数を導入する. $K' \subset K$ を勝手なコンパクト開部分群とし, それに関する modular 曲線をやはり $M_{K'}$ と書く. $M_{K'}$ は M_K の etale 被覆になっていて, K' が K の正規部分群なら K/K' を Galois 群とする Galois 被覆である. この etale 被覆写像を $\pi_{K'/K} : M_{K'} \to M_K$ と書く. $\mathcal{O}_{K'}^{\times}$ で $M_{K'}$ 上の零点を持たない正則保型形式, すなわち **modular 単数** のなす乗法群を表す. $\mathcal{O}_{K'}^{\times}$ の 2 つの元の symbol の形で書ける $K_2(\mathbb{C}(\overline{M}_{K'}))$ の元の集合を $\{\mathcal{O}_{K'}^{\times}, \mathcal{O}_{K'}^{\times}\}$ と書く. このとき $K_2(\mathbb{C}(\overline{M}_K))$ の中で

$$\mathcal{Q}_{K'} := H^2_{\mathcal{A}}(\overline{M}_{K'}, \mathbb{Q}(2)) \cap \{\mathcal{O}_{K'}^{\times}, \mathcal{O}_{K'}^{\times}\}$$

とし, これを使って

$$\mathcal{P}_K := \bigcup_{K' \subseteq K} (\pi_{K'/K})_* \mathcal{Q}_{K'}$$

と定義する. 以上の準備のもとで Beilinson は次の定理を証明した.

定理 8.1 (Beilinson)

(1) 予想 *7.1* の *(Conj.1)* の同型は言えないが, しかし reg は *Deligne cohomology* に $\mathbb{Q}$-構造を入れるには十分である. すなわち $\mathcal{P}_K \subset H^2_{\mathcal{A}}(\overline{M}_K, \mathbb{Q}(2))$ を上の通りとしたとき, $\mathrm{reg}(\mathcal{P}_K)$ は $H^2_{\mathcal{D}}(\overline{M}_{K,/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2))$ の $\mathbb{Q}$- 構造になっている.

(2) 今の場合 $F^2 H^1_{DR}(\overline{M}_K(\mathbb{C})) = 0$ であるから

$$c_M(0) = \det(\mathrm{reg}(\mathcal{P}_K)) / \det(H^1_B(\overline{M}_K, \mathbb{Q}(1))^-).$$

(3) $\overline{M}_K$ の種数を g とすれば, よく知られているように $L_1(\overline{M}_K, s)$ は $s = 0$ で g 位の極を持つ. そこで $L_1(\overline{M}_K, s)$ の g 階微分を $L_1^{(g)}(\overline{M}_K, s)$ と書けば, $L_1^{(g)}(\overline{M}_K, 0)$ は $c_M(0)$ の有理数倍である.

8.2 Hecke 対応による問題の分解

$\mathcal{H}_K$ で $G(\mathbb{A}_f)$ の K に対する $\bar{\mathbb{Q}}$-valued の Hecke 環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\bar{\mathbb{Q}}}$ を表す. $G(\mathbb{A}_f)$ の $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の smooth な許容表現 (π, V_π) に対して $\mathcal{H}_K$- 加群 V_π^K (V_π の K- 不変部分) が対応し, 全ての既約 $\mathcal{H}_K$- 加群は $G(\mathbb{A}_f)$ の既約 smooth 表現からこのようにして得られることに注意する. さて $\overline{M}_K$ 上の 1 次の微分形式の空間 $\Omega^1_{\overline{M}_K}$ には $\mathbb{Q}$-valued Hecke 環が Hecke 対応で作用している. 従って $\Omega^1_{\overline{M}_K, \bar{\mathbb{Q}}} = \Omega^1_{\overline{M}_K} \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ は $\mathcal{H}_K$- 加群になる. これを

$$\Omega^1_{\overline{M}_K, \bar{\mathbb{Q}}} = \bigoplus_{\pi \in \Pi_K} V_\pi^K$$

と既約分解し, 各既約成分への射影を

$$e_\pi^K : \Omega^1_{\overline{M}_K, \bar{\mathbb{Q}}} \longrightarrow V_\pi^K$$

と書く.

この分解を使って定理 8.1 の (2) と (3) を保型形式の言葉に書き直そう. $\bar{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込み σ を 1 つ固定するごとに $\pi \in \Pi_K$ は $G(\mathbb{A}_f)$ の保型表現 $\pi^\sigma := \pi \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}, \sigma} \mathbb{C}$ を与える.

π^σ に対しては Jacquet-Langlands により standard L-関数 $L(s,\pi^\sigma)$ が与えられていた．そこで $\pi \in \Pi_K$ の standard L-関数を

$$L(s,\pi) := \prod_{\sigma:\bar{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}} L(s-1/2,\pi^\sigma)$$

と定義しよう．このとき Eichler, 志村, 井草, Langlands, Deligne それに Carayol らの研究により

$$L_1(\overline{M}_K,s) = \prod_{\pi\in\Pi_K} L(s,\tilde{\pi})^{\dim V_\pi^K} \tag{8.1}$$

が知られている．ここで $\tilde{\pi}$ は π の反傾表現である．保型表現の standard L-関数の極は高々1位であることに注意すれば

$$L_1^{(g)}(\overline{M}_K,0) = \prod_{\pi\in\Pi_K} L'(0,\tilde{\pi})^{\dim V_\pi^K} \bmod \mathbb{Q}^\times$$

だから，定理 8.1 の (2), (3) が成り立つためには各 $\pi \in \Pi_K$ に対して

$$(e_\pi^K)^*[\mathrm{reg}(\mathcal{P}_K\otimes\bar{\mathbb{Q}})] = L'(0,\tilde{\pi})(e_\pi^K)^*H_B^1(\overline{M}_K,\bar{\mathbb{Q}}(1))^- \tag{8.2}$$

が言えれば十分である．

次に保型形式の Deligne 周期を思い出す．$F^2H_{DR}^1(\overline{M}_K(\mathbb{C}))=0$ から $H_{\mathcal{D}}^2(\overline{M}_{K,/\mathbb{R}},\mathbb{R}(2)) \simeq H_B^1(\overline{M}_K,\mathbb{R}(1))^- \simeq \mathrm{Hom}(\Omega^1_{\overline{M}_K},\mathbb{R})$ である．従って図式

$$\begin{array}{ccc}
(e_\pi^K)^*H_B^1(\overline{M}_K(\mathbb{C}),\bar{\mathbb{Q}}\otimes\mathbb{R}(1))^- & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(V_\pi^K,\bar{\mathbb{Q}}\otimes\mathbb{R}) \\
\cup\uparrow & & \uparrow\cup \\
(e_\pi^K)^*H_B^1(\overline{M}_K(\mathbb{C}),\bar{\mathbb{Q}}(1))^- & & \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(V_\pi^K,\bar{\mathbb{Q}})
\end{array}$$

が成り立つ．この図式の下の行に書かれた 2 つの $\bar{\mathbb{Q}}$-構造の比 $c^+(\pi) \in \mathbb{C}^\times/\bar{\mathbb{Q}}^\times$ を π の **Deligne 周期** という:

$$(e_\pi^K)^*H_B^1(\overline{M}_K(\mathbb{C}),\bar{\mathbb{Q}}(1))^- = c^+(\pi)\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(V_\pi^K,\bar{\mathbb{Q}}).$$

これから (8.2) は

$$(e_\pi^K)^*[\mathrm{reg}(\mathcal{P}_K\otimes\bar{\mathbb{Q}})] = c^+(\pi)L'(0,\tilde{\pi})\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}}(V_\pi^K,\bar{\mathbb{Q}}) \tag{8.3}$$

と書き直される．

8.3 $(e_\pi^K)^*[\mathrm{reg}(\mathcal{P}_K\otimes\bar{\mathbb{Q}})]$ の具体的な表示

$u,\ v \in \mathcal{O}_K^\times$ を取る．Poincaré 双対性:

$$\langle\ ,\ \rangle_K : H_B^1(\overline{M}_K(\mathbb{C}),\bar{\mathbb{Q}}\otimes\mathbb{R}(1))^- \times \Omega^1(\overline{M}_K)\otimes\bar{\mathbb{Q}} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}\otimes\mathbb{R}$$

から $\mathrm{reg}(\{u,v\})$ を決めるには $\langle\mathrm{reg}(\{u,v\}),\omega\rangle_K$ ($\omega\in\Omega^1(\overline{M}_K)\otimes\bar{\mathbb{Q}}$) を計算すれば十分である．これは今の場合には

$$\langle\mathrm{reg}(\{u,v\}),\omega\rangle_K = \frac{1}{2\pi i}\int_{M_K(\mathbb{C})} \log|u|\,\overline{d\log v}\wedge\omega$$

で与えられる．これを (8.3) と合わせて結局定理 8.1 を示すためには次を言えば十分である．

定理 8.2

$$\left\{ \int_{M_K(\mathbb{C})} \log|u| \overline{d \log v} \wedge \omega \;\middle|\; \begin{matrix} u, v \in \mathcal{O}_K^\times \\ \omega \in V_\pi^K \end{matrix} \right\} = 2\pi i c^+(\pi) L'(0, \tilde{\pi}) \cdot \bar{\mathbb{Q}}.$$

9 定理 8.2 の証明

まず両辺を保型 L-関数の言葉に直すことから始めよう.

右辺では Deligne 周期 $c^+(\pi)$ を L-関数の言葉で書く必要がある. $\mathbb{Q}$ の Dirichlet 指標 χ であって $L(s, \pi \otimes \chi)$ が $s=1$ で極も零点も持たないようなものをひとつ取る. このようなものは存在する. $L(s,\chi)$ の root number $\varepsilon(s,\chi)$ は s に関する指数関数であり, その整数 $s = m \in \mathbb{Z}$ での値 $\varepsilon(\chi)$ は m によらず Gauss 和になることが知られている. さらに $\varepsilon(\chi)$ は乗法性 $\varepsilon(\chi_1\chi_2) = \varepsilon(\chi_1)\varepsilon(\chi_2)$ を満たす. このとき保型形式の motive に対する Deligne の予想 (cf. 3.1. [1] で証明されている.) から

$$L(1, \pi \otimes \chi) = c^+(\pi \otimes \chi)$$

である. ところが $\pi \otimes \chi$ の motive の de Rham 実現は $\varepsilon(\chi)$ で生成されている ([1], 6.3) から $c^+(\pi \otimes \chi) = \varepsilon(\chi) c^+(\pi)$ であり, 従って

$$c^+(\pi) = \frac{L(1, \pi \otimes \chi)}{\varepsilon(\chi)} \tag{9.1}$$

である.

次に $L(s,\pi)$ は保型 L-関数を 1/2 だけシフトしたものだったから $s \to 2-s$ で関数等式を持つ:

$$L(s,\pi) = \varepsilon(s,\pi) L(2-s, \tilde{\pi}).$$

これから

$$L'(0, \tilde{\pi}) = \frac{L(2,\pi)}{\pi^2 \varepsilon(2,\pi)}$$

だが, 今の場合 ω_π 自体が Dirichlet 指標なので $\varepsilon(2,\pi) = \varepsilon(\omega_\pi)$ である. これと Artin motive に対する Deligne の予想 ([1] 6.7):

$$\pi^2 \varepsilon(\omega_\pi \chi) = L(\omega_\pi \chi, 2)$$

から, 結局右辺は

$$\begin{aligned} c^+(\pi) L'(0, \tilde{\pi}) &= \frac{L(1, \pi \otimes \chi)}{\varepsilon(\chi)} \frac{L(2,\pi)}{\pi^2 \varepsilon(\omega_\pi)} = \frac{L(1, \pi \otimes \chi) L(2,\pi)}{\varepsilon(\omega_\pi \chi)} \\ &= \frac{L(2,\pi) L(1, \pi \otimes \chi)}{L(2, \omega_\pi \chi)} \end{aligned} \tag{9.2}$$

となる.

次に左辺を変形するために Eisenstein 級数を用意する. $B = TU$ で G の上三角元たちからなる Borel 部分群を表す.

$$\phi := \mathrm{div} u,\ \xi := \mathrm{div} v : \left(M_K^\infty(\mathbb{C}) = \pm U(\hat{\mathbb{Z}}) \backslash G(\hat{\mathbb{Z}}) / K \right) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$$

を使って

$$\hat{\phi}_s : G(\mathbb{A}_f) \ni g = utk \longrightarrow |\alpha(t)|^s_{\mathbb{A}_f}\phi(k) \in \bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C},$$
$$\hat{\xi}_s : G(\mathbb{A}_f) \ni g = utk \longrightarrow |\alpha(t)|^s_{\mathbb{A}_f}\xi(k) \in \bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$$

と定義する. これに関する Eisenstein 級数を $\mathrm{Re}(s) > 1$ では

$$\mathcal{E}_\phi(z, g; s) := -2\pi \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})^+ \backslash G(\mathbb{Q})} \hat{\phi}_s(\gamma g)\mathrm{Char}_{\mathfrak{H}^+}(\gamma z)$$
$$\mathcal{E}_\xi(s, g; s) := -2\pi \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})^+ \backslash G(\mathbb{Q})} \hat{\xi}_s(\gamma g)\mathrm{Char}_{\mathfrak{H}^+}(\gamma z)$$

で与えられる有理型関数と定める. ここで $B(\mathbb{Q})^+$ は $B(\mathbb{Q})$ の行列式が正の元たちのなす群であり, $\mathrm{Char}_{\mathfrak{H}^+}$ は上半平面 $\mathfrak{H}^+$ の特性関数である. これらは次を満たす.

- $\mathcal{E}_\phi(z, g; 1) - \log|u|$ は局所定数 ($\mathcal{E}_\phi(z, g; 1) - (-2\pi\mathrm{Im}(z))\phi(k)$ が有界なことから).
- $\eta_\xi := 2\partial_z \mathcal{E}_\xi(z, g; 1) = d\log v$.

これらを使って定理の左辺を変形しよう. まず $\mathrm{Re}(s) > 1$ で考えて, Eisenstein 級数の定義から

$$\begin{aligned}
\int_{M_K(\mathbb{C})} \mathcal{E}_\phi(z, g; s)\overline{\eta_\xi(s)} \wedge \omega &= \int_{G(\mathbb{Q})\backslash \mathfrak{H}^\pm \times G(\mathbb{A}_f)/K} \mathcal{E}_\phi(z, g; s)\overline{\eta_\xi(s)} \wedge \omega(z, g) \\
&= \int_{B(\mathbb{Q})^+\backslash \mathfrak{H}^\pm \times G(\mathbb{A}_f)/K} -2\pi\hat{\phi}_s(g)\mathrm{Char}_{\mathfrak{H}^+}(z)^s\overline{\eta_\xi(s)} \wedge \omega(z, g)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

を得る. 次に非自明な指標 $\psi : \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^1$ を $\psi(x) = e^{2\pi i x}$ $(x \in \mathbb{R})$ となるように選び, それに関する $\eta_\xi(s)$ 及び ω の Whittaker 関数を各々 $W^\psi_\eta(g)$, $W^\psi_\omega(g)$ とおく. このとき $\eta_\xi(s)$ と ω の Fourier 展開は

$$\eta_\xi(s; z, g) = \sum_{b \in \mathbb{Q}_{>0}} W^\psi_\eta\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)e^{2\pi i b z} + (\text{定数項})$$
$$\omega(z, g) = \sum_{a \in \mathbb{Q}_{>0}} W^\psi_\omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)e^{2\pi i a z}$$

で与えられ, 従って

$$\begin{aligned}
&\overline{\eta_\xi(s)} \wedge \omega(z, g) \\
&= \overline{\left(\sum_{b \in \mathbb{Q}_{>0}} W^\psi_\eta\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)d(e^{2\pi i b z}) + (\text{定数項})\right)} \wedge \sum_{a \in \mathbb{Q}_{>0}} W^\psi_\omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)d(e^{2\pi i a z})
\end{aligned}$$

である. これを (9.3) に代入すると, 実軸方向の積分において $a = b$ でない項は全て消えてしまうので, 結局 $\mathrm{Re}(s) > 1$ で (9.3) は

$$\int_{B(\mathbb{Q})^+\backslash \mathfrak{H}^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K} - 2\pi\hat{\phi}_s(g)z^s \sum_{a \in \mathbb{Q}_{>0}} \overline{W^\psi_\eta\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)}W^\psi_\omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\overline{d(e^{2\pi i a z})} \wedge d(e^{2\pi i a z})$$

$x := \mathrm{Re}(z),\, y := \mathrm{Im}(z)$ とおいて変数変換して

$$= \int_{B(\mathbb{Q})^+\backslash\mathfrak{H}^+\times G(\mathbb{A}_f)/K} 16\pi^3 i\hat{\phi}_s(g)y^s \sum_{a\in\mathbb{Q}_{>0}} \overline{W_\eta^\psi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)} W_\omega^\psi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)$$

$$e^{-4\pi ay}\, dax \wedge day$$

$$= 16\pi^3 i \int_{U(\mathbb{Q})Z(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{H}^+\times G(\mathbb{A}_f)/K} \hat{\phi}_s(g)y^s\overline{W_\eta^\psi(g)}W_\omega^\psi(g)e^{-4\pi y}\, dx \wedge dy$$

$$= \pi\frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s-1}}[G(\hat{\mathbb{Z}}) : \pm K] \int_{U(\mathbb{A}_f)Z(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)} \hat{\phi}_s(g)\overline{W_\eta^\psi(g)}W_\omega^\psi(g)\, dg \tag{9.4}$$

となる. これに岩沢分解の積分公式を使って

$$\int_{M_K(\mathbb{C})} \mathcal{E}_\phi(z,g;s)\overline{\eta_\xi(s)} \wedge \omega \tag{9.5}$$

$$\pi\frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s-1}}[G(\hat{\mathbb{Z}}) : \pm K] \int_{G(\hat{\mathbb{Z}})}\int_{\mathbb{A}_f} \phi(k)W_\omega^\psi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} k\right)\overline{W_\eta^\psi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} k\right)}|a|_{\mathbb{A}_f}^{s-1}\, da^\times\, dk$$

を得る.

ここで右辺の積分は Rankin-Selberg convolution による L- 関数 $L(s+1/2, \pi\times\overline{\pi}_\eta)$ の積分表示 ([3] の Introduction を参照. 我々の保型 L- 関数は 1/2- シフトしたものであることに注意.) になっていることに注意する. ただし π_η は η_ξ の属する保型表現で

$$\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{A}_f)}^{G(\mathbb{A}_f)}[|\ |_{\mathbb{A}_f}^{1/2} \otimes \chi|\ |_{\mathbb{A}_f}^{-1/2} \otimes \mathbf{1}_{U(\mathbb{A}_f)}]$$

に同型である. $\overline{\pi}_\eta$ は π_η の複素共役を表している. よって [3] に示されているとおり, (9) の右辺の積分は

$$\frac{L(s+1/2, \pi\times\overline{\pi}_\eta)}{L(2(s+1/2)+1, \omega_\pi\omega_{\overline{\pi}_\eta})} = \frac{L(s+1/2, \pi\otimes|\ |_{\mathbb{A}_f}^{1/2})L(s+1/2, \pi\otimes\overline{\chi}|\ |_{\mathbb{A}_f}^{-1/2})}{L(2(s+1/2)-1, \omega_\pi\overline{\chi})}$$
$$= \frac{L(s+1, \pi)L(s, \pi\otimes\overline{\chi})}{L(2s, \omega_\pi\overline{\chi})}$$

を共通分母に持つ. 特に $s=1$ に持っていけば

$$\int_{M_K(\mathbb{C})} \log|u|\overline{d\log v} \wedge \omega \in 2\pi i\frac{L(2,\pi)L(1,\pi\otimes\overline{\chi})}{L(2,\omega_\pi\overline{\chi})}\cdot\bar{\mathbb{Q}} \tag{9.6}$$

が得られる. この (9.6) と (9.2), それに χ が偶指標であったことより, 定理 8.2 の証明の概説を終える.

References

[1] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'integrales*, in Automorphic Forms, Representations, and L-functions, Proc. Sympos. in Pure Math. **33** Vol. 2, pp. 313–346, AMS, 1979.

[2] H. Hiller, *λ-rings and algebraic K-theory*, J. Pure Appl. Algebra **20** (1981), pp. 241–266.

[3] H. Jacquet, Automorphic Forms on $GL(2)$. Part II, Lect. Notes in Math. **278**, Springer (1972).

[4] C. Kratzer, *λ-structure en K-théorie algébrique*, Comment. Math. Helevetici **55** (1980), pp. 233–254.

[5] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*, in Algebraic K-theory I, Lect. Notes in Math. **341**, pp. 85–147.

[6] M. Rapoport, N. Schappacher and P. Schneider ed., Beilinson's Conjectures on Special Values of L-functions, Perspectives in Math. Vol. 4, Academic Press, 1988.

[7] W.K. Seiler, *λ-rings and Adams operations in algebraic K-theory*, in [6].