数理解析研究所講究録
967 巻 1996 年 142-154

持ち上げ問題とリーマン面上の単純分割閉曲線の特徴付け

金沢大学工学部　奥村善英 (Yoshihide OKUMURA)

Abstract

一次変換群 $M(\hat{\mathbf{C}})$ の部分群から行列群 $SL(2,\mathbf{C})$ への持ち上げの存在定理と持ち上げの性質を考察する。この議論の応用として、リーマン面上の単純分割閉曲線が、この曲線に対応する行列のトレースの符号で、特徴付けできることを報告する。

0 前置き

筆者は、フックス群をいくつかの元のトレースの値で具体的に構成し、タイヒミュラー空間の座標付けを考察していた。その際、フックス群を行列群 $SL(2,\mathbf{C})$ の部分群に持ち上げることを思いついた。

この持ち上げの性質を調べていると、リーマン面上の単純閉曲線が「分割している」という位相的性質が、このリーマン面を表現するフックス群の解析的性質から判断できることが分かった。詳しくは、この曲線に対応するフックス群の元を持ち上げた行列を考え、そのトレースの符号で特徴付けできることを発見した。

第一節では、一次変換群の持ち上げ問題について説明する。第二節では、フックス群の持ち上げの存在定理の略証を行い、持ち上げの個数を考える。第三節では、トレース不等式による持ち上げの性質を調べる。この応用として、第四節では、リーマン面上の単純分割閉曲線の特徴付けを行う。

1 持ち上げ問題

行列群 $SL(2,\mathbf{C})$ から一次変換群 $M(\hat{\mathbf{C}})$ への自然な準同型

$$p:\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

は射影といわれ、$g \in M(\hat{\mathbf{C}})$ にたいし、$p(\tilde{g}) = g$ となる $\tilde{g} \in SL(2,\mathbf{C})$ は g の行列表現といわれる。当然、各 g には、二つの行列表現 $\pm\tilde{g}$ が対応している。さて、$M(\hat{\mathbf{C}})$ の部分群 G にたいし、各元の二つの行列表現の一方を上手に選び、これら全体が G と同型な群になるとき、つまり、ある同型写像$\varphi : G \to \varphi(G) \subset SL(2,\mathbf{C})$ で$p \circ \varphi = identity$ を満たすものが存在するとき、G は持ち上げ可能といわれる。このとき、φ は持ち上げ写像といわれ、$\varphi(G), \varphi(g)$ はそれぞれG の持ち上げ、g の持ち上げといわれる。

例えば、G が

$$< g_1, g_2, \cdots, g_n \mid w_1(g_1, g_2, \cdots, g_n) = \cdots = w_m(g_1, g_2, \cdots, g_n) = identity >$$

(ただし、$1 \leq n \leq \infty, 0 \leq m \leq \infty$) と表示されると、

Theorem 1. 1 この G が持ち上げ可能であることと、G の各生成元の行列表現 $\tilde{g}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ を

$$w_k(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_n) = I \ (0 \leq k \leq m)$$

(ただし、I は単位行列) を満たすようにとれることは同値となる。

実際、上式を満たす G の各生成元の行列表現がとれると、G の任意の元を $F(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ と表示するとき、行列表現$F(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_n)$ を対応させることで、G の (一つの) 持ち上げ写像が定義できる。

この定理から、G が自由群の場合には持ち上げの存在は自明となるが、関係子をもつ群の場合には、持ち上げの存在は明らかといえない。簡単な例を一つあげる。

Example 1. 2 n を 2 以上の自然数として、位数 n の楕円型変換$g(z) = e^{2\pi i/n}z$ を考える。このとき、g の行列表現

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} -e^{\pi i/n} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi i/n} \end{pmatrix}$$

にたいしては、$(-\tilde{g})^n = -I$ かつ $(\tilde{g})^n = (-1)^{n+1}I$ となるので、群 $< g \mid g^n = identity >$ が持ち上げ可能であることと、g の位数 n が奇数であることは同値になる。さらに、この場合には、群に位数 2 の元はなく、g の持ち上げはトレースが負の行列表現となる。

一つの群が持ち上げ不可能ならば、これと同型な群そして拡大群も持ち上げ不可能なので、この例から、次のことが容易に分かる。

Lemma 1. 3 位数 2 の楕円型変換を含む群は、持ち上げ不可能となる。

一般に、与えられた群の表示を求めることが困難なように、持ち上げ可能であるかの判定は容易ではない。これから、次の問題が自然に考えられる。

Problem 1. 4 (i)$M(\hat{\mathbf{C}})$ の部分群 G はいつ持ち上げ可能か?
(ii)G が持ち上げ可能のとき、どのような特徴を持つのか？

問題 (i) に関しては、今世紀初頭から、（多くは、種数 $q(\geq 2)$ のコンパクト・リーマン面を表現する）フックス群 G の場合について、多くの研究者達一 Fricke-Klein [5], Petersson [16], Siegel [18], Milnor [8], Hawley-Schiffer [6], Faltings [4], Abikoff-Appel-Schupp [1], Dyer-Lewittes [3] 一により互いに独立に（他人の結果を知らずに）周期的に再発見されてきたことが、Kra [7] に詳しく載っている。危うく、筆者も再発見組に入るところであった。I. Kra は、彼らの結果を拡張して、一つの不変成分を持つクライン群である関数群について、次の主張を得ている。

Theorem 1. 5 (Kra [7]) 有限生成関数群にたいしては、持ち上げ可能であることと、位数 2 の楕円型変換を含まないことは同値となる。

この定理は、さまざまな解析的手法を用いて証明されている。その後、M. Culler は、被覆空間の議論を用いて、より単純で直接的な方法により、次の拡張された結果を報告している。

Theorem 1. 6 (Culler [2]) $M(\hat{\mathbf{C}})$ の離散部分群にたいしては、持ち上げ可能であることと、位数 2 の楕円型変換を含まないことは同値となる。

これから、$M(\hat{\mathbf{C}})$ の離散部分群については、補題 1.3 の条件が持ち上げの唯一の障害になった。

さらに、Culler [2] は、より一般的な持ち上げの問題を考察しているが、問題 1.4 (ii) に関しては報告していない。

2 フックス群の持ち上げ

この節では、フックス群の持ち上げの存在定理の略証を行い、持ち上げの個数を調べる。

フックス群は、位数 2 の楕円型変換 $g_1(z) = -1/z$ と双曲型変換 $g_2(z) = \lambda z$ $(\lambda > 1)$ で生成される群 $< g_1, g_2 >$ と共役または巡回群になるとき、初等的といわれる。この場合には、問題 1.4 は自明となるので、以下、非初等的なフックス群のみを考えることにする。

フックス群の持ち上げ問題については、定理 1.6 より、次の系が得られる。

Corollary 2. 1 有限生成フックス群にたいしては、持ち上げ可能であることと、位数 2 の楕円型変換を含まないことは同値となる。

この系の証明の概略を述べる前に、記号をいくつか説明する。

G を上半平面 $\mathbf{H}$ に作用する有限生成フックス群とする。一意化定理より、G が表現するリーマン面 $\mathbf{H}/G$ は位相的有限型となり、種数が $q(\geq 0)$ で $r(\geq 0)$ 個の位数が $\nu_1, \cdots, \nu_r$ の分岐点を持つコンパクト・リーマン面から $s(\geq 0)$ 個の点と $t(\geq 0)$ 個の閉円板を除いて得られる面と等角同値になる。このようなフックス群そしてリーマン面は、$(q, r, s, t; \nu_1, \cdots, \nu_r)$ 型（略して、(q, r, s, t) 型）といわれる。このとき、G の標準生成元系は

$$(A_1, B_1, \cdots, A_q, B_q, D_1, \cdots, D_r, P_1, \cdots, P_s, E_1, \cdots, E_t);$$

$$E_t \cdots E_1 P_s \cdots P_1 D_r \cdots D_1 C_q \cdots C_1 = identity,$$

$$D_i^{\nu_i} = identity \ \ (i = 1, \cdots, r)$$

（ただし、A_j と B_j の交換子を $C_j = B_j^{-1} A_j^{-1} B_j A_j$ とする）と表される。

筆者は[9] と [10] において、各生成元にたいし、トレースが正でない行列表現を $\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \cdots, \tilde{E}_t$ とおくと、

$$\tilde{E}_t \cdots \tilde{E}_1 \tilde{P}_s \cdots \tilde{P}_1 \tilde{D}_r \cdots \tilde{D}_1 \tilde{C}_q \cdots \tilde{C}_1 = I, \qquad (*)$$

$$\tilde{D}_i^{\nu_i} = (-1)^{\nu_i + 1} I \ \ (i = 1, \cdots, r)$$

（ただし、$\tilde{C}_j = \tilde{B}_j^{-1} \tilde{A}_j^{-1} \tilde{B}_j \tilde{A}_j$ とする）が成り立つことを示した。これから、定理 1.1 より、ν_i がすべて奇数、つまり、G が位数 2 の楕円型変換を含まなければ、G の持ち上げの存在が分かる。よって、補題 1.3 から、系 2.1 の結論が得られる。

♡

次に、フックス群の持ち上げ（写像）の個数を考える。明らかに、持ち上げ写像は、標準生成元系の各生成元の像から一意に決まる。上の略証では、各生成元にトレースが負の行列表現を対応させることで、一つの持ち上げ写像を構成した。定理 1.1 より、これらの行列表現を、(*) と

$$\tilde{D}_i^{\nu_i} = I \quad (i = 1, \cdots, r)$$

を満たすように、トレースが正の行列表現に変更できるかを調べることで、次の主張が得られる。

Theorem 2. 2 G を位数 2 の楕円型変換を含まない有限生成フックス群とする。このとき、G の持ち上げ（写像）の個数は、
(i)G が $(q, r, 0, 0)$ 型のとき、2^{2q} 個、
(ii)G が (q, r, s, t) 型 $(s + t \geq 1)$ のとき、$2^{2q+s+t-1}$ 個、
となる。

例 1.2 より、楕円型生成元はトレースが負の行列表現にのみ対応するので、持ち上げの個数に影響を与えないことが分かる。特に、G が $(0, r, 0, 0)$ 型の場合には、持ち上げの個数は 1 個となる。$(q, 0, 0, 0)$ 型のときの持ち上げの個数は、Seppälä-Sorvali [17] により、最初に報告された。$s + t \geq 1$ のときには、標準生成元系の最後の生成元の像は、これ以外の生成元の像と (*) から一意に定まることが分かる。

3　トレース不等式

問題 1.4 (ii) に関して、I. Kra は、次の問題を提出している。

Problem 3. 1 (Kra [7]) G が 持ち上げ可能な第一種有限生成（したがって、$(q, r, s, 0)$ 型の）フックス群のとき、標準生成元系の生成元 A_i, B_i $(i = 1, \cdots, q)$ の持ち上げはどのように得られるか？

この問題に関しては、トレース不等式による特徴付けができる。繁雑さを避けるため、ここでは、$(q, 0, 0, 0)$ 型フックス群の結果のみをあげる（一般の (q, r, s, t) 型の結果も得ている)。

Theorem 3. 2 G を $(q, 0, 0, 0)$ 型フックス群とする。このとき、生成元 A_i, B_i の持ち上げを$\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ とすると、持ち上げの取り方によらず、次のトレース不等式を満たす。

$$\mathrm{tr}(\tilde{A}_i)\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_i)\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_i\tilde{A}_i) > 0,$$
$$\mathrm{tr}(\tilde{A}_i)\ \mathrm{tr}(\tilde{A}_j)\ \mathrm{tr}(\tilde{A}_j\tilde{A}_i) < 0,$$
$$\mathrm{tr}(\tilde{A}_i)\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_j)\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_j\tilde{A}_i^{-1}) < 0,$$
$$\mathrm{tr}(\tilde{B}_i)\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_j)\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_j\tilde{B}_i) < 0,$$
$$\mathrm{tr}(\tilde{B}_i)\ \mathrm{tr}(\tilde{A}_j)\ \mathrm{tr}(\tilde{A}_j\tilde{B}_i^{-1}) < 0.$$

ただし、$i, j \in \{1, 2, \cdots, q\}$, $i \neq j$ とする。

Remark 3.3 定理 3.2 で述べた以外にも多くのトレース不等式が成り立つ。しかし、G の持ち上げを構成するという意味では、これらで十分となる。実際、[10] より、G の持ち上げが、定理 3.2 のトレース不等式を満たす $6q-4$ 個のトレース

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\tilde{A}_i),\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_i),\ (i = 1, \cdots, q),\\
&\mathrm{tr}(\tilde{A}_j\tilde{A}_1),\ \mathrm{tr}(\tilde{A}_j\tilde{B}_1^{-1}),\ (j = 2, \cdots, q),\\
&\mathrm{tr}(\tilde{B}_k\tilde{B}_1),\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_k\tilde{A}_1^{-1}),\ (k = 2, \cdots, q-1),\\
&\mathrm{tr}(\tilde{B}_1\tilde{A}_1),\ \mathrm{tr}(\tilde{B}_q\tilde{A}_q)
\end{aligned}$$

（ただし、$q = 2$ の場合は $\mathrm{tr}(\tilde{B}_k\tilde{B}_1), \mathrm{tr}(\tilde{B}_k\tilde{A}_1^{-1})$ を無視する）のみから、行列の共役を除いて一意に決まる。

さらに、A_i と B_i の交換子 C_i の持ち上げについては、次の定理が成り立つ。

Theorem 3.4 持ち上げ可能な (q, r, s, t) 型 $(q > 0)$ フックス群の交換子 C_i の持ち上げを $\tilde{C}_i$ とする。このとき、持ち上げの取り方によらず、$\tilde{C}_i$ $(i = 1, \cdots, q)$ はトレースが負の行列表現になる。さらに、$q \geq 2$ の場合には、

$$\mathrm{tr}(\tilde{C}_{i_n}\tilde{C}_{i_{n-1}}\cdots\tilde{C}_{i_1}) < 0$$

（ただし、$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq q$, $1 \leq n \leq q-1$）となる。

この定理から、特に $(q,0,0,0)$ 型 $(q \geq 2)$ の場合には、

$$\mathrm{tr}(\tilde{C}_i\tilde{C}_{i-1}\cdots\tilde{C}_1) < 0$$

(ただし、$i = 1, 2, \cdots, q-1$) が成り立つことも分かる。これは、Seppälä-Sorvali [17] により、最初に報告された。

持ち上げの性質をトレース不等式で表してきたが、これらは、変換の「作用」と不動点の「位置関係」に関係している。実際、上半平面または単位円板に作用する三つの一次変換 X, Y, Z, $ZYX = identity$ の「作用」と不動点の「位置関係」が、X, Y の行列表現 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ のトレース関数

$$\mathrm{tr}(\tilde{X})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}),$$
$$\mathrm{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2$$

の符号で判定できることが分かる。これらの関数値は、X, Y の行列表現の取り方によらないことに注意せよ。

例えば、X, Y, Z がすべて双曲型変換になる場合には、次の定理が成り立つ。この定理では、不動点の位置関係を軸の配置で説明している。ただし、双曲型変換 g の軸 $\mathrm{ax}(g)$ とは、二つの不動点を通る測地線のことである。筆者は、一次変換の幾何を考える場合に有用となるので、軸に湧き出し不動点から吸い込み不動点への向きを与えることがある。

Theorem 3. 5 X, Y, Z を上半平面または単位円板に作用する三つの双曲型一次変換とし、$ZYX = identity$ を満たしているとする。このとき、三つの軸 $\mathrm{ax}(X), \mathrm{ax}(Y), \mathrm{ax}(Z)$ の配置は次のどれかとなる。
(a) 三つの軸は互いに素となる。
(b) 三つの軸は平行（つまり、三つが境界の一点でのみ接する）、または、三つが一致する。
(c) 三つは一点で交わらないが、二つどうしが交わり、一つの三角形を決定する。

これから、二つの軸が互いに素、平行、一致、または、交わるなら、三つの軸も同じ状況になる。また、三つの軸の向きは、図 3.1 のようになる（ただし、(U, V, W) は X, Y, Z の任意の順列とする)。

さらに、X, Y の任意の行列表現を $\tilde{X}, \tilde{Y}$ とすると、三つの軸の配置がトレース関数で次のように特徴付けられる。

$(a_1) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\tilde{X})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) < 0,$
$(a_2) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\tilde{X})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) > 0,\ \ \mathrm{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 > 0,$
(b) $\Leftrightarrow \mathrm{tr}(\tilde{X})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) > 0,\ \ \mathrm{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 = 0,$
(c) $\Leftrightarrow \mathrm{tr}(\tilde{X})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y})\ \mathrm{tr}(\tilde{Y}\tilde{X}) > 0,\ \ \mathrm{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) - 2 < 0.$

Remark 3. 6 (a_1) の場合と (X, Y, Z) が $(0,0,0,3)$ 型フックス群の標準生成元系になることは同値となる。また、この場合には、

$$\mathrm{tr}(\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{Y}\tilde{X}) > 18$$

となる。

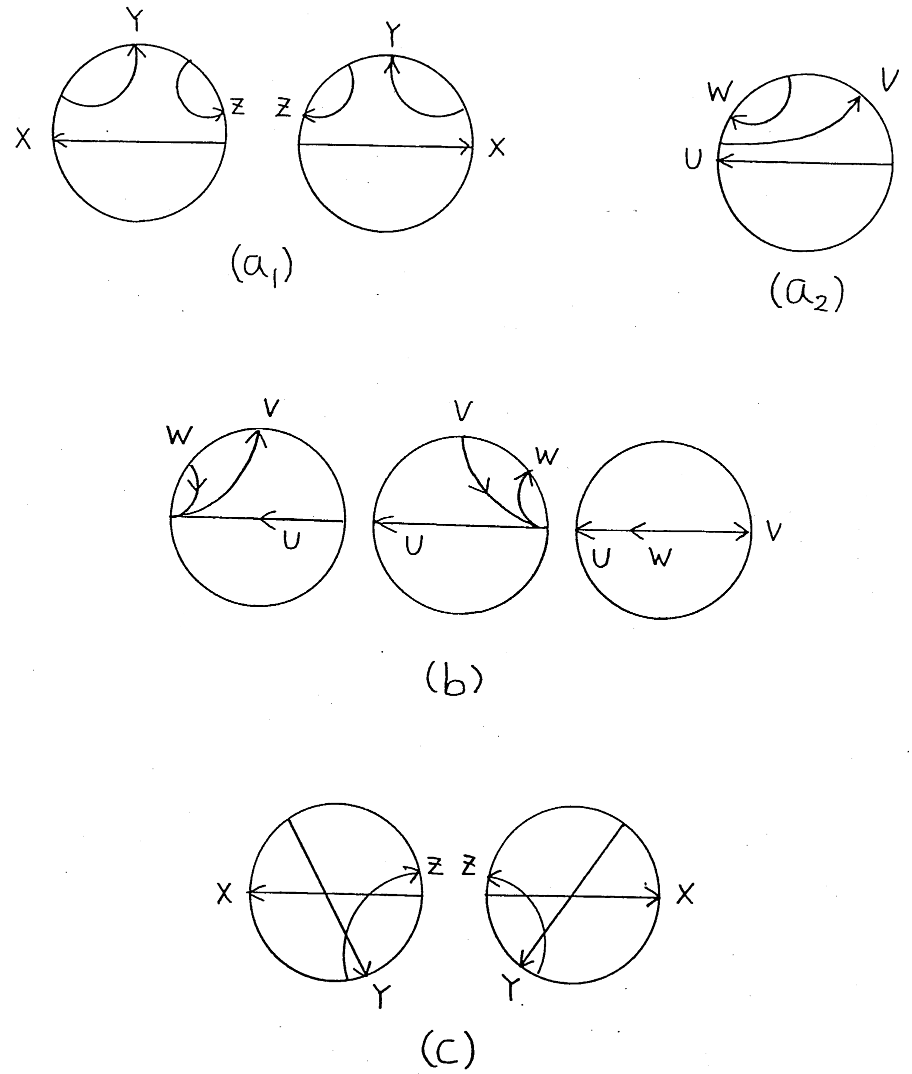

図 3.1　X, Y, Z が単位円板に作用する場合。

4 単純分割閉曲線の特徴付け

フックス群 G の元は、G が表現するリーマン面上の閉曲線に対応している。例えば、標準生成元系の生成元 $A_i, B_i, D_j, P_k, E_\ell$ は、図 4.1 の単純閉曲線 $a_i, b_i, d_j, p_k, e_\ell$ に対応している。また、定理 3.4 で述べた元 $C_i, C_{i_n}C_{i_{n-1}}\cdots C_{i_1}$ は単純分割閉曲線 $c_i := a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}, c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_n}$ に対応している。ただし、(連結な) 曲面上の単純分割閉曲線とは、この曲面を二つの連結集合に分け、境界成分または一点にホモトピックでない単純閉曲線のことである。

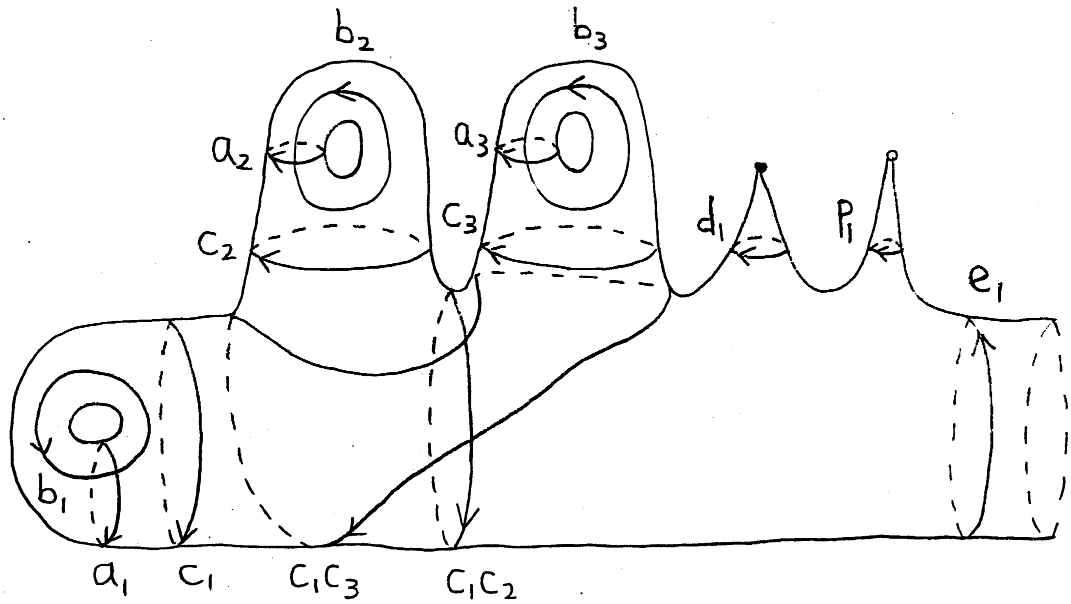

図 4.1　$(3,1,1,1)$ 型の場合。

これから、次の主張が予想される。

Conjecture 4. 1　単純分割閉曲線に対応するフックス群の元の持ち上げは、持ち上げの取り方によらず、同一でトレースが負の行列表現となる。

リーマン面がコンパクトの場合には、この予想は正しく、次の定理が得られる。

Theorem 4. 2 S を双曲型のコンパクト・リーマン面、L を S 上の単純分割閉曲線とする。また、S を表現するフックス群を G、L に対応する G の（任意の）元を g_L とする。ここで、G が持ち上げ可能、つまり、S に分岐点があればその位数はすべて奇数と仮定する。このとき、G の持ち上げの取り方によらず、g_L の持ち上げは同一でトレースが負の行列表現となる。

L に対応する G の元は無数にあり、hg_Lh^{-1}, $h \in G$ となっている。
この定理は次のように述べることもできる。

Corollary 4. 3 S, G は定理 4.2 の条件を満たしているとする。このとき、単純閉曲線は、対応する G の元の持ち上げで正のトレースを持つものがあれば、単純分割閉曲線でない。

次に、リーマン面がコンパクトでない場合を考える。このときには、次の主張が成り立ち、一般には、予想 4.1 が正しくないことが分かる。

Theorem 4. 4 S を双曲型の (q,r,s,t) 型$(s+t \geq 2)$ リーマン面、S を表現するフックス群を G とする。ここで、G が持ち上げ可能、つまり、S に分岐点があればその位数はすべて奇数と仮定する。このとき、G の適当な持ち上げをとると、ある単純分割閉曲線に対応する G の元の持ち上げは、正のトレースを持つ。

例えば、S が $(1,0,0,3)$ 型の場合、単純分割閉曲線に対応する G の元として E_1C_1 がとれる（図 4.2 を参照）。このとき、この元をトレースが正の行列表現に写す持ち上げ写像を、次のように構成できる。

系 2.1 の略証で述べたことから、G の持ち上げ写像で、$\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ が正のトレースを持つ行列表現、$\tilde{E}_3$ が負のトレースを持つ行列表現となるものが取れる。また、定理 3.4 より、$\tilde{C}_1$ はいつも負のトレースを持つ行列表現となる。一方、$(C_1, E_1, (E_1C_1)^{-1})$ は $(0,0,0,3)$ 型フックス群の標準生成元系となることがわかり、定理 3.5(a_1) と注意 3.6 より、

$$\mathrm{tr}(\tilde{C}_1)\ \mathrm{tr}(\tilde{E}_1)\ \mathrm{tr}(\tilde{E}_1\tilde{C}_1) < 0.$$

したがって、E_1C_1 の持ち上げ $\tilde{E}_1\tilde{C}_1$ のトレースは正の値となる。

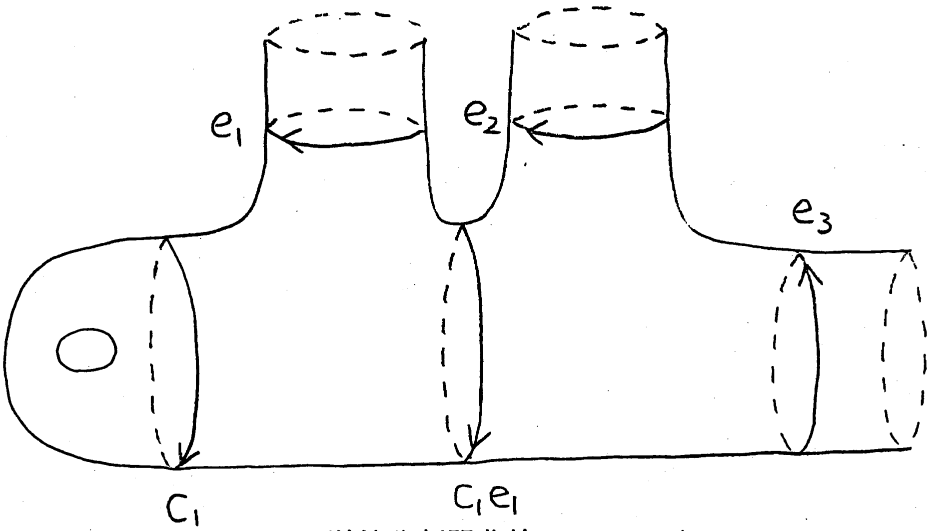

図 4.2 E_1C_1 は単純分割閉曲線 c_1e_1 に対応している。

しかし、コンパクトでない場合にも、次のように持ち上げを限定すると、コンパクトの場合と同じ主張が成り立つ。

Theorem 4. 5 S を双曲型の (q, r, s, t) 型 $(s + t \geq 1)$ リーマン面、S を表現するフックス群を G とする。ここで、G が持ち上げ可能、つまり、S に分岐点があればその位数はすべて奇数と仮定する。

G の持ち上げを限定して、標準生成元系の生成元 $P_1, \cdots, P_s, E_1, \cdots, E_t$ の持ち上げが負のトレースを持つ行列表現になるようにする。このような持ち上げの個数は 2^{2q} となるが、この場合には、定理 4.2 と系 4.3 の主張が成り立つ。

References

[1] W. Abikoff, K. Appel and P. Schupp, Lifting surface groups to SL(2,C), Lecture Notes in Mathematics 971, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983, 1-5.

[2] M. Culler, Lifting representations to covering groups, Adv. in Math., 59(1986), 64-70.

[3] J. Dyer and J. Lewittes, Möbius tranceformations and matrices, preprint (not published).

[4] G. Faltings, Real projective structures on Riemann surfaces, Compos. Math., 48(1983), 223-269.

[5] R. Fricke and F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, B. G. Teubner, Leipzig, 1926.

[6] N. Hawley and M. Schiffer, Half-order differentials on Riemann surfaces, Acta Math., 115(1966), 199-236.

[7] I. Kra, On lifting of Kleinian groups to SL(2,C), in Differential Geometry and Complex Analysis (Rauch, H. E. Memorial Volume), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 181-193.

[8] J. Milnor, On the existance of a connection with curvature zero, Comment. Math. Helvetici, 32(1958), 215-223.

[9] Y. Okumura, Global real analytic coordinates for Teichmüller Spaces, Doctor's Thesis, Kanazawa Univ., 1989.

[10] Y. Okumura, On the global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, 42(1990), 91-101.

[11] Y. Okumura, Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, Hiroshima Math. J., 26(1996), 165-179.

[12] Y. Okumura, Parametrizations of Teichmüller spaces, to appear in XVI R. Nevanlinna Colloquium, Walter de Gruyter, Berlin.

[13] Y. Okumura, Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces, to appear in J. Math. Soc. Japan, 49(1997).

[14] Y. Okumura, A characterization of geometry of Möbius transformations acting on the unit disk by trace inequalities, in preparation.

[15] Y. Okumura, Lifting problem and a characterization of simple dividing loops on Riemann surfaces, in preparation.

[16] H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkleisgruppen III, Math. Ann., 115(1938), 518-572.

[17] M. Seppälä and T. Sorvali, Traces of commutators of Möbius transformations, Math. Scand., 68(1991), 53-58.

[18] C. L. Siegel, Über einige Ungreichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene, Math. Ann., 133(1957), 127-138.