数理解析研究所講究録
967巻 1996年 25-41

第3種アーベル微分と写像類群
(Abelian Differentials of the Third Kind and Mapping Class Groups)

河澄響矢（北大理）
(Nariya KAWAZUMI)

目次.

はじめに

本稿は森田茂之先生（東大数理）との共同研究によって得られた結果の紹介です。但し記号は森田先生のそれとはやや異なるものを用います。

森田茂之先生は、トレリ群のジョンソン準同型を写像類群全体の上の捩れ準同型に拡張し[Mo3]、この拡張されたジョンソン準同型を用いて写像類群の高次の（つまり3次以上の）安定コサイクルを大量に発見されました（c.f. 前回東北大の学会の総合講演）。すべての森田・マンフォード類はこれらのコサイクルで具体的に表されます。いままでは Wolpert [W] が（曲面の双曲計量のラプラシアンを用いて）森田・マンフォード類の微分形式による表示を得たという唯一つの例外を除き、写像類群の高次の安定コサイクルというものは全く発見されていませんでした。

一方、数年来、河澄は複素解析的ゲルファント・フクス・コホモロジーからリーマン面のモジュライ空間を調べているのですが、その過程で写像類群のねじれ係数コホモロジー類の、二重に次数づけられた系列 $m_{i,j}$, $(i,j \geq 0, i+j \geq 2)$（河澄はこれを一般森田・マンフォード類と呼んでいます）が得られました。

共同研究の結果第 $(0,3)$- 一般森田・マンフォード類 $m_{0,3}$ が拡張されたジョンソン準同型のちょうど -6 倍であること、そしてそこから、上述のコサイクルの定めるコホモロジー類がすべて残らず森田・マンフォード類の多項式であらわされることが分かりました。また、一般森田・マンフォード類 $m_{i,j}$ それ自身についても本質的な改良が得られました。

以上が本稿の内容です。

なお、リーマン面のモジュライ空間のサイクルについては、タイヒミュラー空間の Strebel-Mumford 胞体分割を用いて Kontsevich [Kon1] が大量に構成しており、Witten 及び Kontsevich によって森田・マンフォード類によって記述されることが予想されています ([Kon1] Conjecture 3.4, p.13) が、余次元1の場合の Penner [P] による肯定的解決を除き、未解決のようです（[AC] 参照）。

河澄響矢（北大理）

1. 曲面の写像類群とリーマン面のモジュライ空間.

この §ではリーマン面のモジュライ空間と曲面の写像類群、およびそれらの関係、そして森田・マンフォード類 e_n, $n \geq 1$ の構成を復習する。

本稿を通し、整数 $g \geq 0$ を固定する。種数 g のコンパクト・リーマン面の双正則同値類全体の集合に（複素構造の変形に関して）自然な位相を入れたものを種数 g コンパクト・リーマン面のモジュライ空間とよび、M_g で表す：

$$M_g = \{C : \text{種数 } g \text{ コンパクト・リーマン面}\} / \text{ 双正則}.$$

グラスマン多様体上の "tautological bundle" と同様に、M_g の各点の上に自分自身、つまりその点を代表するリーマン面をのせることによってモジュライ空間 M_g 上の普遍曲線 C_g が構成される。これはむしろコンパクト・リーマン面 C とその上の点 $p \in C$ の組 (C, p) の双正則同値類全体の集合と見たほうがよい：

$$C_g = \{(C, p) : C : \text{種数 } g \text{ コンパクト・リーマン面}, \ p \in C\} / \text{ 双正則}.$$

これにも自然な位相が入る。知られているように M_g および C_g はそれぞれ $3g-3$ 次元および $3g-2$ 次元の複素 orbifold であり、自然な射影

$$\pi : C_g \to M_g, \quad (C, p) \mapsto C$$

は複素解析写像である。

森田・マンフォード類 $e_n \in H^{2n}(M_g; \mathbb{Q})$, $n \geq 1$ は次のようにして構成される [Mo] [Mu]。射影 $\pi : C_g \to M_g$ に沿う普遍曲線 C_g の接ベクトル全体、つまり相対接束

$$T_{C_g/M_g} := \operatorname{Ker}(d\pi : TC_g \to TM_g)$$

は C_g 上の複素直線 (orbi-)束をなす。そのオイラー類（第 1 チャーン類）

$$e := e(T_{C_g/M_g}) = c_1(T_{C_g/M_g}) \in H^2(C_g; \mathbb{Q}) \tag{1.1}$$

を考える。『バンドル』T_{C_g/M_g} は本当の複素直線束ではないので e を整数係数で考えることはできない。これが写像類群を考える一つの理由である。自然数 $n \geq 1$ について e のベキ e^{n+1} を射影 $\pi : C_g \to M_g$ のファイバー（つまりリーマン面）方向だけ積分する（これをファイバー積分といい、$\int_{\text{fiber}}$ または $\pi_!$ などと書く）：

$$e_n := \int_{\text{fiber}} e^{n+1} \in H^{2n}(M_g; \mathbb{Q}), \quad n \geq 1 \tag{1.2}$$

これを第 n 森田・マンフォード類とよぶ、第 n tautological 類 $\kappa_n = (-1)^n e_n$、MMM類などともいう。ベキ e^{n+1} は次数 $2n+2$ だが、リーマン面は実 2 次元あるので e_n の次数は $2n+2-2 = 2n$ となる。

ここでトポロジストがモジュライ空間 M_g の位相を調べる必然性を述べておきたい。位相幾何学の基本的な道具として、ベクトル束の特性類の理論がある。分類空間の言葉を使えば（n 次元複素）ベクトル束の特性類とは一般線型群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の分類空間（つまりグラスマン多様体）$B\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ のコホモロジー環 $H^*(B\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$ の元のことであり、これらはチャーン類 $c_q \in H^{2q}(B\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$, $0 \leq q \leq n$ によって自由生成されること：

$$H^*(B\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n]$$

が知られている。このように特性類の理論はベクトル束については（ほぼ）完成されているが、次に考えるべき方向の一つとして向きづけられたコンパクト多様体 M をファイバーとする向きづけられたファイバー束がある。この場合の特性類は M の向きを保つ微分同相全体の群 Diff_+M （これには C^∞ 位相をいれておく）の分類空間 $B\mathrm{Diff}_+M$ のコホモロジー類 $\in H^*(B\mathrm{Diff}_+M;\mathbb{Z})$ ということになる。

まず、M が円周 S^1 の場合、Diff_+S^1 は回転 $\mathrm{U}(1)\simeq \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ を変位レトラクトにもつので

$$H^*(B\mathrm{Diff}_+S^1;\mathbb{Z}) = H^*(B\,\mathrm{GL}(1,\mathbb{C});\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1]$$

となり完全に明らかになっている。

次は多様体 M が 2 次元の場合である。2 次元球面 S^2 については、Smale [Sm] によって、$B\mathrm{Diff}_+S^2 = B\,\mathrm{SO}(3)$ が知られており、また 2 次元トーラス T^2 についても森田によってコホモロジー環 $H^*(B\mathrm{Diff}_+T^2;\mathbb{Q})$ が求まっているから、$g\geq 2$ について種数 g の向きづけられた連結閉曲面 Σ_g を考えることになる。

このとき、タイヒミュラー空間の可縮性から $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の単位連結成分の可縮性が分かる [EE]。そこで、$\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の連結成分群を Γ_g と表す

$$\Gamma_g := \pi_0(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g)$$

（これこそが曲面 Σ_g の写像類群である）と、$B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g = B\Gamma_g$ が成り立つ。つまり、

$$\begin{aligned}\{\text{向きづけられた } \Sigma_g \text{ 束の特性類}\} &= H^*(B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g) = H^*(B\Gamma_g)\\ &= H^*(\Gamma_g) \quad (\text{群 } \Gamma_g \text{ のコホモロジー環})\end{aligned}$$

となる。知られているように、写像類群 Γ_g はタイヒミュラー空間 T_g に固有不連続に作用し、商空間 T_g/Γ_g がモジュライ空間 M_g に他ならない。このことはコホモロジー環の同型

$$H^*(\Gamma_g;\mathbb{Q}) = H^*(M_g;\mathbb{Q}) \tag{1.3}$$

を含意する。かくして次の同型がえられた：

$$H^*(M_g;\mathbb{Q}) = \{\text{向きづけられた } \Sigma_g \text{ 束の有理特性類}\}.$$

この同型写像は次のように書き下せる。向きづけられた Σ_g 束が与えられたとき、ファイバー毎に向きに適合した概複素構造を入れる（これはホモトピーを除き一意に入る）。実2次元ゆえ概複素構造はすべて積分可能で、各ファイバーはコンパクト・リーマン面となる。底空間の各点にその上のファイバーのリーマン面の双正則同値類を対応させることにより、底空間からモジュライ空間 M_g への連続写像が（ホモトピーを除き）一意に定まる。これによってモジュライ空間 M_g のコホモロジー類を引き戻せば向きづけられた Σ_g 束の特性類がえられる訳である。

以上からも分かるように、より精密な議論を行うためにはモジュライ空間 M_g よりも写像類群 Γ_g を考えたほうがよい。

記号を確定させる。$g\geq 2$, $r,s\geq 0$ を整数とする。$\Sigma^s_{g,r}$ によって種数 g の向きづけられた 2-次元コンパクト C^∞ 多様体 (即ち、種数 g の向きづけられた曲面)であって、r 個の境界成分と（番号の付いた）s 個の基点（または punctures）をもつものを表わす。種数 g 境界成分 r（番号付き）s punctures の写像類群 $\Gamma^s_{g,r}$（または $\mathcal{M}^s_{g,r}$）とは（微分同相群の）連結成分群 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(\Sigma^s_{g,r}))$ のことである。ここで $\mathrm{Diff}_+(\Sigma^s_{g,r})$ は $\Sigma^s_{g,r}$ の微分同相であって境界上の各点および各基点を<u>点毎に</u>固定するもの全体のなす（C^∞ 位相をいれた）位

相群である。$s=0$ のときは、s を落として $\Sigma_{g,r}=\Sigma^0_{g,r}$, $\Gamma_{g,r}=\Gamma^0_{g,r}$ などと書き、同様に $\Sigma_g=\Sigma^0_{g,0}$, $\Gamma_g=\Gamma^0_{g,0}$.などと書く。

写像類群の上で森田・マンフォード類を構成する [Mo]。モジュライ空間 M_g に対応するのは写像類群 Γ_g であるが、同様に普遍曲線 C_g、相対接束 T_{C_g/M_g} および射影 $\pi: C_g \to M_g$ に対応するのが、それぞれ写像類群 Γ^1_g, $\Gamma_{g,1}$ および点を忘れる準同型

$$0 \to \pi_1(\Sigma_g) \xrightarrow{\iota} \Gamma^1_g \xrightarrow{\pi} \Gamma_g \to 1, \quad (\text{exact}) \tag{1.4}$$

である。相対接束 T_{C_g/M_g} のオイラー類 e は境界を点につぶす準同型の定める中心拡大

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \Gamma^1_g \to 1, \quad (\text{exact}) \tag{1.5}$$

のオイラー類 $e \in H^2(\Gamma^1_g;\mathbb{Z})$ である。群拡大 (1.4) についてもファイバー積分 $\int_{\text{fiber}} = \pi_!$ が定義できる（§3 参照）から第 n 森田・マンフォード類が定義される:

$$e_n := \pi_! e^{n+1} \in H^{2n}(\Gamma_g;\mathbb{Z}), \quad n \geq 1. \tag{1.6}$$

2. 第3種アーベル微分.

C を種数 $g \geq 2$をもつコンパクト・リーマン面とする。C 上の相異なる2点においてのみ高々1 位の極をもつ有理型 1 次微分形式を第3種アーベル微分とよぶ。（岩澤健吉「代数函数論」[Iw] に従う。H.Weylの「リーマン面」や数学辞典での語法：「0と異なる留数をもつような微分は第3種微分とよばれる」とはほんの少し異なる。）

C 上の正則 1 次微分形式全体のなす線型空間を $H^0(K)=H^0(C;\mathcal{O}_C(K))$ と書き、C 上の相異なる2点 P, P' で極をもつ第3種アーベル微分全体の空間を $H^0(K+P+P')=H^0(C;\mathcal{O}_C(K+P+P'))$ とかくことにする。第3種アーベル微分 $\omega \in H^0(K+P+P')$ の点 P における留数を

$$\mathrm{Res}_P\omega := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{P\text{の回りを1周}} \omega \in \mathbb{C}$$

と書くと完全列

$$0 \to H^0(K) \to H^0(K+P+P') \xrightarrow{\mathrm{Res}_P} \mathbb{C} \to 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ。

私にとっては個々のリーマン面より、リーマン面をすべて集めた空間つまりモジュライ空間こそが明らかにしたい対象である。結果として研究の対象は個々の第3種アーベル微分よりむしろそれらの全体ということになる。つまり、リーマン面 C およびその上の2点 P, P' をすべて動かすことによって完全列 (2.1) から得られるモジュライ空間上のベクトル束の拡大を調べることになる。

モジュライ空間を位相幾何学的により精密に研究するために完全列 (2.1) の定めるベクトル束を写像類群の言葉に翻訳する。それは非常に簡単なことで $(2\pi\sqrt{-1})^{-1}$ をかけて実部をとる写像と Poincaré-Lefschetz 双対定理の定める完全列の射

(2.2)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^0(K+P+P') \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^1(C^0) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(C, C^0) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(C) \\
0 \arrow[r] & H_1(C) \arrow[r] & H_1(C, \{P, P'\}) \arrow[r, "\partial_*"] & \widetilde{H}_0(\{P, P'\}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

によって (2.1) は下の行に置きかわる。ここで $C^0 := C - \{P, P'\}$ と略記した。また、空間の（コ）ホモロジーは実数係数のものをとった。要するに短完全列 (2.1) は短完全列

$$0 \to H_1(C;\mathbb{Z}) \to H_1(C, \{P, P'\};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H_0}(\{P, P'\};\mathbb{Z}) \to 0 \tag{2.3}$$

に翻訳された。完全列 (2.3) からながめれば個々の第3種アーベル微分は

$$\partial_*(l) = [P'] - [P] \in \widetilde{H_0}(\{P, P'\};\mathbb{Z})$$

なるホモロジー類 $l \in H_1(C, \{P, P'\};\mathbb{Z})$ つまり P を P' に結ぶ路のホモロジー類ということになる。

3. 群のコホモロジーの復習.

G を一般の群、M を G-加群とする。群 G の M に係数をもつコホモロジーとは分類空間 BG 上の M の定める局所定数層のコホモロジーのことであった。これはまた（正規化された）標準複体 $C^*(G;M)$ のコホモロジーとしても捉えられる。

整数 $p \geq 0$ について可換群 $C^p(G;M)$ を

$$C^p(G;M) := \{f : G^p = G \times \cdots \times G \to M \text{ 写像}; f(\dots, \exists 1, \dots) = 0\}$$

によって定義する。$p = 0$ のときは $C^0(G;M) = M$ とする。微分 $d : C^p(G;M) \to C^{p+1}(G;M)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} df(g_0, g_1, \dots, g_p) = g_0(f(g_1, \dots, g_p)) &+ \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} f(g_0, g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_p) \\ &+ (-1)^{p+1} f(g_0, g_1, \dots, g_{p-1}), \qquad g_0, g_1, \dots, g_p \in G \end{aligned}$$

（たとえば直接計算により）$dd = 0$ が分かる。コチェイン複体 $C^*(G;M) = \{C^p(G;M), d\}$ のコホモロジー群は群 G の G-加群 M に係数をもつコホモロジー群に他ならない:

$$H^*(G;M) = H^*(C^*(G;M)).$$

$H^0(G;M)$ は G-不変な M の元全体の加群 M^G に等しい:

$$H^0(G;M) = M^G := \{m \in M; \forall g \in G, \quad gm = m\}.$$

$p = 1$ の場合を考えて見る。このとき $f \in C^1(G;M)$ について

$$df(g_0, g_1) = g_0(f(g_1)) - f(g_0 g_1) + f(g_0)$$

であるから、$df = 0$ であることと f が crossed homomorphism（捩れ準同型）であることは同値である。

M_1, M_2 を G-加群とするとき、カップ積

$$\cup : H^p(G;M_1) \otimes H^q(G;M_2) \to H^{p+q}(G;M_1 \otimes M_2)$$

が定義される。これは標準複体 $C^*(G;M_1\otimes M_2)$ の上では

$$(f_1\cup f_2)(g_1,\dots,g_p,g_{p+1},\dots,g_{p+q}):=f_1(g_1,\dots,g_p)\otimes g_1\cdots g_p(f_2(g_{p+1},\dots,g_{p+q}))$$
$$f_1\in C^p(G;M_1),\quad f_2\in C^p(G;M_2),\quad g_1,\dots,g_{p+q}\in G$$

によって定義される。本稿ではつねにこのカップ積を用いて計算する。

我々の考察で一番大事な曲面 Σ_g の基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ を考える。$g\geq 2$ とする。このとき Σ_g の普遍被覆は上半平面 $\{z\in\mathbb{C};\Im z>0\}$ であり、これは可縮だから、$\Sigma_g=B\pi_1(\Sigma_g)$。とくに自明 $\pi_1(\Sigma_g)$- 加群 M について次のようになる。

$$H^*(\pi_1(\Sigma_g);M)=\begin{cases}M, & \text{if } *=0,\\ H^1(\Sigma_g)\otimes M, & \text{if } *=1,\\ M, & \text{if } *=2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

同型写像 $H^2(\pi_1(\Sigma_g);M)\cong M$ を少し詳しく見ることにする。W.Meyer [Me] にならって（正規化された）2-サイクル $[\Sigma_g]\in C_2(\pi_1(\Sigma_g))$ を導入する：まず基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の通常の symplectic 生成系

$$a_1,a_2,\dots,a_g,b_1,b_2,\dots,b_g \tag{3.2}$$

をとる。これらは関係式

$$\prod_{i=1}^{g}a_ib_i{a_i}^{-1}{b_i}^{-1}=1$$

をみたす。番号 $1\leq j\leq 4g$ に対し、上式左辺の第 j-番目の生成元を $w_j={a_i}^{\pm1},{b_i}^{\pm1}$ とし、$\widetilde{w_j}:=w_1w_2\cdots w_j=a_1b_1\cdots w_j$ とおく。$\widetilde{w_0}:=1$ とする。

$$[\Sigma_g]:=\sum_{j=1}^{4g}[\widetilde{w_{j-1}}|w_j]-\sum_{i=1}^{g}([a_i|{a_i}^{-1}]+[b_i|{b_i}^{-1}])\in C_2(\pi_1(\Sigma_g)) \tag{3.3}$$

とおく。このとき次がなりたつ。

補題 3.4. $[\Sigma_g]$ による *evaluation:* $H^2(\pi_1(\Sigma_g);M)\to M$

$$[f]\mapsto f([\Sigma_g])=\sum_{j=1}^{4g}f(\widetilde{w_{j-1}},w_j)-\sum_{i=1}^{g}(f(a_i,{a_i}^{-1})+f(b_i,{b_i}^{-1}))$$

は *well-defined* な同型写像である。

証明. $\phi\in C^1(\pi_1(\Sigma_g);M)$ について

$$\begin{aligned}d\phi([\Sigma_g])&=\sum_{j=1}^{4g}d\phi(\widetilde{w_{j-1}},w_j)-\sum_{i=1}^{g}(d\phi(a_i,{a_i}^{-1})+d\phi(b_i,{b_i}^{-1}))\\&=\sum_{j=1}^{4g}(\phi(w_j)-\phi(\widetilde{w_{j-1}}w_j)+\phi(\widetilde{w_{j-1}}))\\&\quad-\sum_{i=1}^{g}(\phi({a_i}^{-1})-\phi(1)+\phi(a_i)+\phi({b_i}^{-1})-\phi(1)+\phi(b_i))=0\end{aligned}$$

であるからこの写像は well-defined である。

$H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ の基底 $\{[a_i],[b_i]\}_{i=1}^g$ に関する $H^1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ の双対基を $\{\alpha_i,\beta_i\}_{i=1}^g$ とすると、$\alpha_1\cup\beta_1\in H^2(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ は正の生成元である。他方直接計算により $(\alpha_1\cup\beta_1)([\Sigma_g])=1$ だから $M=\mathbb{Z}$ のとき同型であることがわかる。これに M をテンソルして補題をうる。 □

$H:=H_1(\Sigma_g)=H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ とし $1_H\in H^1(\pi_1(\Sigma_g);H)$ をコサイクル

$$
\begin{aligned}
1_H:\pi_1(\Sigma_g)&\to\pi_1(\Sigma_g)^{\mathrm{abel}}=H \\
g&\mapsto[g]=g\,\mathrm{mod}[\pi_1(\Sigma_g),\pi_1(\Sigma_g)]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

によって与えられるコホモロジー類とする。定義通り計算して次が分かる。これは §5 の計算の基礎となる。

補題 3.6. $1_H{}^{\otimes 2}:=1_H\cup 1_H\in H^2(\pi_1(\Sigma_g);H^{\otimes 2})$ は次をみたす：

$$1_H{}^{\otimes 2}([\Sigma_g])=\sum_{i=1}^{g}[a_i]\otimes[b_i]-[b_i]\otimes[a_i]\in H^{\otimes 2}$$

さて、群のコホモロジーの計算でもっとも基本的な道具は Lyndon-Hochschld-Serre (LHS) スペクトル系列である。

定理 3.7 ([HS]). $\widetilde{G}$ を群、$N\triangleleft\widetilde{G}$ を正規部分群、M を $\widetilde{G}$- 加群とするとき、次のスペクトル系列（*LHS* スペクトル系列）が成り立つ：

$$E_2^{p,q}=H^p(\widetilde{G}/N;H^q(N;M))\Rightarrow H^{p+q}(\widetilde{G};M).$$

われわれが主として用いるのは (1.4) のように正規部分群 N が曲面の基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ に同型な場合である。抽象的に、群の全射準同型 $\pi:\widetilde{G}\to G$ で核 $\mathrm{Ker}\,\pi$ が $\pi_1(\Sigma_g)$ に同型なものが与えられているとする：

$$0\to\pi_1(\Sigma_g)\to\widetilde{G}\xrightarrow{\pi}G\to 1\quad(\text{exact})\tag{3.8}$$

このとき <u>G-加群</u> M に対して、LHS スペクトル系列は

$$E_2^{p,q}=\begin{cases}0, & \text{if } q\geq 3,\\ H^p(G;M), & \text{if } q=2,\end{cases}$$

となる。とくにファイバー積分

$$\pi_!:H^{p+2}(\widetilde{G};M)\to H^p(G;M)$$

が定義される。これは次のように書き下すことができる。

任意の $u\in H^{p+2}(\widetilde{G};M)$ をとる。$q\geq 3$ について $E_2^{p,q}=0$ であるということから u の代表元 $f\in C^{p+2}(\widetilde{G};M)$ として, $df=0$ をみたし、$f(\widetilde{g_1},\widetilde{g_2},\widetilde{g_3},\ldots,\widetilde{g_{p+2}})$、$\widetilde{g_i}\in\widetilde{G}$ の値が $\widetilde{g_1}$, $\widetilde{g_2}$ および $\pi(\widetilde{g_3}),\ldots,\pi(\widetilde{g_{p+2}})\in G$ のみに依存するものをとることができる。コチェイン $\pi_!f\in C^p(G;M)$ を $g_3,\ldots,g_{p+2}\in G$ に対して $\pi(\widetilde{g_i})=g_i$ なる $\widetilde{g_i}\in\widetilde{G}$ をとり

河澄響矢（北大理）

$$
\begin{aligned}
(\pi_! f)(g_3,\ldots,g_{p+2}) &:= f([\Sigma_g],\widetilde{g_3},\ldots,\widetilde{g_{p+2}})\\
=\sum_{j=1}^{4g} & f(\widetilde{w_{j-1}},w_j,\widetilde{g_3},\ldots,\widetilde{g_{p+2}})\\
&-\sum_{i=1}^{g}(f(a_i,{a_i}^{-1},\widetilde{g_3},\ldots,\widetilde{g_{p+2}})+f(b_i,{b_i}^{-1},\widetilde{g_3},\ldots,\widetilde{g_{p+2}}))
\end{aligned}
$$

とおくことによって定義する。このとき $d(\pi_! f)=0$ であって

$$\pi_! u=[\pi_! f]\in H^p(G;M)$$

となるのである。森田・マンフォード類の定義 (1.6) におけるファイバー積分 $\pi_!$ はこうして与えられるものなのである。

4. 写像類群上の第3種アーベル微分.

§2で見たように第3種アーベル微分は与えられた2点を結ぶ路（のホモロジー）に対応していた。これを写像類群の群のコホモロジーの上で考える。

曲面 $\Sigma^1_{g,1}$ 上の基点を境界上の（固定された）一点に結ぶ（単純）曲線 l をとる。$\gamma\in\Gamma^1_{g,1}$ に対して $\gamma l-l$ は $H=H_1(\Sigma_{g,1})$ の元を定める。そこで、1-コサイクル ω_l が

$$\gamma\in\Gamma^1_{g,1}\mapsto\omega_l(\gamma)=\gamma l-l\in H$$

によって定まる。これのコホモロジー類 $[\omega_l]$ は $\Gamma^1_{g,1}$-加群の完全列

$$0\to H=H_1(\Sigma_{g,1},\partial\Sigma_{g,1})\to H_1(\Sigma_{g,1},\partial\Sigma_{g,1}\cup\{\text{基点}\})\to\mathbb{Z}\to 0 \tag{4.1}$$

（境界 $\partial\Sigma_{g,1}$ をつぶしてしまえばこれは完全列 (2.3) に他ならない）の誘導するコホモロジー完全列の境界準同型

$$\mathbb{Z}=H^0(\Gamma^1_{g,1};\mathbb{Z})\xrightarrow{\delta^*}H^1(\Gamma^1_{g,1};H)$$

による $1\in\mathbb{Z}$ の像 $\delta^*(1)$ である:

$$[\omega_l]=\delta^*(1)\in H^1(\Gamma^1_{g,1};H).$$

とくにコホモロジー類 $[\omega_l]$は曲線 l のとり方によらない。これを写像類群 $\Gamma_{g,1}$ 上の第3種アーベル微分と考え、$\omega:=[\omega_l]$ と書くことにする。構成から明らかに

$$\omega_l(\gamma)=-[\gamma]\in H,\quad \text{if } \gamma\in\pi_1(\Sigma_{g,1}) \tag{4.2}$$

が成り立つ。

当初、河澄はこの境界付き写像類群 $\Gamma_{g,1}$ 上の第3種アーベル微分 ω をもとにして、一般森田・マンフォード類 $m_{i,j}$ を構成していた。その際、境界付き曲面の基本群 $\pi_1(\Sigma_{g,1})$ の上のファイバー積分が必要になり、群の対のコホモロジー理論を「でっち上げる」必要があった [Ka]。ところが森田茂之先生はこの第3種アーベル微分 ω が Γ^1_g 上に起源をもち、さらに深

く一般の群の半直積上で定義されることを発見された。これによって、一般森田・マンフォード類の構成に際しては群の対のコホモロジー理論は必要なくなった。

まず、一般の状況で考える。Q, N を一般の群とし Q が N に作用している、つまり、群準同型

$$\phi : Q \to \mathrm{Aut}(N)$$

が与えられているとする。このとき積集合 $N \times Q$ は

$$(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1\phi(q_1)(n_2), q_1q_2), \quad (n_1, n_2 \in N,\ q_1, q_2 \in Q)$$

によって定義される積によって群となる。これを群 Q と N の半直積と呼び $N \rtimes Q$ と表わした。以下半直積についてはいつも次の記号を用いることにする：

$$\begin{aligned} &\pi : N \rtimes Q \to Q, \quad (n,q) \mapsto q, \\ &s : Q \to N \rtimes Q, \quad q \mapsto (1,q), \end{aligned} \tag{4.3}$$

これらは群準同型である。

$[n]$ によって $n \in N$ のアーベル化 $H_1(N) = N/[N,N]$ における像を表わすと、写像

$$k_0 : N \rtimes Q \to H_1(N) \quad (n,q) \mapsto [n] \tag{4.4}$$

は Q-加群 $H_1(N)$ に係数をもつ群 $N \rtimes Q$ の 1-コサイクル、つまり crossed homomorphism となる。実際、$n_0, n_1 \in N$ 及び $q_0, q_1 \in Q$ について

$$dk_0(n_0q_0, n_1q_1) = q_0[n_1] - [n_0\phi(q_0)n_1] - [n_0] = 0$$

となるからである。k_0 のコホモロジー類をも k_0 と書くことにする:

$$k_0 := [k_0] \in H^1(N \rtimes Q; H_1(N)).$$

写像類群に戻る。以下

$$\pi_1 := \pi_1(\Sigma_g)$$

と略記する。半直積 $\pi_1 \rtimes \Gamma_g^1$ 上で上述の k_0 を考える：

$$k_0 \in H^1(\pi_1 \rtimes \Gamma_g^1; H)$$

半直積 $\pi_1 \rtimes \Gamma_g^1$ は普遍曲線上に普遍曲線をひきもどしたもの、つまり重複を許す２点つきコンパクト・リーマン面のモジュライ空間に対応する。実際モジュライ空間上の普遍曲線は基点を忘れることによってえられる群拡大

$$0 \to \pi_1 \to \Gamma_g^1 \to \Gamma_g \to 1$$

に対応するから問題のモジュライ空間はファイバー積 $\Gamma_g^1 \times_{\Gamma_g} \Gamma_g^1$ に対応し、同型

$$\pi_1 \rtimes \Gamma_g^1 \overset{\cong}{\to} \Gamma_g^1 \times_{\Gamma_g} \Gamma_g^1, \quad (\gamma, \phi) \mapsto (\gamma\phi, \phi)$$

が成り立つからである。

境界を忘れる準同型と基点を忘れ境界を点につぶす準同型をならべて準同型

$$\varpi : \Gamma_{g,1}^1 \to \Gamma_g^1 \times_{\Gamma_g} \Gamma_g^1 \cong \pi_1 \rtimes \Gamma_g^1 \tag{4.5}$$

をうる。これは境界を点につぶす準同型 $\Gamma_{g,1} \to \Gamma_g^1$ を cover している。

準同型 ϖ によってコホモロジー類 k_0 は境界付き写像類群 $\Gamma_{g,1}^1$ に引き戻すと第３種アーベル微分 ω（の-1倍）となる。

命題 4.6.

$$\varpi^* k_0 = -\omega \in H^1(\Gamma^1_{g,1}; H).$$

証明. 曲面 $\Sigma^1_{g,1}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ に基点付きアニュラス $\Sigma^1_{0,2}$ を境界で貼り付けることによって得られることに注意する。これにより $\Sigma_{g,1}$ の微分同相写像は自然に $\Sigma^1_{g,1}$ のそれに延びるから、準同型 $\sigma : \Gamma_{g,1} \to \Gamma^1_{g,1}$ がえられる。明らかに $\pi\sigma = 1_{\Gamma_{g,1}}$ であり、(4.5) の準同型 $\varpi : \Gamma^1_{g,1} \to \pi_1 \rtimes \Gamma^1_g$ と (4.3) の準同型 $s : \Gamma^1_g \to \pi_1 \rtimes \Gamma^1_g$ について $\varpi\sigma = s\varpi : \Gamma_{g,1} \to \pi_1 \rtimes \Gamma^1_g$ である。

基点と境界を結ぶ曲線 l としてアニュラス $\Sigma^1_{0,2}$ に含まれるものをとる。コサイクル・レベルで

$$\varpi^* k_0 = -\omega_l \in Z^1(\Gamma^1_{g,1}; H). \tag{4.7}$$

を示す。準同型 σ は半直積分解 $\Gamma^1_{g,1} = \pi_1(\Sigma_{g,1}) \rtimes \sigma(\Gamma_{g,1})$ を与えるから、$\pi_1(\Sigma_{g,1})$ と $\sigma(\Gamma_{g,1})$ の各々の上で (4.7) の成り立つことを示せば充分である。

k_0 の $\mathrm{Hom}(\pi_1; H)^{\Gamma^1_g} = \mathrm{End}(H)^{\Gamma_g}$ における像は 1_H であり、(4.2) から ω の $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,1}); H)^{\Gamma_{g,1}} = \mathrm{End}(H)^{\Gamma_g}$ における像は -1_H である。ゆえに $\pi_1(\Sigma_{g,1})$ 上で (4.7) が成り立つ。

他方、l のとり方から $\sigma^*\omega_l = 0$ である。また $\sigma^*\varpi^* k_0 = \varpi^* s^* k_0 = 0$ である。ゆえに $\sigma(\Gamma_{g,1})$ 上でも (4.7) が成り立つ。以上で (4.7) したがって命題が証明された。 □

これにより第３種アーベル微分 ω は写像類群 $\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g$ 上に持ち上がった。（それでは、第３種アーベル微分 ω は一番基本にある写像類群 Γ^1_g 上まで持ち上がらないか？という疑問が出てくるが、それは無理である。コホモロジー群 $H^1(\Gamma^1_g; H)$ は $\mathbb{Z}$ に同型で [Mo1] 、そのコホモロジー群 $H^1(\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g; H)$ に於ける像は k_0 を含まない。）

5. 一般森田・マンフォード類.

一般森田・マンフォード類 $m_{i,j} \in H^{2i+j-2}(\Gamma^1_g; \bigwedge^j H)$, $i+j \geq 2$, $i,j \geq 0$ を定義し簡単な場合に具体的な値をもとめることにする。短完全列

$$0 \to \pi_1 \to \pi_1 \rtimes \Gamma^1_g \xrightarrow{\pi} \Gamma^1_g \to 1$$

を考える。π は (4.3) で与えた群準同型である。これは (3.8) の状況にあてはまるから、任意の Γ^1_g-加群 M に対してファイバー積分

$$\pi_! : H^{p+2}(\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g; M) \to H^p(\Gamma^1_g; M)$$

が定義できる。

i, j を $i, j \geq 0, i+j \geq 2$ をみたす整数とする。§4 の第３種アーベル微分 $k_0 \in H^1(\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g; H)$ と (1.5) のオイラー類 $e \in H^2(\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g; \mathbb{Z})$ のベキ $e^i {k_0}^j \in H^{2i+j}(\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g; \bigwedge^j H)$ をファイバー積分したものを 第 (i,j)-一般森田・マンフォード類 とよび

$$m_{i,j} := \pi_!(e^i {k_0}^j) \in H^{2i+j-2}(\Gamma^1_g; \bigwedge^j H) \tag{5.1}$$

と表す。命名の由来は $j = 0$ のとき $m_{i+1,0}$ が第 i-森田・マンフォード類 e_i となる：$m_{i+1,0} = e_i \in H^{2i}(\Gamma^1_g; \mathbb{Z})$ からである。

$j \geq 1$ のとき無意味なものになっては仕方がないので $m_{0,2}$, $m_{1,1}$, $m_{0,3}$ の３つをしらべる。$\Omega \in \bigwedge^2 H$ によって交叉形式（cup product）の定める $H = H_1(\Sigma_g) = H^1(\Sigma_g)$ 上の symplectic 形式を表す。基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の symplectic 生成系 (3.2) を用いると $\Omega := \sum_{i=1}^g [a_i] \wedge [b_i] \in \bigwedge^2 H$ を表わされる。

命題 5,2. $m_{0,2} = \pi_!(\omega^2) = 2\Omega \in H^0(\Gamma_g^1; \bigwedge^2 H) = (\bigwedge^2 H)^{\Gamma_g^1}$.

証明. (3.3) で導入した 2-サイクル $[\Sigma_g] \in C_2(\pi_1(\Sigma_g))$ を用いる。$k_0|_{\pi_1(\Sigma_g)} = 1_H$ だから補題 3.6 により

$$m_{0,2} = \pi_!({k_0}^2) = {k_0}^2([\Sigma_g]) = {1_H}^2([\Sigma_g]) = \sum_{i=1}^{g} [a_i] \wedge [b_i] - [b_i] \wedge [a_i] = 2\Omega$$

となる。 □

これで $m_{0,2}$ が分かった。次に $m_{1,1}$ と $m_{0,3}$ をしらべる。

命題 5,3. *(1.4)* の包含写像 $\iota : \pi_1(\Sigma_g) \hookrightarrow \Gamma_g^1$ によって $m_{1,1}$ と $m_{0,3}$ を引き戻したものは

$$\iota^* m_{0,3} = -6\Omega \wedge 1_H \in H^1(\pi_1(\Sigma_g); \bigwedge^3 H)$$
$$\iota^* m_{1,1} = -(2-2g)1_H \in H^1(\pi_1(\Sigma_g); H)$$

によって与えられる。

証明. 例のごとく $\pi_1 = \pi_1(\Sigma_g)$ と略記する。まず k_0 を $\pi_1 \times \pi_1 \xrightarrow{\cong} \pi_1 \rtimes \pi_1 \subset \pi_1 \rtimes \Gamma_g^1$, $(\psi, \phi) \mapsto (\psi\phi^{-1}, \phi)$ に制限する。$(\psi, \phi) \in \pi_1 \times \pi_1$ について $k_0(\psi\phi^{-1}, \phi) = [\psi\phi^{-1}] = [\psi] - [\phi]$ だから自然射影 $\pi : \pi_1 \times \pi_1 \to \pi_1$, $(\psi, \phi) \mapsto \phi$ および $\overline{\pi} : \pi_1 \times \pi_1 \to \pi_1$, $(\psi, \phi) \mapsto \psi$ によって

$$k_0 = \overline{\pi}^* 1_H - \pi^* 1_H \in H^1(\pi_1 \times \pi_1; H)$$

とあらわされる。${1_H}^3 \in H^3(\pi_1; \bigwedge^3 H) = 0$, $e1_H \in H^3(\pi_1; H) = 0$ だから

$${k_0}^3 = -3\overline{\pi}^* {1_H}^2 \pi^* 1_H + 3\overline{\pi}^* 1_H \pi^* {1_H}^2 \in H^3(\pi_1 \times \pi_1; \bigwedge^3 H)$$
$$ek_0 = (\overline{\pi}^* e)k_0 = -\overline{\pi}^* e \pi^* 1_H \in H^3(\pi_1 \times \pi_1; H)$$

となる。そこで命題 5.2 および $1_H([\Sigma_g]) \in H^{-1}(\pi_1; H) = 0$ を使って

$$\iota^* m_{0,3} = -3{1_H}^2([\Sigma_g])1_H + 31_H([\Sigma_g]){1_H}^2 = -6\Omega \wedge 1_H + 0 = -6\Omega \wedge 1_H$$
$$\iota^* m_{1,1} = -e([\Sigma_g])1_H = -(2-2g)1_H$$

をうる。命題が示された。 □

森田先生 [Mo1] [Mo3] は $H^1(\Gamma_g^1; H) \cong \mathbb{Z}$, $H^1(\Gamma_g^1; \bigwedge^3 H) \cong \mathbb{Z}^2$ を完全に決定しておられるので、それに今の計算結果をはめ込んで次が分かる。

定理 5.4.

(1) 類 $m_{1,1}$ は群 $H^1(\Gamma_g^1; H)$ を生成する。

(2) $g \geq 5$ のとき $m_{0,2}m_{1,1}$ 及び $m_{0,3}$ は群 $H^1(\Gamma_g^1; \bigwedge^3 H \otimes \mathbb{Q})$ の基底を与える。

$m_{1,1}$ はこれで充分に理解出来た。$m_{0,3}$ はジョンソン準同型と言うもの（の -6 倍）である。これについては §をあらためて §7 で説明する。

河澄響矢（北大理）

6. 写像類群の斜交加群係数安定コホモロジー．

ここまでに述べた（境界付きの場合の）一般森田・マンフォード類の構成および（境界付きの場合の）定理 5.4 をプレプリント [Ka] に書いて E.Looijenga 氏も含めて配ったところ、Looijenga 氏から森田先生にプレプリント [L] が送られてきた。その内容は Harer 安定性定理を用いて、（境界及び基点のない）写像類群 Γ_g の有限次元有理斜交加群係数安定コホモロジーが写像類群 Γ_g の自明係数有理安定コホモロジー上の加群として、自由加群であることを示しており、その基底を我々とは違うやり方で与えていた。

彼の方法の驚くべき点は捩れ係数の場合の Ivanov 安定性定理 [I] を全く用いず、自明係数の Harer 安定性定理 [H] [I1] のみを用いたことであった。しかし一方でモジュライ空間（これは orbifold である）の上で幾何学的に計算を実行しているため torsion part についてはまったく情報が得られない。またファイバー積分をキチンと議論する代わりに Hodge 理論 [D] を用いているため与えた基底も explicit とはいえず、基点や境界のある場合には直接に計算することは出来ない。

彼に倣って自明係数の Harer 安定性定理のみを用い、我々の方法と組み合わせると次の結果が得られる [Ka1]：

定理 **6.1.** $s \geq 0, r \geq 1$ 及び $n \geq 0$ のとき

$$H^*(\Gamma^s_{g,r}; H^1(\Sigma^s_{g,r};\mathbb{Z})^{\otimes n}) = H^*(\Gamma_{g,1}; H^{\otimes n}) \otimes_{H^*(\Gamma_{g,1};\mathbb{Z})} H^*(\Gamma^s_{g,r};\mathbb{Z})$$

が $* \leq g/2 - n$ について成り立つ。さらにコホモロジー群 $H^*(\Gamma_{g,1}; H^{\otimes n})$ は安定的に代数 $H^*(\Gamma_{g,1};\mathbb{Z})$ 上の自由加群であって、その自由基底は（手直しした）一般森田・マンフォード類によって与えられる。

証明の要点は（もちろん自明係数のHarer安定性定理と）$\Gamma^s_{g,r}$-完全列

$$0 \to H^1(\Sigma^{s-1}_{g,r}) \to H^1(\Sigma^s_{g,r}) \to H^2(\Sigma^{s-1}_{g,r}, \Sigma^s_{g,r}) = \mathbb{Z} \to 0.$$

の定めるコホモロジー類 $\delta^*(1) \in H^1(\Gamma^s_{g,r}; H^1(\Sigma^{s-1}_{g,r}))$, $1 \in \mathbb{Z} = H^0(\Gamma^s_{g,r};\mathbb{Z})$ が 1 番目以外の基点を忘れる写像 $\varpi : \Gamma^s_{g,r} \to \Gamma^1_{g,1}$ による ω の引き戻し $\varpi^*\omega$ に等しいということである。

定理 6.1 の（後半部分の）交代成分をとると次が得られる。

定理 **6.2.**

$$H^*(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^* H^1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Q})) = H^*(\Gamma_{g,1};\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[m_{i,j}]$$

が全次数が $g/2$ より小さいところで成り立つ。但し整数 i 及び j は次の領域を走る。

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z};\quad i \geq 0, j \geq 1\, \mathrm{and} i + j \geq 2\}.$$

定理 6.1（及び定理 6.2）から写像類群の斜交加群係数安定コホモロジーと自明係数安定コホモロジーの差は一般森田・マンフォード類で尽きていることが分かる。

最後に §4 の観察（命題 4.6）により ω が $k_0 \in H^1(\pi_1 \rtimes \Gamma^1_g; H)$ に持ち上がる。したがって Γ^1_g の斜交加群係数安定コホモロジーについては、上述の結果に $\mathbb{Z}[e]$ 又は $\mathbb{Q}[e]$ をテンソルすればよい。

7. ジョンソン準同型と写像類群の安定コサイクル.

写像類群の曲面のホモロジー群 $H = H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ への作用は交叉形式を保つから、symplectic 群への準同型 $\Gamma_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ が定まる。これの核をトレリ群と呼び、$\mathcal{I}_g$ と表す。同様にトレリ群 $\mathcal{I}_g^1 := \mathrm{Ker}(\Gamma_g^1 \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}))$ が定義される。トレリ群で基本的なのはジョンソン準同型である [S] [J]。例によって、$\pi_1 := \pi_1(\Sigma_g)$ と略記する。まず、$\pi_1 = \pi_1(\Sigma_g)$ について写像

$$\bigwedge^2 H \to [\pi_1,\pi_1]/[\pi_1,[\pi_1,\pi_1]], \quad [\gamma_1]\wedge[\gamma_2] \mapsto \gamma_1\gamma_2{\gamma_1}^{-1}{\gamma_2}^{-1} \bmod [\pi_1,[\pi_1,\pi_1]]$$

は well-defined な同型である。Γ_g^1 したがってその部分群である $\mathcal{I}_g^1$ は基本群 π_1 に作用することを思い出す。元 $\phi \in \mathcal{I}_g^1$ をとる。トレリ群の定義から任意の $\gamma \in \pi_1$ について $\phi(\gamma)\gamma^{-1} \in \pi_1$ は交換子群 $[\pi_1,\pi_1]$ に値をもつ。そこで写像

$$\gamma \in \pi_1 \mapsto \phi(\gamma)\gamma^{-1} \bmod [\pi_1,[\pi_1,\pi_1]] \in [\pi_1,\pi_1]/[\pi_1,[\pi_1,\pi_1]] \cong \bigwedge^2 H$$

がえられるがこれは $H = {\pi_1}^{\mathrm{abel}}$ からの準同型となり $\mathrm{Hom}(H,\bigwedge^2 H) \cong H \otimes \bigwedge^2 H$ (実は $\bigwedge^3 H$)の元を定める。こうして得られる写像

$$\tau : \mathcal{I}_g^1 \to \bigwedge^3 H, \quad \phi \mapsto (\gamma \mapsto \phi(\gamma)\gamma^{-1})$$

は準同型でジョンソン準同型とよばれ、誘導される準同型 $(\mathcal{I}_g^1)^{\mathrm{abel}} \to \bigwedge^3 H$ は全射でその核は 2-torsion である [J2] 。森田 [Mo3] はこれを写像類群全体のねじれ準同型

$$\widetilde{k} : \Gamma_g^1 \to \frac{1}{2}\bigwedge^3 H$$

に拡張した。(つまり $\widetilde{k}|_{\mathcal{I}_g^1} = \tau$ が成り立つ。) ここで $\frac{1}{2}\bigwedge^3 H = \{u \in \bigwedge^3 H \otimes \mathbb{Q}; 2u \in \bigwedge^3 H\}$ である。

再び一般的な状況を考える。Q, N を一般の群とし Q が N に作用しているとする。M を $N \rtimes Q$-加群とする。p-コチェイン $c \in C^p(N;M)$ に対してその $N \rtimes Q$ への拡張 $\widetilde{c}$ を

$$\text{(7.1)} \quad \widetilde{c}(n_1q_1, n_2q_2, \ldots, n_pq_p) := c(n_1, q_1(n_2), q_1q_2(n_3), \ldots, q_1q_2\cdots q_{p-1}(n_p)) \\ n_1, n_2, \ldots, n_p \in N, \quad q_1, q_2, \ldots, q_p \in Q,$$

によって定める。この対応の Q-不変部分への制限 $C^*(N;M)^Q \to C^*(N \rtimes Q;M)$ はコチェイン写像となる。例えば (4.4) において導入した $k_0 \in Z^1(N \rtimes Q; H_1(N))$ は $1_H \in Z^1(N;H_1(N))$, $1_H(n) := [n] \in H_1(N)$ によって $k_0 := \widetilde{1_H}$ と表される。

いま N が可換群であるとする。別に群 G があり写像 $\varphi : G \to Q$ および $f : G \to N$ が与えられているとき、ふたつならべた写像 $(f,\varphi) : G \to N \rtimes Q$ が準同型であるための必要充分条件は φ が準同型であり、N を φ によって G-加群とみなすとき f が 1-コサイクル(捩れ準同型)であることである。このとき、自明係数 $\mathbb{Q}$ をとると準同型

$$\text{(7.2)} \qquad f^* : \mathrm{Hom}(\bigwedge^* N, \mathbb{Q})^Q \subset Z^*(N;\mathbb{Q})^Q \to Z^*(N \rtimes Q;\mathbb{Q}) \to Z^*(G;\mathbb{Q})$$

がえられる。つまり $\bigwedge^* N$ 上の Q-不変線型形式が G のコサイクルを定めるのである。$c \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^p N, \mathbb{Q})^Q$ とするとき $f^*c \in Z^p(G)$ は

$$\begin{aligned}(f^*c)(g_1, g_2, \ldots, g_p) &= c(f(g_1), \varphi(g_1)f(g_2), \ldots, \varphi(g_1 \cdots g_{p-1})f(g_p)) \\ &= c_* f^{\otimes p}(g_1, g_2, \ldots, g_p), \quad g_1, g_2, \ldots, g_p \in G\end{aligned}$$

とあらわされる。ここで $f^{\otimes p}$ は $f \in Z^1(G; N)$ の Alexander-Whitney 写像による p 重カップ積であり、$c_* : C^*(G; \bigwedge^p N) \to C^*(G; \mathbb{Q})$ は G-準同型 c の定めるコチェイン写像である。つまり

$$[f^*c] = c_*[f]^p \in H^p(G; \mathbb{Q}) \tag{7.3}$$

が成り立つのである。

写像類群に戻ろう。いま述べてきたことから森田 [Mo3] によるジョンソン準同型の拡張 $\widetilde{k}$ は準同型

$$\rho : \Gamma_g^1 \to \frac{1}{2}\bigwedge^3 H \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \tag{7.4}$$

および (7.2) の準同型

$$\widetilde{k}^* : \mathrm{Hom}(\bigwedge^*(\bigwedge^3 H), \mathbb{Q})^{\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})} \to Z^*(\Gamma_g^1; \mathbb{Q})$$

を誘導する。

さらに詳しく森田先生は次を示された。$\mathcal{G}$ によって端点のない連結 trivalent グラフ Γ の全体を表す。端点のないことから Γ の頂点の個数 p は偶数である。$\alpha_\Gamma \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^p(\bigwedge^3 H), \mathbb{Q})$ を、p 個ならべた $\bigwedge^3 H$ を Γ の辺のつながり方に従って、二つの H を交叉形式（カップ積）$C : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ によって縮約する写像とする。明らかに $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$-同変である。このとき

定理 7.5. $* < 2g/3$ について

$$\mathrm{Hom}(\bigwedge^*(\bigwedge^3 H), \mathbb{Q})^{\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})} = \mathbb{Q}[\alpha_\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}]$$

かくして準同型

$$\mathbb{Q}[\alpha_\Gamma; \Gamma \in \mathcal{G}] \to Z^*(\Gamma_g^1; \mathbb{Q}) \tag{7.6}$$

がえられた。trivalent グラフに対応して写像類群の安定コサイクルが大量に得られたのである。また、すべての森田・マンフォード類はこれらのコサイクルで具体的に表されるのである。

松島、村上、Borel [B] によって安定的に

$$H^*(\frac{1}{2}\bigwedge^3 H \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) = H^*(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})) \otimes \mathrm{Hom}(\bigwedge^*(\bigwedge^3 H), \mathbb{Q})^{\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})}$$

であることが知られており、$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の安定コホモロジーは Γ_g において奇数次森田・マンフォード類によって書かれることが知られている [Mo]。そこで $\widetilde{k}^*$ だけ調べれば充分なのである。

なお、以上の構成は基点なしの写像類群 Γ_g についても同様になされている。

8. 安定コサイクルの評価.

すべての trivalent グラフ $\Gamma \in \mathcal{G}$ について $\alpha_\Gamma \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^p(\bigwedge^3 H), \mathbb{Q})^{\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})}$ の定めるコホモロジー類 $\widetilde{k}^*\alpha_\Gamma \in H^*(\Gamma_g^1; \mathbb{Q})$ が森田・マンフォード類で表されることを証明する。

いま、捩れ準同型 $2\widetilde{k}$ は $H^1(\Gamma_g^1; \bigwedge^3 H)$ の元である。そこで定理 5.4 により $g \geq 5$ のとき、拡張されたジョンソン準同型 $\widetilde{k}$ は有理数上では一般森田・マンフォード類で表されることがわかる。森田先生は、精密には

命題 **8.1.** $g \geq 3$ について

$$m_{0,3} = -6\widetilde{k} \in H^1(\Gamma_g^1; \bigwedge^3 H).$$

となることを示された。このことが証明の鍵となる。

結局 §7 の後半の考察 (7.3) とあわせて

$$\widetilde{k}^*\alpha_\Gamma = (-6)^{-p}(\alpha_\Gamma)_*(m_{0,3})^p \in H^p(\Gamma_g^1; \mathbb{Q}) \tag{8.2}$$

つまり $\widetilde{k}^*\alpha_\Gamma$ は $m_{0,3}$ たちをグラフ Γ に従って交叉形式（カップ積）$C: H \otimes H \to \mathbb{Z}$ によって縮約したものである。一般森田・マンフォード類が写像 C に関する縮約について閉じていることを示せば次が得られる。

定理 **8.3.** 任意の *trivalent* グラフ $\Gamma \in \mathcal{G}$ について、コサイクル α_Γ の定めるコホモロジー類 $\widetilde{k}^*\alpha_\Gamma \in H^*(\Gamma_g^1; \mathbb{Q})$ はオイラー類 e および森田・マンフォード類 e_n, $n \geq 1$ で表される。とくに、*(7.2)* の準同型 ρ の誘導する写像

$$\rho^*: H^*(\frac{1}{2}\bigwedge^3 H \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}); \mathbb{Q}) \to H^*(\Gamma_g^1; \mathbb{Q})$$

の像は $* \ll g$ についてオイラー類 e および森田・マンフォード類 e_n, $n \geq 1$ の生成する部分代数に一致する。

基点および境界なしの写像類群 Γ_g についても $H^*(\Gamma_g; \mathbb{Q})$ が $H^*(\Gamma_g^1; \mathbb{Q})$ に埋め込まれているので同様の結果がえられる。

最後に一般森田・マンフォード類をカップ積=交叉形式 $C: H \otimes H \to \mathbb{Z}$ を $H = H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ で縮約したときの振る舞いを述べる。簡単のため境界付き写像類群 $\Gamma_{g,1}$ 上で考える。実際は Γ_g^1 でも少しの改変のもとで同様の結果が成り立つ。写像 C は縮約写像

$$C: \bigwedge^{j_1} H \otimes \bigwedge^{j_2} H \to \bigwedge^{j_1+j_2-2} H$$

$$C(v, w) = \sum_{a=1}^{j_1}\sum_{b=1}^{j_2}(-1)^{a+b+j_1-1}C(v_a \wedge w_b)v_1 \wedge \overset{\widehat{a}}{\cdots} \wedge v_{j_1} \wedge w_1 \wedge \overset{\widehat{b}}{\cdots} \wedge w_{j_2}$$

$(v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{j_1} \in \bigwedge^{j_1} H, w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_{j_2} \in \bigwedge^{j_2} H, j_1, j_2 \geq 1)$ および

$$C: \bigwedge^j H \to \bigwedge^{j-2} H$$

$$C(v_1 \wedge \cdots \wedge v_j) = \sum_{a<b}(-1)^{a+b-1}C(v_a \wedge v_b)v_1 \wedge v_2 \wedge \overset{\widehat{a}\ \ \widehat{b}}{\cdots\cdots} \wedge v_j$$

$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \in \bigwedge^j H, j \geq 2)$ を定める。結果は次のとおりである。

定理 8.4.

$$C_*(m_{i_1,j_i}m_{i_2,j_2}) = -j_1j_2m_{i_1+i_2,j_1+j_2-2} \in H^*(\Gamma_{g,1};\bigwedge^{j_1+j_2-2}H).$$

定理 8.5.

$$C_*(m_{i,j}) = \begin{cases} 0, & \text{if } j \leq 1, \\ 2g, & \text{if } (i,j) = (0,2), \\ -\frac{1}{2}j(j-1)m_{i+1,j-2}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

References

[AC] E. Arbarello and M. Cornalba, *Combinatorial and algebro-geometric cohomology classes on the moduli spaces of curves*, preprint. (1994).

[ADKP] E. Arbarello, C. DeConcini, V.G. Kac, and C. Procesi, *Moduli spaces of curves and representation theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 1–36.

[D] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénerescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 259–278.

[EE] C.J. Earle and J. Eells, *A fiber bundle description of Teichmüller theory*, J. Diff. Geom. **3** (1969), 19–43.

[GM] H. Glover and G. Mislin, *Torsion in the mapping class group and its cohomology*, J. Pure Appl.Alg. **44** (1987), 177–189.

[Ha] R.M. Hain, *Infinitesimal presentations of the Torelli groups*, preprint.

[H] J.L. Harer, *Stability of the homology of the mapping class group of orientable surfaces*, Ann. Math. **121** (1985), 215–249.

[H1] ———, *The third homology group of the moduli space of curves*, Duke Math. J. **63** (1991), 25–55.

[HS] G. Hochschild and J.-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110–134.

[Is] 石田敦, 東京大学修士論文 (1994).

[I] N. Ivanov, *On the homology stability for Teichmüller modular groups: closed surfaces and twisted coefficients*, Contemp. Math. **150** (1993), 149–194.

[I1] ———, *Complexes of curves and the Teichmüller modular group*, Russian Math. Survey **42** (1987), 55–107.

[J] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$*, Math. Ann. **249** (1980), 225–242.

[J1] ———, *The structure of the Torelli group, I*, Ann. of Math. **118** (1983), 423–442.

[J2] ———, *The structure of the Torelli group, II, III*, Topology **24** (1985), 113–144.

[Ka] 河澄響矢, *A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class groups for surfaces*, preprint. Hokkaido Univ. **292** (1995).

[Ka1] ———, *On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces*, preprint. Hokkaido Univ. **311** (1995).

[Ka2] ———, *Homology of hyperelliptic mapping class groups for surfaces*, preprint. Hokkaido Univ. **262** (1994).

[Ka3] ———, *Moduli space and complex analytic Gel'fand-Fuks cohomology of Riemann surfaces*, UTMS93-29, preprint. Univ. of Tokyo (1993).

[Ka4] ———, *Moduli space and complex analytic Gel'fand-Fuks cohomology of Riemann surfaces, II, III*, in preparation.

[Kon1] M. Kontsuvich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Commun. Math. Phys. **147** (1992), 1–23.

[Kon2] ———, *Formal (non)-commutative symplectic geometry*, The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990-1992, Birkhäuser, 1993, pp. 173–188.

[L] E. Looijenga, *Stable cohomology of the mapping class group with symplectic coefficients and of the universal Abel-Jacobi map*, Jour. Alg. Geom. **5** (1996), 135–150.

[Me] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), 239–264.

[Mo] 森田茂之, *Characteristic classes of surface bundles*, Inventiones math. **90** (1987), 551–577.

[Mo1] ———, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, I*, Ann. Inst. Fourier **39** (1989), 777–810.

[Mo2] ———, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **105** (1989), 79–101.

[Mo3] ———, *The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group*, Invent. math. **111** (1993), 197–224.

[Mo4] ———, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. **70** (1993), 699–726.

[Mu] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and Geometry., Progr. Math. **36** (1983), 271–328.

[P] R.C. Penner, *The Poincaré dual of the Weil-Petersson Kähler two-form.*, Commun. in Anal. and Geom. **1** (1993), 43–70.

[Sm] S. Smale, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.

[S] D. Sullivan, *On the intersection ring of compact 3-manifolds*, Topology **14** (1975), 275–277.

[W] S. Wolpert, *Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves*, Invent. math. **85** (1986), 119–145.

北海道大学理学部数学教室
Department of Mathematics
Faculty of Science
Hokkaido University
Sapporo 060 Japan
e-mail address: kawazumi@math.hokudai.ac.jp