数理解析研究所講究録
969巻 1996年 128-136

磁場をもつSchrödinger作用素の固有値の漸近分布について

京都大理　岩塚 明 (Akira Iwatsuka)
大阪大理　白井 慎一 (Shin-ich Shirai)

以下では次のような形のSchrödinger作用素のスペクトルギャップにおける固有値の漸近分布について考える。

$$H_V = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} - b(x)\right)^2 + V(x,y) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2).$$

ここで、$b(x)$はベクトル・ポテンシャル、$V(x,y)$は遠方で減衰するスカラー・ポテンシャルであるが、それらについての仮定を述べていくことにする。

1. $V(x,y)$についての仮定

(V.1)：$V(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，実数値であり次の評価をみたす：

$$\exists m > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta V(x,y)| \le C_{\alpha\beta} \langle x; y \rangle^{-m-\alpha-\beta} \quad (\forall \alpha, \forall \beta)$$

ここで $\langle x;y\rangle=(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ である。

次に、$\mu>0$, $a_0>0$ に対して

$$\nu_\pm(\mu;a_0)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pm x>a_0>0,\ \pm V(x,y)>\mu\}$$

と定義する。$\nu_\pm(\mu)\equiv\nu_\pm(\mu;a_0)$ について次の仮定をおく：

(V.2)： $\exists a_0>0$, $\exists\gamma_1$, $\exists\gamma_2$, $\exists\gamma_3>0$, $\exists\mu_0>0$ s.t.

$\nu_\pm(\mu;a_0)$ は $(0,\mu_0)$ で微分可能であり、

$$\gamma_1\nu_\pm(\mu;a_0)\le-\mu\nu_\pm'(\mu;a_0)\le\gamma_2\nu_\pm(\mu;a_0)$$

$$\nu_\pm(\mu;a_0)\ge\gamma_3\mu^{-\frac{2}{m}}$$

をみたす。ただし $\nu_\pm'$ は μ についての微分を表す。

注意　(V.2) をみたす $a_0>0$ のとり方は後述の漸近分布には関係しないことがわかる。

2. 磁場についての仮定

H_V における $b(x)$ を定義するために、以下のような磁場 $B(x)$ を考える。

(B.1)： $B(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$，実数値であり、単調増加　かつ

$\exists B_\pm>0$ s.t. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}B(x)=B_\pm<\infty$

ここで

$$b(x) = \int_0^x B(t)dt$$

と定義する。

すると、以上の仮定の下で、作用素 H_V は $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$（C^∞-関数であり台(support)がコンパクトなもの全体）を定義域として本質的自己共役であることが知られている。（[L-S]）

3. $V \equiv 0$ の場合

H_V において $V \equiv 0$ の場合、つまり、H_0 については次のようなことが知られている。（[Iwa]）

H_0 のスペクトル集合（$\sigma(H_0)$ とかく）は絶対連続であり、バンド構造を持つ：

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\Lambda_n^-, \Lambda_n^+]$$

ただし $\Lambda_n^\pm = (2n-1)B_\pm$

また、H_0 は次のような直積分（direct integral）分解をもつ作用素 L とユニタリ同値であることがわかる。

$$L = \int_{\mathbb{R}_\xi}^{\oplus} L(\xi)\,d\xi \qquad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$$

ただし $L(\xi) = -\dfrac{d^2}{dx^2} + (b(x) - \xi)^2 \qquad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}_x)$

この $L^2(\mathbb{R}_x)$ 上の2階常微分作用素 $L(\xi)$ については、さらに詳しく次のことが示される。([Iwa])

補題　(B.1) の仮定の下で、$\xi \in \mathbb{R}$ に対して $L(\xi)$ の固有関数の完全系 $\{\varphi_n(x,\xi)\}_{n\in N}$ と対応する固有値 $\{\lambda_n(\xi)\}$ が存在して次をみたす。

(i)　$0 < \lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \cdots \longrightarrow \infty$

(ii)　各 $\lambda_n(\xi)$ は ξ に関して解析的であり、単調増加関数。
また、$\lambda_n(\xi)$ は固有値として非退化 (non-degenerate)。

(iii)　$\varphi_n(\cdot,\xi) \in \mathcal{D}om(L(0))$ ($\forall\xi$)、かつ $\varphi_n(\cdot,\xi)$ は ξ に関しグラフノルム $|||u||| := (\|u\|_{L^2}^2 + \|L(0)u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ で考えて解析的。

(iv)　$\varphi_n(x,\xi) \in C^0(\mathbb{R}^2)$ ($\mathbb{R}^2$ 上の連続関数)、実数値かつ、各 ξ に対し $\varphi_n(\cdot,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_x)$、各 x に対して $\varphi_n(x,\cdot)$ は解析的。

注　実は $\lim_{\xi\to\pm\infty} \lambda_n(\xi) = \Lambda_n^{\pm}$ であり、$\lambda_n(\xi)$ がバンド関数になっており、この点で H_0 は周期的ポテンシャルをもつ Schrödinger 作用素と似た構造を持っている。

さて、この $\lambda_n(\xi)$ に対して次の仮定を置く。

(Λ.1) : $\exists C > 0$ s.t. $|\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi)| \geq C \quad \forall \xi, \forall j, \forall k \ (j \neq k)$

上の(Λ.1)をみたすような磁場$B(x)$が存在するか否かは自明ではないが、その十分条件として

__補題__ (B.1) に加えて、$B(x)$に次の仮定を置けば(Λ.1)は満たされる：

$$B_+ < 3B_-$$

$$\|B'\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |B'(x)| < B_+ - B_-$$

$$(B_+ - B_-)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3B_- - B_+}}\right) < \frac{B_+ + B_-}{6}$$

この条件は、ある意味で$B(x)$が定数磁場（すなわち$B(x) \equiv$定数）に近いことを保証するものである。H_Vにおいて磁場が定数の場合には、[Rai1]の中において、本質的に我々の結果と一致する結果が得られている。（[Rai1], Theorem 2.6）

4. 結果

さて、定理を述べるために$B(x)$に関する仮定をもう一つ用意する。

$(B.2)_\pm$: (B.1) に加えて

$B(x) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \|\partial_x^\alpha B\|_\infty < \infty \ (\forall \alpha) \}$ かつ

$$^{\exists}M > m \quad \text{s.t.} \quad 各\alpha に対して \; ^{\exists}C_{\alpha M} > 0$$
$$|\partial_x^{\alpha}(B_{\pm} - B(x))| \leq C_{M\alpha}\langle x\rangle^{-M} \quad \text{as } x \to \pm\infty .$$

ここで $m>0$ は (V.1) の中のものであり、この条件は $B(x)$ の $x \to \pm\infty$ での $B_{\pm}$ への近づき方を規定するものである。

<u>記号</u> 一般に自己共役作用素 A が、開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に離散スペクトル（重複度有限の孤立固有値）のみ持つとき、その（重複度も込めた）個数を $N((a,b)|A)$ で表す。

<u>定理1</u> (V.1), $(V.2)_+$ (resp. $(V.2)_-$), $(B.2)_+$ (resp. $(B.2)_-$) $(\Lambda.1)$ を仮定する。さらに、$\Lambda_n^+ < \Lambda_{n+1}^-$ (resp. $\Lambda_{n-1}^+ < \Lambda_n^-$) となる n について次が成立：

$$N((\Lambda_n^+ + \mu, M_n)|H_V) = B_+ \cdot \nu_+(\mu)(1+o(1)) \quad \text{as } \mu \downarrow 0$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{resp.}\\ N((M_{n-1}, \Lambda_n^- - \mu)|H_V) = B_- \cdot \nu_-(\mu)(1+o(1)) \quad \text{as } \mu \downarrow 0\end{array}\right)$$

ただし、$M_n = \dfrac{\Lambda_n^+ + \Lambda_{n+1}^-}{2} \quad (n \geq 1)$, $M_0 = -\infty$ である。

定理の証明の方針

まず、[Rai 1], Theorem 2.6 と同様な方法によって、

$$N((\Lambda_n^+ + \mu, M_n) | H_V) = N((\mu, \infty) | a_n(x, D_x)) + o(\mu^{-\frac{2}{m}}) \quad \text{as } \mu \downarrow 0$$

となることが示される。ただし、ここで $a(x, D_x)$ は次で定義される $L^2(\mathbb{R})$ 上の擬微分作用素である：

$$\begin{cases} a(x, D_x) u(x) = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_\eta} e^{i(x-y)\cdot\eta} a\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y)\, dy\, d\eta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (u \in L^2(\mathbb{R})) \\ a(x, \eta) = \lambda_n(x) - \Lambda_n^+ + V(b^{-1}(x), -\eta) \end{cases}$$

後は適当な phase space $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\eta$ の分割により、コンパクト自己共役作用素の固有値の漸近分布についての結果([D-R])を用いることにより証明される。

$N((M_{n-1}, \Lambda_n^- - \mu) | H_V)$ についても同様である。

補足　(V.1)における $m > 0$ が特に $0 < m < 1$ のときにはより弱い条件で同じ漸近分布が示される。正確には次のとおりである。

$(V.1)'$: $V(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, 実数値とする。さらに

$$0 < {}^\exists m < 1, \quad {}^\exists m' > 2m, \quad {}^\exists C > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$|V(x,y)| \le C\langle x;y\rangle^{-m}$$

$$|\partial_x V(x,y)| + |\partial_y V(x,y)| \le C\langle x;y\rangle^{-m'}$$

$(B.2)'_\pm$: $(B.1)$ に加えて、 ${}^\exists M > m$, ${}^\exists M' > 3M$, ${}^\exists C > 0$ s.t.

$$|B(x) - B_\pm| \le C\langle x\rangle^{-M} \quad \text{as } x \longrightarrow \pm\infty$$

$$|\partial_x B(x)| \le C\langle x\rangle^{-M'} \quad \text{as } x \longrightarrow \pm\infty$$

<u>定理2</u> $(V.1)'$, $(V.2)_+$ (resp. $(V.2)_-$), $(B.2)'_+$ (resp. $(B.2)'_-$) $(A.1)$ を仮定する。このとき定理1と同じ漸近分布を得る。

定理2は[Col] の結果を用いて、min-max principle を使うことで示される。

<u>References</u>

[Col] Colin de Verdière, Yves., L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques, Commun. Math. Phys. <u>105</u> 327-335 (1986)

[D-R] Dauge, M. and Robert, D., Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with negative order on $L^2(\mathbb{R}^n)$, Lecture Note in Math. 1256 91–122 (1987).

[Iwa] Iwatsuka, A., Examples of absolutely continuous Schrödinger operators in magnetic fields, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21 385–401 (1985).

[L-S] Leinfelder, H. and Simader, C.G., Schrödinger operators with singular magnetic potentials, Math. Z., 176 1–19 (1981).

[Rai1] Raikov, G.D., Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with homogeneous magnetic potential and decreasing electric potential I. Behaviour near the essential spectrum tips, Comm. in P.D.E., 15 (3) 407–434 (1990).

[Rai2] ______, Border-line eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with electromagnetic potential, Integral Eq. and Operator Theory, 14 875–888 (1991).

（文責 白井）