数理解析研究所講究録
969巻 1996年 153-156

小林計量の凸性について

小林正史 (Masashi Kobayashi) *

$D\subset \mathbf{C}^{m}$ を taut な領域, つまり, 単位円板 $\Delta:=\{z\in \mathbf{C}||z|<1\}$ から D への正則写像全体 $\mathcal{O}(\Delta, D)$ が正規族となるような領域とする. $TD\cong D\times \mathbf{C}^{m}$ と自然に思う. このとき, D 上の Kobayashi-Royden 計量 [5]

$$F_{D}(z;v):=\inf\{t>0|\ f\in \mathcal{O}(\Delta, D), tf'(0)=v, f(0)=z\}$$

は次の性質を満たす.

(i) F_{D} は連続,

(ii) $F_{D}(z;v)=0\Leftrightarrow v=0$,

(iii) 任意の $\lambda\in \mathbf{C}$ について,

$F_{D}(z;\lambda v)=|\lambda|F_{D}(z;v)$.

後に例をあげるが $F_{D}(z;\cdot)$ は凸 (i.e. $F_{D}(z;\cdot)$ がノルム) とは限らないことに注意する.

F_{D} を用いて D 上の Kobayashi 距離 d_{D} を次のように定義する.

$$d_{D}(z,w):=\inf_{c}\int 2F_{D}(c(t),c'(t))dt.$$

ここで, c は z と w を結ぶ D 内の曲線を動くとする.

S. Kobayashi は [3] で F_{D} が凸とは限らないことを克服するために F_{D} の再双対である Kobayashi-Busemann 計量 $\hat{F}_{D}$ を導入した. $\hat{F}_{D}$ は上の3つの性質を満たす. さらに,

*東京大学大学院数理科学研究科

$\hat{F}_D(z;\cdot)$ は凸であり

$$d_D(z,w) = \inf_c \int 2\hat{F}_D(c(t), c'(t))dt$$

が成り立つ.

元来 d_D は次のように定義されていた.[2] p を Δ 上の Poincaré 距離とする. $D \times D$ 上の Lempert 関数 d_D^* を

$$d_D^*(z,w) := \inf\{p(a,b) | f \in \mathcal{O}(\Delta, D), z = f(a), w = f(b)\}$$

と定義する. これは一般には D 上の距離ではない. そこで

$$d_D(z,w) := \lim_{l\to\infty} d_D^{(l)}(z,w)$$

とする. ここで

$$d_D^{(l)}(z,w) := \inf\{\sum_{j=1}^{l} d_D^*(z_l, z_{l+1}) | z = z_1, z_2, \ldots, z_l, z_{l+1} = w \in D\}$$

とした.

d_D は F_D または $\hat{F}_D$ の積分形でかけるわけだが, ここでは次のような問題を考える.

問題 1 d_D の方向微分は存在するのか? また存在するとしたら F_D または$\hat{F}_D$ のどちらになるのか? つまり

$$\lim_{\substack{z,w\to z_0\\ z\neq w\\ \frac{z-w}{\|z-w\|}\to v}} \frac{d_D(z,w)}{\|z-w\|} = F_D(z_0;v) \quad \text{または} \quad \hat{F}_D(z_0;v)$$

が成り立つのか?

問題 2 F_D が凸になる必要十分条件は何か?

まず $F_D(z_0;\cdot)$ が凸でない例をあげておく.T. J. Barth は [1] で $D \subset \mathbf{C}^m$ が擬凸 Balanced 領域 (i.e. 任意の $\lambda \in \Delta$ について $\lambda D \subset D$ が成り立つ) のとき, $F_D(0;\cdot) = \rho(\cdot)$ であることを示した. ここで, $\rho(\cdot)$ は D の Minkowski 関数である. したがって, 例えば

$$D := \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 |\ |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 z_2| < 1/2\}$$

のとき, $F_D(0;\cdot)$ は凸でないことがわかる.

これらの問題に関連して M. Y. Pang は [4] で

$$\lim_{\substack{z,w\to z_0\\ z\neq w\\ \frac{z-w}{\|z-w\|}\to v}} \frac{d_D^*(z,w)}{\|z-w\|} = \hat{F}_D(z_0;v)$$

であることと, z_0 が Kobayashi simple (i.e. z_0 の開近傍 U があって, 任意の $z\in U$ に対して $d_D(z_0,z)=d_D(z_0,z)$ が成り立つ) ならば $F_D(z_0;\cdot)$ が凸であることの 2 つを示した. また $F_D(z_0;\cdot)$ が凸であるならば z_0 が Kobayashi simple か？ ということを問題提起している.

問題の答えとして次を得た.

定理 $D\subset \mathbf{C}^m$ を taut 領域とし, $z_0\in D$ とする.

(i) $l\geq 2m$ ならばすべての $v\in\mathbf{C}^m$ に対して

$$\lim_{\substack{z,w\to z_0\\ z\neq w\\ \frac{z-w}{\|z-w\|}\to v}} \frac{d_D^{(l)}(z,w)}{\|z-w\|} = \hat{F}_D(z_0;v)$$

が成り立つ.

(ii) すべての $v\in\mathbf{C}^m$ に対して

$$\lim_{\substack{z,w\to z_0\\ z\neq w\\ \frac{z-w}{\|z-w\|}\to v}} \frac{d_D(z,w)}{\|z-w\|} = \hat{F}_D(z_0;v)$$

つまり, d_D の方向微分は存在して $\hat{F}_D$ になるということである. この定理から, $F_D(z_0;\cdot)$ が凸となる必要十分条件を得た.

系 次の 2 条件は同値.

(i) $F_D(z_0;\cdot)$ は凸.

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{z,w\to z_0\\ z\neq w}} \frac{d_D(z,w)}{d_D^{(1)}(z,w)} = 1.$

M. Y. Pang の結果と定理から系が成り立つことは明らかであろう. またこの系は z_0 が Kobayashi simple なら $F_D(z_0;\cdot)$ が凸, の別証明になっていることを注意しておく.

参考文献

[1] T. J. Barth, *The Kobayashi indicatrix at the center of a circular domain*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), pp. 527-530

[2] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Pure and Appl. Math 2. M. Dekker, 1970.

[3] S. Kobayashi, *A new invariant infinitesimal metric*, International Journ. Math. Sci. 58 (1990) pp. 357-416

[4] M. Y. Pang, *On infinitesimal behavior of the Kobayashi distance*, Pacific Journ. Math. Vol. 162 No. 1 (1994) pp.121-141

[5] H. L. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric in "Several complex variables II"*, Lecture Notes in Math. 189, Springer Verlag 1971 pp.125-137