

鉛直スロットにおける 1:2 定常モード相互作用

原 研 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

1. はじめに

昨年1月の研究会(数理解析研究所講究録 921 (1995) 18)で、鉛直スロットに水平磁場が作用する場合を取り上げ、低磁気 Prandtl 数、低 Prandtl 数の極限では、定常準中立モードに 1:2 相互作用が可能であり、Hartmann 数 H の値によって2種類の縮退が起こることを報告した。本報は、その続報であり、縮退パラメータを変化させた際に分岐特性の変化についての数値計算結果のみを示す。問題の定式化、および5次の非線形項を持つ振幅方程式の導出に関しては、上記講究録を参照いただきたい。

2. 振幅方程式と係数

相互作用を行っている2つの準中立攪乱の振幅を $A_1(t)$ と $A_2(t)$ とすると、5次の非線形項を持つ振幅方程式は中心多様体低減を用いて

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= A_1[\sigma_1 + \mu_{11}u + \mu_{21}v + \beta_{31}w + \gamma_{11}u^2 + (\gamma_{21} - \gamma_{41})uv + \gamma_{31}v^2] \\ &\quad + \bar{A}_1 A_2[\lambda_1 + (\beta_{11} - \beta_{31})u + \beta_{21}v + \gamma_{41}w], \\ \dot{A}_2 &= A_2[\sigma_2 + \mu_{12}u + \mu_{22}v + \beta_{32}w + (\gamma_{12} - \gamma_{42})u^2 + \gamma_{22}uv + \gamma_{32}v^2] \\ &\quad + A_1^2[\lambda_2 + \beta_{12}u + (\beta_{22} - \beta_{32})v + \gamma_{42}w]. \end{aligned} \quad (1)$$

のように求められる。 $H = 4.0432$ と 8.7701 の場合、それぞれ μ_{22} 及び λ_2 が消失する。 H がこれらの値をとるときの相互作用点と方程式(1)に含まれる係数の値を Table I に示す。これらの値は、中心多様体低減の出発点が 13×30 次元の振幅方程式の場合のものである。ここで、13は、Galerkin 射影に用いた Fourier モードの個数(複素共役を含む)を意味し、30は固有関数の個数である。

3. 簡単な平衡解

$A_n(t) = a_n(t) e^{i\theta_n(t)}$ とおき、 $\Theta(t) = \theta_2 - 2\theta_1$ とすると、 $a_1, a_2,$ と Θ に対する簡単な平衡解として、次の4種類の解が存在可能であることがわかる。

1. trivial solution : $a_1 = a_2 = 0$.
2. pure mode (P): $a_1 = 0, a_2 \neq 0$.
3. mixed mode (M_{\pm}): $a_1 a_2 \neq 0, \Theta = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
4. traveling wave (TW): $a_1 a_2 \neq 0, \Theta \neq n\pi$.

Table I. 縮退点における振幅方程式の係数値

	$\lambda_2 = 0$	$\mu_{22} = 0$
H	8.7701	4.0432
α_1	1.0602877	1.58542165
$G_0(\alpha_1)$	185278.39	20317.0974
λ_1	-5.5926	-5.69925
λ_2	0.0	3.77689
μ_{11}	-5627.6	-6311.54
μ_{21}	33086	-12337.2
μ_{12}	10198	-17296.3
μ_{22}	28708	0.0
β_{11}	2.0150×10^8	1.7197×10^7
β_{21}	7.4335×10^8	3.3616×10^7
β_{31}	1.3626×10^8	-8.5161×10^6
β_{12}	5.8107×10^7	2.9137×10^6
β_{22}	3.5310×10^8	-2.3148×10^7
β_{32}	9.3998×10^8	1.6491×10^7
γ_{11}	6.250×10^{11}	-8.276×10^9
γ_{21}	7.457×10^{12}	2.261×10^{10}
γ_{31}	-8.499×10^{11}	6.840×10^{10}
γ_{41}	-4.496×10^{11}	-2.369×10^{10}
γ_{12}	9.545×10^{12}	6.157×10^{10}
γ_{22}	1.656×10^{13}	3.237×10^{11}
γ_{32}	-6.598×10^{11}	2.256×10^9
γ_{42}	7.768×10^{11}	-1.983×10^9

4. 分岐ダイアグラム

ここでは $\sigma_1, \sigma_2, \mu_{22}$ または λ_2 をパラメータとして変化させて分岐ダイアグラムを求めた。 $\sigma_1 = r \cos \theta, \sigma_2 = r \sin \theta$ とし、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ についてプロットした。局所解を求め

るために (1) を適当にリスケールした。 $H = 4.0432$ の場合には, pure mode (P) 以外は 4 次以上の非線形項の寄与が無視でき, $H = 8.7701$ の場合には 5 次以上の項の寄与が無視できることを条件に, $r = 10^{-5}$ を採用した。 図 1 (a)-(f) は, それぞれ $H = 8.7701$ の場合の $\mu_{22} = -0.01, -0.0064, -0.0063, -0.003, 0, 0.01$ についての結果である。 μ_{22} を (a)→(f) に変化させたことは H が縮退点 4.0432 を下から上に通過することに対応する。 同様に $H = 8.7701$ の結果を図 2 (a)-(h) に示す。 これは $\lambda_2 = 10^{-5}, 0, -10^{-6}, -1.8 \times 10^{-6}, -1.9 \times 10^{-6}, -2.4 \times 10^{-6}, -2.5 \times 10^{-6}, -10^{-5}$ の結果である。 (a)→(h) は, 縮退点 8.7701 を下から上へ通過することに対応する。 図 1 (f) と図 2 (a) の分岐特性は, mixed mode (M₋) が pure mode から分岐するか trivial solution から分岐するかの違いを除くと同一である。 また, 結果は示さないが, 図 1 (a) の分岐特性は $H = 0$ の場合のそれと同一, また, 図 2 (h) の分岐特性は $H = 15$ の場合のそれと同一であることが分かった。 Table I の μ_{22} の値や λ_2 の値から, 図 1, 2 の縮退パラメターの範囲が $0 \leq H \leq 15$ と比べて非常に狭いことが明らかである。

このように, 縮退は, パラメター空間の限られた領域で本質的となるが, 縮退点の近傍における分岐像を求めることにより, 広いパラメター空間内での分岐の全体像を求めることが可能になる。

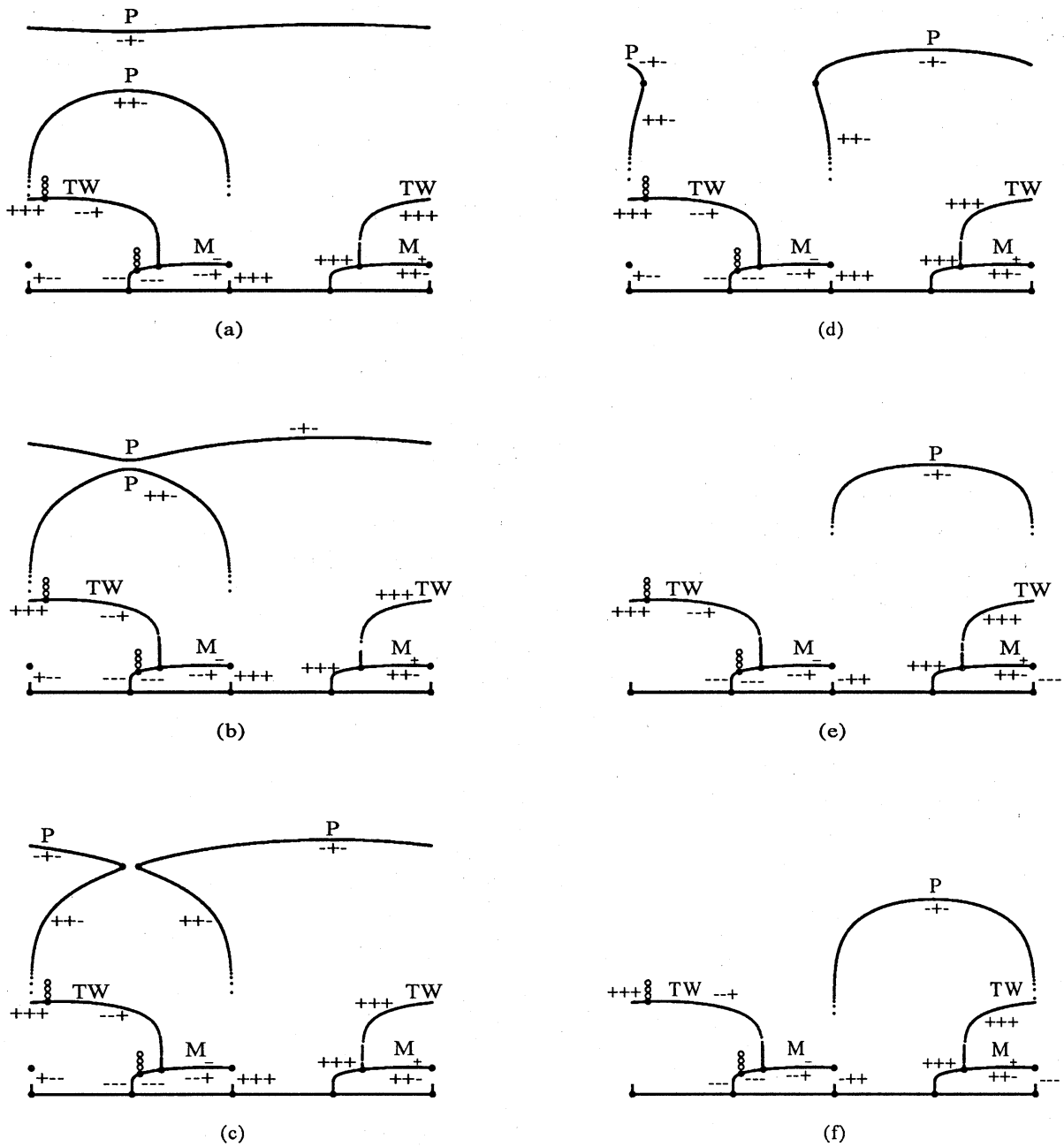


図1. $\mu_{22} = 0$ の近傍における分岐ダイアグラム. + は安定, - は不安定であることを示し, 黒丸は分岐点, 白丸は Hopf 分岐の発生を意味する. また | は M_+ と M_- の入れ替わりを意味する.

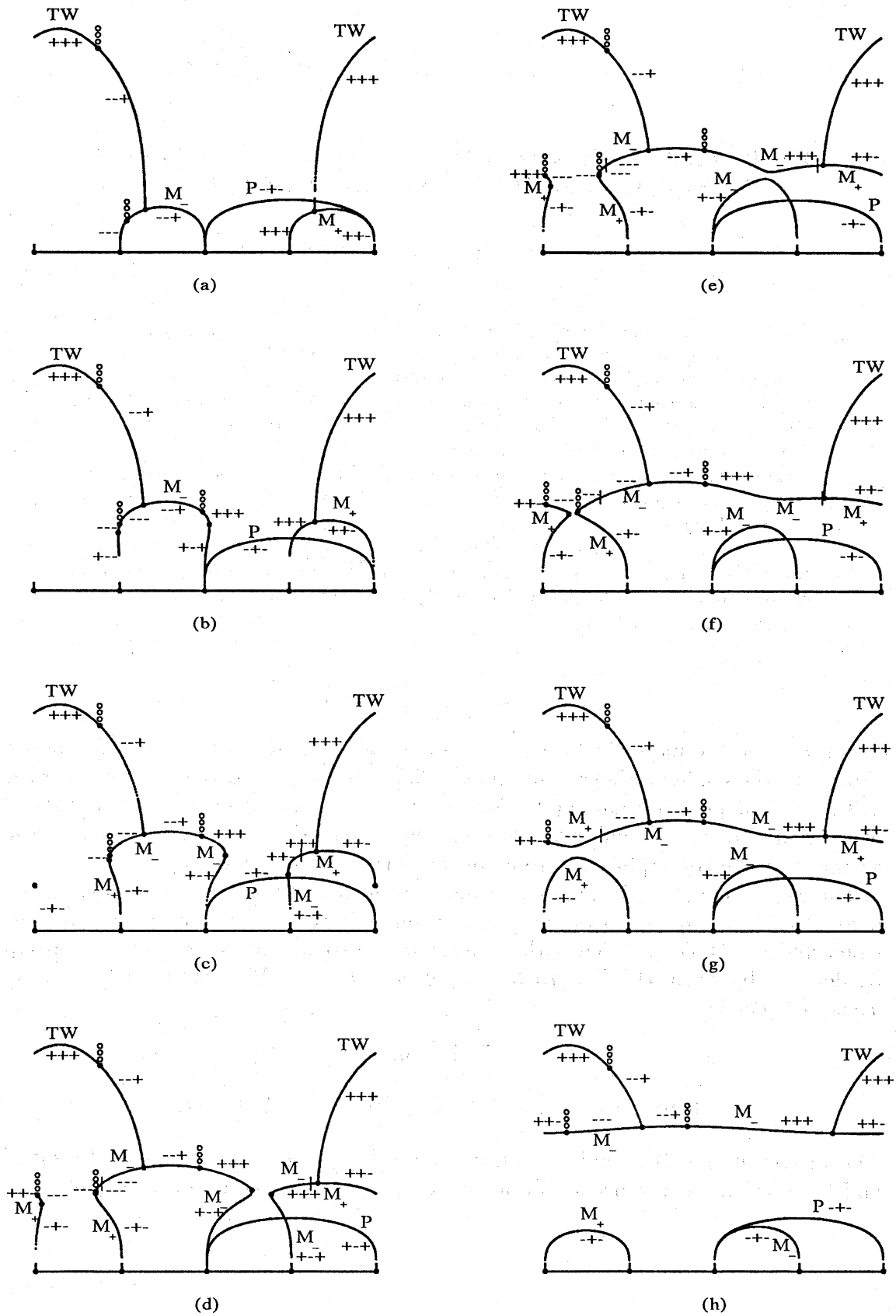


図2. $\lambda_2 = 0$ 近傍における分岐ダイアグラム. + は安定, - は不安定であることを示し, 黒丸は分岐点, 白丸は Hopf 分岐の発生を意味する. また | は M_+ と M_- の入れ替わりを意味する.