

## 渦管の成長のメカニズム — 構造垂直渦度の排除

京都工繊大 田中 満 (Mitsuru Tanaka)  
愛媛大 河原 源太 (Genta Kawahara)  
岡山大 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro Yanase)  
核融合研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

### 1. はじめに

乱流中には、組織構造あるいは秩序構造とよばれる秩序だった乱れの構造が存在することが、広く知られている。これらの構造の多くは、渦度が集中した管状の形態をとる。この渦管は、乱流エネルギーをはじめとする種々の物理量の輸送において重要な役割を果たしているものと考えられている。特に、剪断乱流中に見られる縦渦については、これまでに非常に数多くの研究がなされており、乱流エネルギーの生成にも大きく寄与することが明らかにされている。

本稿では、剪断乱流における渦管の成長のメカニズムの解明に向けて、一様剪断流中の無限に長い直線状の渦管のダイナミクスを解析的および数値的に調べた結果を報告する。以下では、まず、渦管の軸方向に揺らぎの場が一様である場合に対して、速度および渦度の揺らぎの支配方程式を渦管軸方向とともに回転する座標系で導出する。続いて、強い渦管の時間発展の初期段階を、高 Reynolds 数 ( $Re = \Gamma/\nu \gg 1$ ,  $\Gamma$ : 渦管の循環,  $\nu$ : 動粘度) かつ初期時刻 ( $St \ll 1$ ,  $S$ : 一様剪断流の剪断率) において漸近解析する。さらに、直接数値シミュレーションを行い、得られた結果を漸近理論と比較するとともに、低レイノルズ数の効果についても検討する。

### 2. 定式化

図 1 に示す一様剪断流中に直線状の渦管を配置し、その運動について考える。  $O X_1 X_2 X_3$  は静止座標系で、  $X_1$  軸を流れの向きにとる。剪断流の速度  $\bar{U}$  は、  $X_2$  方向にのみ変化し、  $\bar{U} = S X_2 \hat{X}_1$  で与えられる。ここに、剪断率  $S (> 0)$  は時間に関しても一定とし、  $X_i$  方向の単位ベクトルを  $\hat{X}_i$  で表すことにする ( $i = 1, 2, 3$ )。このとき、剪断流の渦度は、  $\bar{\Omega} = \nabla \times \bar{U} = -S \hat{X}_3$  で与えられ、  $X_3$  軸に反平行となる。以後、  $X_1$ 、  $X_2$  および  $X_3$  方向を、それぞれ流れ方向、鉛直方向、スパン方向とよぶ。渦管は、流れ方向に対して、鉛直方向にもスパン方向にも傾いているものとする。この場合、渦管は、剪断流によって流されるため、時間の経過とともに流れ方向に傾きながら引き伸ばされることになる。座標原点  $O$  は、渦管の中心線上に位置し、以下で取り扱う流れのよどみ点となる。本研究では、渦管は無限に長く、渦管に沿って渦管の渦度および速度は一様であるものと仮定する。

#### 2.1 構造座標系

図 2 に定式化の際に用いる回転座標系  $O x_1 x_2 x_3$  (以下、構造座標系とよぶ) を示す。構造座標系はつぎのようにして定義される。まず、静止座標系  $O X_1 X_2 X_3$  を  $X_1$  軸まわりに角  $\beta$  だけ回転させ、回転した  $X_3$  軸を構造座標系の  $x_3$  にとる。つぎに、  $X_1$  軸まわりに

回転させた  $O X_1 X_2 X_3$  を, さらにこの  $x_3$  軸まわりに角  $\alpha$  だけ回転させ, 回転させた後の  $X_1$  および  $X_2$  軸をそれぞれ  $x_1, x_2$  軸にとる. 回転角  $\alpha$  および  $\beta$  は,  $x_1$  軸が渦管の中心軸に一致するように決定される. 流れの対称性から一般性を失うことなく,  $0 \leq \alpha < \pi$  および  $-\pi/2 \leq \beta < \pi/2$  なる範囲における  $\alpha, \beta$  を考えればよい. 渦管は  $\alpha = 0$  では流れ方向を向き,  $\beta = -\pi/2$  ではその中心線が水平面  $X_2 = 0$  上に位置することになる.

任意のベクトルの静止座標系  $O X_1 X_2 X_3$  における成分  $(V_1, V_2, V_3)$  と, 構造座標系  $O x_1 x_2 x_3$  における成分  $(v_1, v_2, v_3)$  との間には

$$V_i = M_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

が成り立つ. ここで

$$\{M_{ij}\} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

は座標系の回転を表す変換行列である. これ以後, 繰り返された添字に対しては総和規約を適用することにする. 上と同様にして, 2つの座標系の基本ベクトルは

$$\hat{X}_i = M_{ij} \hat{x}_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

のように関係付けられる.

渦管が動くと, 構造座標系は原点  $O$  を通るある軸のまわりに回転する. その回転角速度  $\Omega$  の構造座標系における各成分は

$$\Omega_1 = (d_t \beta) \cos \alpha, \quad \Omega_2 = -(d_t \beta) \sin \alpha, \quad \Omega_3 = d_t \alpha \quad (2.4)$$

で与えられる.

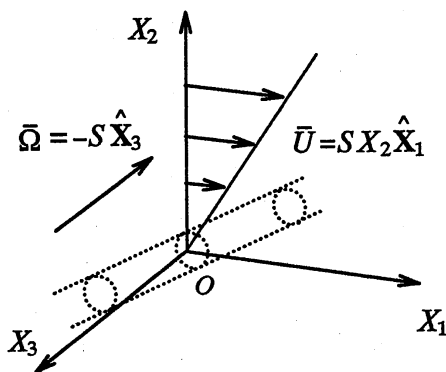


図1 一様剪断流中におかれた無限に長い直線状の渦管

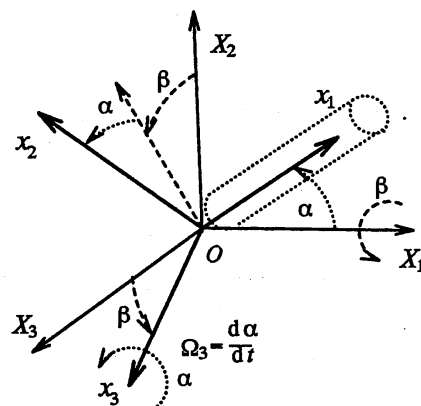


図2 構造座標系

## 2.2 基礎方程式

非圧縮流体（密度を1とする）の流れを考えると，回転系での速度場  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  は Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{x} \times d_t \boldsymbol{\Omega} - \nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.5)$$

と連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

とによって記述される．ここに

$$\Pi = p - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \quad (2.7)$$

で， $p$  は圧力である．式 (2.5) の rot をとると，渦度方程式

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = [(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla] \mathbf{u} - 2d_t \boldsymbol{\Omega} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.8)$$

が得られる．ここに， $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  は渦度である．

ここで，速度と渦度を一様剪断流と揺らぎとに分解する：

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad \boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}' \quad (2.9)$$

ただし

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} - 2\boldsymbol{\Omega} \quad (2.10)$$

は回転系における一様剪断流の寄与を表す．式 (2.9) を (2.5)，(2.8) に代入し， $\bar{\mathbf{u}}$  および  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  自身と  $\bar{p} = \text{const.}$  とが (2.5) と (2.8) を満足することを考慮すると，速度と渦度の揺らぎに対して

$$\partial_t u'_i + (u'_j + \bar{u}_j) \partial_j u'_i = (\epsilon_{ijk} \Omega_k - SM_{1i} M_{2j}) u'_j - \partial_i p' + \nu \nabla^2 u'_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.11)$$

$$\partial_t \omega'_i + (u'_j + \bar{u}_j) \partial_j \omega'_i = (\epsilon_{ijk} \Omega_k + SM_{1i} M_{2j}) \omega'_j + (\omega'_j - SM_{3j}) \partial_j u'_i + \nu \nabla^2 \omega'_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.12)$$

を得る．ここに， $\bar{u}_j = SM_{1j} M_{2k} x_k + \epsilon_{jki} x_k \Omega_i$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は一様剪断流成分である．

一般に  $\bar{u}_2$  および  $\bar{u}_3$  は座標変数  $x_1$  を陽に含むが，渦管に沿って  $\mathbf{u}'$  および  $\boldsymbol{\omega}'$  が一様であるためには  $\bar{u}_2$  と  $\bar{u}_3$  が  $x_1$  に依らないことが必要である．この条件を課して  $\boldsymbol{\Omega}$  を決定すると

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = -S \sin^2 \alpha \cos \beta \quad (2.13)$$

が得られ，さらに式 (2.4) から  $\beta$  は一定となり， $\alpha$  は

$$\alpha = \arctan \left( \frac{1}{\cot \alpha_0 + St \cos \beta} \right) \quad (2.14)$$

となる．ここに， $\alpha_0$  は時刻  $t = 0$  での  $\alpha$  の値である．以上から，渦管は  $(X_1, X_2)$  面となす角が  $\beta$  となる平面内を運動し，その際渦管と流れ方向とのなす角  $\alpha$  は (2.14) にしたがって時間経過につれゼロに近づくことがわかる．これはつまり，速度と渦度の揺らぎが渦管に

沿って一様となる場合には、その中心線は一様剪断流によって受動的に流されることを意味する。

さて、揺らぎの場合、 $u'$ ,  $\omega'$  および  $p'$  が  $x_1$  に依存しないものと仮定すると、

$$\begin{aligned} \partial_t \omega'_1 - \frac{\partial(\psi, \omega'_1)}{\partial(x_2, x_3)} - S \sin \alpha (\cos \alpha \cos \beta x_2 - \sin \beta x_3) \partial_2 \omega'_1 \\ = S \gamma(t) \omega'_1 - S \xi(t) \partial_3 u'_1 + \nu \nabla^2 \omega'_1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u'_1 - \frac{\partial(\psi, u'_1)}{\partial(x_2, x_3)} - S \sin \alpha (\cos \alpha \cos \beta x_2 - \sin \beta x_3) \partial_2 u'_1 \\ = -S \gamma(t) u'_1 - S (\cos \alpha \sin \beta \partial_2 + \cos \beta \partial_3) \psi + \nu \nabla^2 u'_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

なる  $\omega'_1$  と  $u'_1$  に対して閉じた方程式を得る。ここに、 $\psi$  ( $u'_2 = \partial_3 \psi$ ,  $u'_3 = -\partial_2 \psi$ ) は流れ関数で、 $\omega'_1$  と  $\nabla^2 \psi = -\omega'_1$  によって関係づけられる。また

$$\gamma(t) = \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta, \quad \xi(t) = 2 \sin^2 \alpha \cos \beta \quad (2.17)$$

で、 $\nabla^2 = \partial_2^2 + \partial_3^2$  である。式 (2.15) においては、渦管に沿っての流れの一様性により非線形の引き伸ばしと傾きの効果  $\omega'_j \partial_j u'_1$  が消えていることに注意する。式 (2.15) の左辺第2項は揺らぎによる移流を、第3項は一様剪断流による移流をそれぞれ表す。右辺第1項は一様剪断流による引き伸ばしを表し、第2項は、一様剪断流による渦度揺らぎの傾き  $S \cos^2 \alpha \cos \beta \partial_3 u'_1$ 、速度揺らぎによる一様剪断流の渦度の傾き  $-S \cos \beta \partial_3 u'_1$ 、および系の回転の影響  $-S \sin^2 \alpha \cos \beta \partial_3 u'_1$ 、に由来している。この3つの因子のうち、 $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq \pi/2$ , あるいは  $\beta \neq -\pi/2$  の場合、最も重要となるのは速度揺らぎによる一様剪断流の渦度の傾きの効果であるといえる。式 (2.15), (2.16) を解けば、

$$\omega'_2 \equiv \partial_3 u'_1 - \partial_1 u'_3 = \partial_3 u'_1, \quad \omega'_3 \equiv \partial_1 u'_2 - \partial_2 u'_1 = -\partial_2 u'_1 \quad (2.18)$$

によりその他の渦度成分が得られる。

ここで、後の理論解析の準備のため、平面極座標  $(r, \theta)$ , ( $x_2 = r \cos \theta$ ,  $x_3 = r \sin \theta$ ) を導入し、かつ Lundgren (1982) の変換：

$$R = A(t)^{1/2} r, \quad T = \int_0^t A(t') dt' \quad (2.19)$$

を導入する。ここに

$$A(t) \equiv \exp \left( S \int_0^t \gamma(t') dt' \right) = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \quad (2.20)$$

は渦管の伸び率を表す無次元パラメータである。このとき

$$T = \frac{\sin \alpha_0}{2S \cos \beta} \left[ \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha_0 \operatorname{cosec} \alpha_0 + \ln \left( \frac{\cot \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}{\cot \alpha_0 + \operatorname{cosec} \alpha_0} \right) \right] \quad (2.21)$$

となる。 $\alpha = 0$  または  $\beta = -\pi/2$  の場合には、 $A(t) \equiv 1$  であり、したがって  $R = r$ ,  $T = t$  となる。いずれにせよ、 $A(t) \geq 0$  であるので、 $T$  は時間  $t$  とともに単調に増加する。さらに、(2.16) の右辺第2項を消去するため、 $u'_1$  の代わりに

$$u_1 = u'_1 + S \cos \beta x_2 - S \cos \alpha \sin \beta x_3 \quad (2.22)$$

を従属変数にとることにする。こうすると、 $\partial_3 u_1$  と  $-\partial_2 u_1$  が、それぞれ絶対渦度  $\omega$  の  $x_2$  成分と  $x_3$  成分になる。

以上の変換を (2.15), (2.16) に適用すると、新しい従属変数

$$\omega(R, \theta, T) = \omega'_1(r, \theta, t)/A(t) = -\nabla_R^2 \psi, \quad u(R, \theta, T) = A(t)u_1(r, \theta, t) \quad (2.23)$$

に対する方程式

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(R, \theta)} = (\partial_T - \nu \nabla_R^2) \omega + SL_1 \omega + SL_2 u - \frac{2S^2 \gamma(t) \lambda(t)}{A(t)^2}, \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\psi, u)}{\partial(R, \theta)} = (\partial_T - \nu \nabla_R^2) u + SL_1 u \quad (2.25)$$

を最終的に得る。ここに

$$\nabla_R^2 = \partial_R^2 + \frac{1}{R} \partial_R + \frac{1}{R^2} \partial_\theta^2, \quad \lambda(t) = -\hat{x}_1 \cdot \hat{X}_3 = -\sin \alpha \sin \beta \quad (2.26)$$

で、 $L_1$  と  $L_2$  は

$$L_1 = \frac{1}{2A(t)} [\gamma(t)(\sin 2\theta \partial_\theta - R \cos 2\theta \partial_R) - \lambda(t)(\cos 2\theta \partial_\theta + R \sin 2\theta \partial_R - \partial_\theta)], \quad (2.27)$$

$$L_2 = \frac{\xi(t)}{RA(t)^{5/2}} (\cos \theta \partial_\theta + R \sin \theta \partial_R) \quad (2.28)$$

なる線形作用素である。もし仮に渦管が鉛直方向に傾いていない場合 ( $\alpha = 0$  または  $\beta = -\pi/2$ ) を考えると、(2.24) 中の  $SL_2 u$  と  $-2S\gamma(t)\lambda(t)/A(t)^2$  はゼロになる。したがって、この場合には  $\omega$  は  $u$  に依らずに決定でき、問題はきわめて単純化される。Pearson & Abernathy (1984) および Moore (1985) は一様剪断流に平行に配置された渦系の時間発展を理論解析しているが、彼らの扱った問題は、ここでは  $\alpha = 0$  の場合に含まれる。

### 3. $Re \gg 1$ および $ST \ll 1$ における漸近解析

初期時刻  $T = 0$  に一様剪断流中に循環  $\Gamma$  の渦系を置き、その後の強い渦管の時間発展の初期段階を考える。渦度揺らぎ  $\omega$  と速度  $u$  に対する初期条件は

$$\omega|_{T=0} = \frac{\Gamma \delta(R)}{\pi R}, \quad u|_{T=0} = SR \operatorname{Real}[if_\infty e^{-i\theta}] \quad (3.1)$$

とする。ここに

$$f_\infty = -\cos \alpha_0 \sin \beta - i \cos \beta = -De^{i\varphi_0}, \quad (3.2)$$

$$D = (\cos^2 \alpha_0 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta)^{1/2}, \quad \varphi_0 = \arctan \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha_0 \sin \beta} \right). \quad (3.3)$$

ここでは、Reynolds 数  $Re$  を

$$Re = \frac{\Gamma}{2\pi\nu} \quad (3.4)$$

のように定義し,

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi Re} = \frac{\nu}{\Gamma} \ll 1 \quad (3.5)$$

とする. 以下, 高 Reynolds 数 ( $\epsilon \ll 1$ ) かつ時間発展初期 ( $ST \ll 1$ ) において, (2.24) および (2.25) の漸近解析を行う.

### 3.1 スケーリング

式 (2.24) および (2.25) を無次元化するため, 剪断率  $S$  と 動粘度  $\nu$  を用いる. 表 1 にここで用いるスケーリングの詳細を示す. 表中では無次元変数を上付 \* で表している. ただし,  $\omega^*$  と  $\psi^*$  については,  $\Gamma$  に依らないようにスケーリングされていることに注意する.

表 1 変数のスケーリング

Variables	$T^*$	$R^*$	$\omega^*$	$\psi^*$	$u^*$
Units	$1/S$	$(\nu/S)^{1/2}$	$\epsilon^{-1}S (= \Gamma S/\nu)$	$\epsilon^{-1}\nu (= \Gamma)$	$(\nu S)^{1/2}$

表 1 の無次元変数を (2.24), (2.25) に導入し, \* を省略すると

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(R, \theta)} - \epsilon(\partial_T - \nabla_R^2)\omega = \epsilon L_1\omega + \epsilon^2 L_2 u - \epsilon^2 \frac{2\gamma(t)\lambda(t)}{A(t)^2}, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\psi, u)}{\partial(R, \theta)} - \epsilon(\partial_T - \nabla_R^2)u = \epsilon L_1 u \quad (3.7)$$

が得られる.

### 3.2 初期時刻における近似

初期時刻  $T = 0$  に置かれた渦糸に由来する時間発展初期の強い渦管を考えると, そこでは粘性の影響 [(3.6), (3.7) の左辺] が支配的で, 一様剪断流による効果 [(3.6), (3.7) の右辺] はそれに対する補正効果であると考えられる. そこで, (3.6) および (3.7) の解として

$$\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots, \quad \psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \dots, \quad u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots \quad (3.8)$$

のような形のものを求めることにする. これは (3.6), (3.7) の右辺を逐次的に取り込んでいくような展開である. ここに,  $\omega^{(j)} = -\nabla_R^2 \psi^{(j)}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) である. 式 (3.8) において,  $\omega^{(0)}$  と  $\psi^{(0)}$  は強い拡散渦を表し,  $u^{(0)}$  はその拡散渦が剪断流に及ぼす影響を表すものとする. そして,  $\omega^{(j)}$  と  $\psi^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) によって, 順次渦管と剪断流との高次の相互作用を取り入れることにする. 式 (3.8) を (3.6), (3.7) に代入すると, リーディング・オーダーにおいて

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\psi^{(0)}, \omega^{(0)})}{\partial(R, \theta)} - \epsilon(\partial_T - \nabla_R^2)\omega^{(0)} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\psi^{(0)}, u^{(0)})}{\partial(R, \theta)} - \epsilon(\partial_T - \nabla_R^2)u^{(0)} = 0 \quad (3.10)$$

を得る。さらに、渦度に対する次の次数で

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial(\psi^{(0)}, \omega^{(1)})}{\partial(R, \theta)} + \frac{\partial(\psi^{(1)}, \omega^{(0)})}{\partial(R, \theta)} \right] - \epsilon(\partial_T - \nabla_R^2)\omega^{(1)} = \epsilon L_1 \omega^{(0)} + \epsilon^2 L_2 u^{(0)} - \epsilon^2 \frac{2\gamma(t)\lambda(t)}{A(t)^2}, \quad (3.11)$$

.....

を得る。

### 3.3 渦芯からの渦管垂直渦度の排除

まず、リーディング・オーダーの解について考える。初期条件 (3.1) の下での (3.9) の解は

$$\omega^{(0)} = \frac{1}{4\pi T} e^{-\eta^2} \quad (3.12)$$

によって与えられる。ここに、 $\eta = R/(2T^{1/2})$  は相似変数である。解 (3.12) は拡散渦を表し、対応する  $\eta = 0$  でゼロとなる流れ関数は

$$\psi^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{\eta_1} (1 - e^{-\eta_1^2}) d\eta_1 \quad (3.13)$$

で与えられる。

また、(3.10) の解として変数分離形の相似解

$$u^{(0)} = R \operatorname{Real}[if(\eta)e^{-i\theta}] \quad (3.14)$$

を仮定して代入すると

$$f'' + \left(2\eta + \frac{3}{\eta}\right) f' + iRe \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} f = 0 \quad (3.15)$$

を得る。上式、そして以下において ' は  $\eta$  による微分を表す。式 (3.15) の境界条件は、 $f(\eta)$  が  $\eta = 0$  で正則で、かつ  $f(\infty) = -De^{i\varphi_0}$  となることである。 $\eta \ll Re^{-1/2}$  においては、正則な解は

$$f(\eta) = c_0 \left[ 1 - \frac{iRe}{8} \eta^2 + \left( \frac{iRe}{24} - \frac{Re^2}{192} \right) \eta^4 + \dots \right] \quad (3.16)$$

のように展開される。Moore (1985) は、一様剪断流に平行に配置された渦系の時間発展を理論解析し (ここでは  $\alpha = 0$  の場合に相当)、(3.15) と同一の結果を得ている。Moore は WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) 法を用いて  $Re \gg 1$  での漸近解を求め、(3.16) 中の定数  $c_0$  を評価している。ここでも、Moore の方法にしたがって  $c_0$  を評価すると、高 Reynolds 数において

$$c_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} De^{i(\varphi_0 - \pi/2)} Re \exp[Re^{1/2}(e^{3\pi i/4} \ln Re^{1/4} + e^{3\pi i/4} \mu + \rho)] \quad (3.17)$$

を得る。ここに

$$\mu = \int_0^1 H(\eta_1)^{1/2} d\eta_1 + \int_1^\infty [H(\eta_1)^{1/2} - 1/\eta_1] d\eta_1, \quad \rho = \frac{1}{2} e^{3\pi i/4} \ln 2 + \frac{1}{2} 2^{-1/2} \left[ \frac{\pi}{4} + 1 + i \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) \right] \quad (3.18)$$

で,  $H(\eta) = (1 - e^{-\eta^2})/\eta^2$  である. 渦管に垂直な絶対渦度は

$$\omega_2 = A(t)^{-1/2} \partial_3 u_1 = A(t)^{-1/2} \text{Real} \left[ f + \frac{1}{2} \eta f' - \frac{1}{2} \eta f' e^{-i2\theta} \right], \quad (3.19)$$

$$\omega_3 = -A(t)^{-1/2} \partial_2 u_1 = A(t)^{-1/2} \text{Imag} \left[ f + \frac{1}{2} \eta f' + \frac{1}{2} \eta f' e^{-i2\theta} \right] \quad (3.20)$$

で与えられ, 原点  $\eta = 0$  近傍での渦管垂直渦度の大きさは  $A(t)^{-1/2} |c_0|$  となる. 式 (3.17) から  $c_0$  は  $Re$  の増加とともに指数的に小さくなるため,  $Re \gg 1$  では渦芯から渦管垂直渦度が消滅することがわかる. つまり, 渦芯においては, 一様剪断流の渦度のうち, 渦管に垂直な成分は排除され, 平行な成分のみが残されることになる. この垂直渦度の排除は, 一様剪断流の渦度の垂直成分が渦管の誘導する速度によって巻き付きかつ引き伸ばされ, 最終的には粘性によって拡散するために引き起こされる (§4.2 の 図 3 参照).

### 3.4 一様剪断流による渦芯の変形

つぎに, (3.11) の解について考える. リーディング・オーダーの流れ関数  $\psi^{(0)}$  には陽に  $T$  が現れないので,  $T \ll 1$  において

$$\psi^{(1)}(R, \theta, T) = T\psi^{(1,1)}(\eta, \theta) + T^2\psi^{(1,2)}(\eta, \theta) + \dots \quad (3.21)$$

のように解を  $T$  の 1 次から始まるべき級数に展開する. また, 対応する渦度は,

$$\omega^{(1,j-1)} = -\frac{1}{T^{j-1}} \nabla_R^2 (T^j \psi^{(1,j)}) = -\frac{1}{4} \nabla_\eta^2 \psi^{(1,j)} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.22)$$

となるので,

$$\omega^{(1)}(R, \theta, T) = \omega^{(1,0)}(\eta, \theta) + T\omega^{(1,1)}(\eta, \theta) + \dots \quad (3.23)$$

のような  $T$  の 0 次から始まる級数に展開される. ここに

$$\nabla_\eta^2 = \partial_\eta^2 + \frac{1}{\eta} \partial_\eta + \frac{1}{\eta^2} \partial_\theta^2. \quad (3.24)$$

である.  $T \ll 1$  に対して, 線形作用素  $L_1$  に含まれる時間依存因子は

$$\frac{\gamma}{A} = \gamma_0 + \gamma_1 T + \dots, \quad \frac{\lambda}{A} = \lambda_0 + \lambda_1 T + \dots \quad (3.25)$$

のように Taylor 展開される. ここに

$$\gamma_0 = \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \beta, \quad \gamma_1 = \sin^2 \alpha_0 (1 - 3 \cos^2 \alpha_0) \cos^2 \beta, \quad (3.26)$$

$$\lambda_0 = -\sin \alpha_0 \sin \beta, \quad \lambda_1 = 2 \cos \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 \cos \beta \sin \beta \quad (3.27)$$

である. 以上の (3.21), (3.23), (3.25) を (3.11) に代入し,  $T^{-1}$  オーダーの項を等しいとおくと

$$\frac{1}{4\eta} \left[ \frac{\partial(\psi^{(0)}, \omega^{(1,0)})}{\partial(\eta, \theta)} + \frac{\partial(\psi^{(1,1)}, \omega^{(0,0)})}{\partial(\eta, \theta)} \right] = -\epsilon \frac{1}{2} \eta \partial_\eta \omega^{(1,0)} - \epsilon \frac{1}{4} \nabla_\eta^2 \omega^{(1,0)} + \epsilon L_{10} \omega^{(0,0)} \quad (3.28)$$



が得られ、同様に  $T^0$  オーダーでは

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\eta} \left[ \frac{\partial(\psi^{(0)}, \omega^{(1,1)})}{\partial(\eta, \theta)} + \frac{\partial(\psi^{(1,2)}, \omega^{(0,0)})}{\partial(\eta, \theta)} \right] &= \epsilon(1 - \frac{1}{2}\eta\partial_\eta)\omega^{(1,1)} - \epsilon\frac{1}{4}\nabla_\eta^2\omega^{(1,1)} \\ &+ \epsilon L_{11}\omega^{(0,0)} + \epsilon^2 L_{20}u^{(0,0)} - \epsilon^2 2\gamma_0\lambda_0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

が得られる。ここに

$$\omega^{(0,0)} = T\omega^{(0)} = e^{-\eta^2}/4\pi, \quad u^{(0,0)} = u^{(0)}/R = \text{Real}[if(\eta)e^{-i\theta}], \quad (3.30)$$

$$L_{10} = \frac{1}{2}[\gamma_0(\sin 2\theta\partial_\theta - \eta \cos 2\theta\partial_\eta) - \lambda_0(\cos 2\theta\partial_\theta + \eta \sin 2\theta\partial_\eta - \partial_\theta)], \quad (3.31)$$

$$L_{11} = \frac{1}{2}[\gamma_1(\sin 2\theta\partial_\theta - \eta \cos 2\theta\partial_\eta) - \lambda_1(\cos 2\theta\partial_\theta + \eta \sin 2\theta\partial_\eta - \partial_\theta)], \quad (3.32)$$

$$L_{20} = \xi_0[\cos \theta\partial_\theta + \sin \theta(1 + \eta\partial_\eta)], \quad \xi_0 = 2 \sin^2 \alpha_0 \cos \beta \quad (3.33)$$

である。

$\omega^{(0,0)}$  と  $\psi^{(0)}$  は  $\theta$  に依存しないので、(3.28) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\eta} \partial_\theta \left[ \frac{1}{4}(\partial_\eta\psi^{(0)})\nabla_\eta^2\psi^{(1,1)} + (\partial_\eta\omega^{(0,0)})\psi^{(1,1)} \right] &= -\epsilon\frac{1}{8}\eta\partial_\eta\nabla_\eta^2\psi^{(1,1)} \\ &- \epsilon\frac{1}{16}\nabla_\eta^4\psi^{(1,1)} + \epsilon\frac{1}{2}B_0\eta(\partial_\eta\omega^{(0,0)})\text{Real}[e^{i(2\theta+\phi_0)}] \end{aligned} \quad (3.34)$$

のようになる。ここに

$$B_0 = (\gamma_0^2 + \lambda_0^2)^{1/2}, \quad \phi_0 = \arctan\left(-\frac{\lambda_0}{\gamma_0}\right) \quad (3.35)$$

である。式 (3.34) の解を

$$\psi^{(1,1)} = \text{Real}[F_1(\eta)e^{i(2\theta+\phi_0)}] \quad (3.36)$$

のように変数分離形でおくと

$$\begin{aligned} \epsilon \left[ F_1^{iV} + 2 \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) F_1''' + \left( 2 - \frac{9}{\eta^2} \right) F_1'' - \frac{1}{\eta} \left( 10 - \frac{9}{\eta^2} \right) F_1' + \frac{16}{\eta^2} F_1 \right] \\ - \frac{i}{\pi} \left[ \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} \left( F_1''' + \frac{1}{\eta} F_1'' - \frac{4}{\eta^2} F_1' \right) + 4e^{-\eta^2} F_1 \right] = -\epsilon\frac{4}{\pi}B_0\eta^2e^{-\eta^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

が得られる。境界条件は、 $F_1(\eta)$  が  $\eta = 0$  で正則で、かつ  $\eta \rightarrow \infty$  で  $F_1(\eta)$  が有界となることである。高 Reynolds 数 ( $\epsilon \ll 1$ ) において

$$F_1 = F_{10} + \epsilon F_{11} + \dots \quad (3.38)$$

なる形の (3.37) の解を仮定すると、 $\epsilon^0$  オーダーで

$$F_{10}'' + \frac{1}{\eta}F_{10}' - \frac{4}{\eta^2}F_{10} + \frac{4\eta^2}{e^{\eta^2} - 1}F_{10} = 0 \quad (3.39)$$

が得られる。式 (3.39) の解のうち、上記の境界条件を満足するのは自明な解  $F_{10}(\eta) \equiv 0$  に限られる。一方、 $\epsilon$  オーダーの解は

$$\text{Real}[F_{11}(\eta)] \equiv 0, \quad \text{Imag}[F_{11}(\eta)] = -B_0 f_1(\eta) \quad (3.40)$$

で与えられ、実関数  $f_1$  は

$$f_1'' + \frac{1}{\eta} f_1' - \frac{4}{\eta^2} f_1 = \frac{4\eta^2}{e^{\eta^2} - 1} (\eta^2 - f_1) \quad (3.41)$$

によって決定される。式 (3.41) は、Moffatt, Kida & Ohkitani (1994) が非軸対称 Burgers 渦管の高 Reynolds 数極限での解析で得たものと同一である。対応する渦度は

$$\omega^{(1,0)} = -\frac{1}{4} \nabla_\eta^2 \psi^{(1,1)} = -\epsilon \Omega B_0 \sin(2\theta + \phi_0) + O(\epsilon^2) \quad (3.42)$$

で与えられる。ここに

$$\Omega(\eta) = \frac{\eta^2}{e^{\eta^2} - 1} (\eta^2 - f_1) \quad (3.43)$$

で、Moffatt, Kida & Ohkitani によって  $\omega^{(1,0)}$  は 4 重極状の分布をもつことが示されている。つまり、 $\omega^{(1,0)}$  は、一様剪断流によって渦管の断面が円形から楕円状に変形する効果を表す。

### 3.5 一様剪断流の渦度の渦管平行成分の引き伸ばし

$T^0$  オーダーの式 (3.29) は、以上の結果から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\eta} \partial_\theta \left[ \frac{1}{4} (\partial_\eta \psi^{(0)}) \nabla_\eta^2 \psi^{(1,2)} + (\partial_\eta \omega^{(0,0)}) \psi^{(1,2)} \right] \\ &= \epsilon \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{2} \eta \partial_\eta \right) \psi^{(1,2)} - \epsilon \frac{1}{16} \nabla_\eta^4 \psi^{(1,2)} - \epsilon \frac{1}{4\pi} B_1 \eta^2 e^{-\eta^2} \text{Real}[e^{-i(2\theta + \phi_1)}] \\ & \quad + \epsilon^2 \frac{1}{2} \xi_0 \eta \text{Real}[f' e^{-i2\theta}] + \epsilon^2 \frac{1}{2} \xi_0 \text{Real}[2f + \eta f'] + \epsilon^2 2\gamma_0 \lambda_0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

のように表される。ここに

$$B_1 = (\gamma_1^2 + \lambda_1^2)^{1/2}, \quad \phi_1 = \arctan \left( -\frac{\lambda_1}{\gamma_1} \right) \quad (3.45)$$

である。式 (3.44) の解として

$$\psi^{(1,2)} = \text{Real}[F_2(\eta) e^{-i2\theta}] + G_1(\eta) \quad (3.46)$$

なる形を仮定すると、

$$\begin{aligned} & \epsilon \left[ F_2^{iv} + 2 \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) F_2''' - \left( 2 + \frac{9}{\eta^2} \right) F_2'' - \frac{1}{\eta} \left( 14 - \frac{9}{\eta^2} \right) F_2' + \frac{32}{\eta^2} F_2 \right] \\ & + \frac{i}{\pi} \left[ \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} \left( F_2'' + \frac{1}{\eta} F_2' - \frac{4}{\eta^2} F_2 \right) + 4e^{-\eta^2} F_2 \right] = -\epsilon \frac{4}{\pi} B_1 e^{-i\phi_1} \eta^2 e^{-\eta^2} + \epsilon^2 8\xi_0 \eta f', \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$M_1'' + \left(2\eta + \frac{1}{\eta}\right) M_1' - 4M_1 = 2\text{Real}[\xi_0(2f + \eta f') - 4\gamma_0\lambda_0] \quad (3.48)$$

が得られる。これらの式の境界条件は、 $\eta = 0$  で正則で、かつ  $\eta \rightarrow \infty$  で有界となることである。ここに、 $G_1(\eta)$  は

$$-\frac{1}{4}\nabla_\eta^2 G_1 = \epsilon M_1(\eta) \quad (3.49)$$

を満たす。

式 (3.47) の解は、右辺第2項中の  $f'$  が  $Re$  に依存するため、 $\epsilon$  のべき級数形では表すことができない。しかしながら、 $\eta \ll 1$  の領域では  $f'$  は垂直渦度の排除機構によって  $Re$  とともに指数的に小さくなるので、この領域での解を考える際にはこの項を落とすことができると考えられる。すると、 $\epsilon \ll 1$  に対して

$$F_2 = F_{20} + \epsilon F_{21} + \dots, \quad (3.50)$$

の形におくことが許される。式 (3.47) の  $\epsilon^0$  オーダーでは (3.39) と同一の式が得られ、したがって  $F_{20}(\eta) \equiv 0$  となる。また、 $\epsilon$  オーダーの解は  $f_1$  を用いて

$$F_{21}(\eta) = iB_1 e^{-i\phi_1} f_1(\eta) \quad (3.51)$$

と表される。これは、一様剪断流による渦管断面の変形における高次の効果を表す。

さて、式 (3.48) について考える。式 (3.48) に付随する斉次方程式の1組の基本解として

$$M_a = 1 + \eta^2, \quad M_b = (1 + \eta^2) \int_\eta^\infty \frac{e^{-s^2}}{s(1+s^2)^2} ds \quad (3.52)$$

がある。これらに基づく定数変化法によって、(3.48) の解を

$$M_1 = 2\gamma_0\lambda_0 + (c_a + \tilde{M}_a)M_a + (c_b + \tilde{M}_b)M_b \quad (3.53)$$

のように表すことができる。ここに

$$\tilde{M}_a(\eta) = 2\xi_0 \int_0^\eta s e^{s^2} \text{Real}[2f(s) + sf'(s)] M_b(s) ds, \quad (3.54)$$

$$\tilde{M}_b(\eta) = -2\xi_0 \int_0^\eta s e^{s^2} \text{Real}[2f(s) + sf'(s)] M_a(s) ds \quad (3.55)$$

で、 $c_a, c_b$  は境界条件から決定される定数である。 $Re \gg 1$  に対して、(3.53) の  $\eta \ll Re^{-1/2}$  における漸近評価から

$$M_1 \sim 2\gamma_0\lambda_0 + c_a - c_b \ln \eta \quad (3.56)$$

が得られ、 $\eta = 0$  で  $M_1$  が正則であることから、 $c_b = 0$  を得る。一方、 $\eta \gg Re^{1/2}$  での漸近評価を試みると

$$M_1 \sim \left(c_a + \frac{8}{Re} \xi_0 D \sin \varphi_0\right) (1 + \eta^2) \quad (3.57)$$

が得られ,  $\eta \rightarrow \infty$  で  $M_1$  が有界であることから

$$c_a = -\frac{8}{Re} \xi_0 D \sin \varphi_0 = O(\epsilon) \quad (3.58)$$

を得る.

以上から,  $\eta \ll 1$  において

$$\omega^{(1,1)} = -\epsilon B_1 \Omega(\eta) \sin(2\theta + \phi_1) + \epsilon M_1(\eta) + O(\epsilon^2) \quad (3.59)$$

となり, 結局, ここまでの近似の段階で, 渦管と一様剪断流との相互作用を表す高次の渦度  $\omega^{(1)}$  が式 (3.42) と (3.59) より

$$\omega^{(1)} = -\epsilon \Omega(\eta) [B_0 \sin(2\theta + \phi_0) + T B_1 \sin(2\theta + \phi_1)] + \epsilon T M_1(\eta) + O(\epsilon^2) \quad (3.60)$$

によって与えられることになる. 原点  $\eta = 0$  での  $\omega^{(1)}$  は,  $\Omega(0) = 0$  となること, および (3.56), (3.58) の結果から

$$\omega^{(1)}|_{\eta=0} = 2T\epsilon\gamma_0\lambda_0 + O(\epsilon^2) \sim T\partial_T[\epsilon A(t)\lambda_0 - \epsilon\lambda(t)]|_{T=0} \quad (3.61)$$

となる. 式 (3.61) 中の  $\epsilon\lambda(t)$  は一様剪断流の渦度の渦管平行成分に相当し (式 (2.26) 参照), 最右辺が  $\epsilon A(t)\lambda_0 - \epsilon\lambda(t)$  の Taylor 展開の第 1 次項 (第 0 次項はゼロ) を表すことは明らかである. したがって, 高 Reynolds 数においては, 渦芯内の一様剪断流の渦度の渦管垂直成分が消滅すると同時に, 残りの渦管に平行な渦度成分は, 一様剪断流による引き伸ばしを受けることがわかる.

#### 4. 直接数値計算

##### 4.1 数値計算法

式 (2.15) と (2.16) の直接数値シミュレーションを空間微分にはスペクトル法, 時間積分にはルンゲ-クッタ-ギル法を用いて行なう. 初期の渦度場はその揺らぎ成分が次のように単一の渦管を表現するように与える.

$$\omega'_1 = \omega_0 \exp[-\{(x_2^2 + x_3^2)/r_0^2\}] \quad (4.1)$$

ここに,  $\omega_0, r_0$  は, それぞれ渦管の強さ, 太さを表す. このとき, 循環は  $\Gamma = \pi\omega_0 r_0^2$  と表される. 一方, 初期の速度場に関しては, その揺らぎ成分をゼロ ( $u'_1 = 0$ ) とする. 垂直渦度の揺らぎ成分は (2.18) からわかるようにゼロであるが, 一様剪断流の渦度が存在するのでその絶対渦度はゼロではない.

渦の強さ, 太さ ( $\omega_0, r_0$ ), 傾き角 ( $\alpha, \beta$ ) を変えて多くの計算を行なった. ここでは, 実在の乱流で観測されている縦渦程度の太さ  $r_0 = 6.22(\nu/S)^{1/2}$  の渦管に話を限定する. また, 強さに関しては, 現実的な値  $\omega_0 = 3S$  の渦と非常に強い渦  $\omega_0 = 30S$  のふたつの場合について考察する. 非常に強い渦を考察するのは, 理論との比較を容易にするためである. 式 (3.4) で定義される渦レイノルズ数は, それぞれ  $Re = 58.1, 581$  である.

渦の流れ方向からの傾きの効果を明確にするため、水平方向の傾きを  $\beta = \pm 45^\circ$ 、垂直方向の角度を  $\alpha = 54.7356^\circ$  と大きくとる。これらは、それぞれ、 $\hat{X}_1 + \hat{X}_2 \pm \hat{X}_3$  の方向に対応する。以下では、 $(X_1, X_2)$  平面から剪断の渦度と同方向 ( $\beta < 0^\circ$ )、反対方向 ( $\beta > 0^\circ$ ) に傾いている渦をそれぞれ cyclone, anti-cyclone とよぶ。これら2つの場合に加え、水平方向に傾きのない neutral な場合 ( $\alpha = 45^\circ, \beta = 0^\circ, \hat{X}_1 + \hat{X}_2$  の方向) についても考察する。渦管は時間とともに流れ方向に傾き  $\alpha$  は減少する。例えば、 $St = 3$  での  $\alpha$  の値は、neutral な場合が  $14.0^\circ$ 、cyclonic と anti-cyclonic な場合がともに  $19.5^\circ$  となる。§2. で述べたように、 $\beta$  は一定である。高レイノルズ数、低レイノルズ数それぞれに対して、表2に示されるパラメータを用いて、上述の3つの異なる角度の計算を  $St = 0$  から5まで行なった。

表2 数値計算における各種パラメータ

レイノルズ数	剪断率 $S$	動粘度 $\nu$	時間刻み	格子数	格子間隔 $\Delta x_3$
581	1.00	$7.81 \times 10^{-5}$	$3.91 \times 10^{-3}$	$1024 \times 1024$	$0.694(\nu/S)^{1/2}$
58.1	1.00	$3.13 \times 10^{-4}$	$2.50 \times 10^{-2}$	$256 \times 256$	$1.39(\nu/S)^{1/2}$

#### 4.2 漸近解析との比較

ここでは、数値計算の結果について高レイノルズ数を中心に示すとともに、§3 で考察した理論解析との比較を行う。理論における渦の傾き角  $\alpha, \beta$  の値は、その時刻での数値計算の値に合わせる。また、レイノルズ数も高レイノルズ数の数値計算に合わせ  $Re = 581$  とする。§3 の解析は、その適用範囲が  $t \ll 1$ 、かつ、無限に細い渦管に限られているので、 $O(1)$  の時間範囲、有限の太さの渦管を扱う数値計算に、そのまま適用することはできない。そこで、まず、漸近解析において得られた表式の有限時間、有限太さへの拡張を試みる。

式 (2.24) を近似して、渦近傍において近似的に成り立つ解を導出する。以下に示すように数値計算においても、渦周辺の比較的広い範囲で垂直渦度が排除されることから、式 (2.24) において垂直絶対渦度との相互作用を表す  $SL_2u$  項を無視する。また、漸近解析の式 (3.42) からも予想されるように、 $\eta \ll 1$  において渦の変形の効果は小さいものと思われるので、 $SL_1\omega$  も無視する。この近似式は

$$\omega_1'(t) = \omega_1^{(0)} + \omega_1^{(1)} \quad (4.2)$$

$$\omega_1^{(0)} = \frac{\Gamma}{\pi r_0(t)^2} e^{-\eta^2}, \quad \omega_1^{(1)} = A(t)\bar{\Omega}_1(0) - \bar{\Omega}_1(t) \quad (4.3)$$

のような軸対称解をもつ。ここに

$$r_0(t) = \left( \frac{r_0^2 + 4\nu T(t)}{A(t)} \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

は、時刻  $t$  での渦の太さを表す。 $\eta = r/r_0(t)$  は、渦の太さによって規格化された長さ変数であり、§3 で用いた相似変数  $\eta = R/2T^{1/2}$  を拡張したものである。また、 $T(t)$ 、 $A(t)$  は、それぞれ式 (2.19)、(2.20) で定義される時間変数、ならびに、渦管の伸び率を表すパラメータである。 $\omega_1^{(0)}$  は拡散渦を表しており、漸近解析の (3.12) に対応する。一方、 $\omega_1^{(1)}$  は剪断の渦度

の平行成分  $\bar{\Omega}_1$  が主流により引き伸ばされる様子を示しており、式 (3.48) の解の原点付近の振舞いを示した表式 (3.61) の拡張である。  $\omega_1^{(0)}$ ,  $\omega_1^{(1)}$  で表される渦度は、主流による引き伸ばしを受けているが、後者は拡散しないため前者よりも成長が著しい。 §3 でも述べたように、垂直渦度の消滅により、主流渦度の軸方向成分が渦に取り残され、剪断により引き伸ばされている。この解はレイノルズ数が十分に高ければ、渦近傍において、ある程度良い近似となっており、数値計算の結果を理解する上で有用である。

#### A 垂直渦度の排除

図 3 は、  $St = 3$  における垂直渦度の振幅  $\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$  の分布を neutral な場合に対して示したものである。(a) では高レイノルズ数の数値計算の結果を  $(2\pi \times \frac{128}{1024})^2$  の領域に表示しており、(b) では対応するの漸近解析の結果を示す。上が  $x_2$  方向、右が  $x_3$  方向で、渦は時計回りに回転している。黒は  $\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} \geq 2.5S$ 、白はゼロの値に対応し、無限遠方では  $\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} \approx \sqrt{\bar{\Omega}_2^2 + \bar{\Omega}_3^2} = 1S$  であるので灰色である。図 3 中央の黒丸は渦芯の大きさを表しており、数値計算では  $r = r_0(t = 3)$  の円、漸近解析では相似変数  $\eta$  で半径 1 の円である。図の中心付近の白い領域は、渦のまわりにおいて垂直渦度が消滅していることを示している。渦芯が垂直渦度排除領域に完全に含まれていることがわかる。なお、低レイノルズ数の数値計算では、排除領域はこれよりもずっと狭い。

一方、垂直渦度消滅領域の外側には、一様剪断流の渦度の渦管による巻き込みと引き伸ばしのため、スパイラル状の高渦度領域が形成される (Moore 1985, §3.3)。垂直渦度ベクトルは、スパイラルに沿っており、その先端部においては、ほぼ一様剪断流の渦度の方向 ( $-X_3$ ) を向いている。cyclonic, anti-cyclonic な傾きをもつ渦においても同様である (図略)。スパイラル状の高渦度領域は、理論と計算で定性的によく一致していることがわかる。

図 3 から内側にいくほどスパイラル間隔が狭いことがわかる。これは、内側ほど粘性拡散の効果が大きいことを示しており、垂直渦度は渦近傍から外部へと向かって排除されていくことになる。数値計算においては、初期の一様剪断の渦度からスパイラル構造が形成され、さらに垂直渦度の排除が起こるのにしばらくの時間が必要である。渦管の太さに対する垂直渦度の排除領域やスパイラル構造の大きさが理論と比べ小さいのはこのためである。

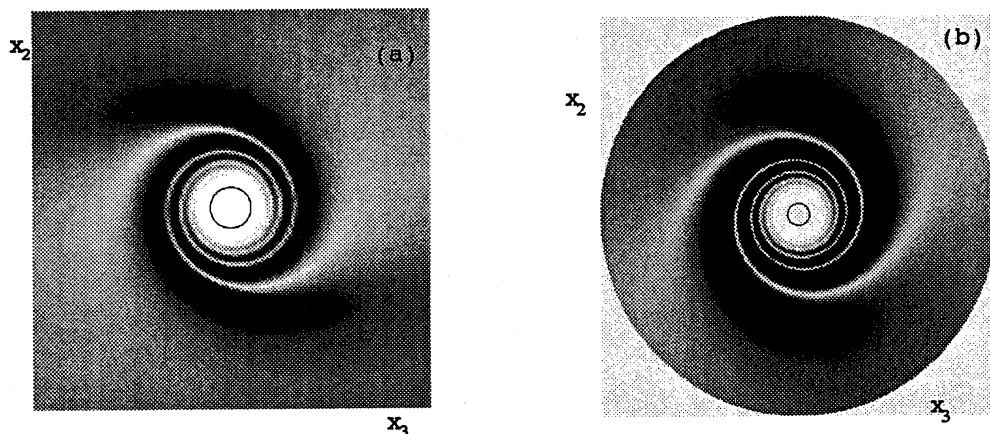


図 3  $\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$  の分布. (a) 直接数値計算, (b) 漸近解析.

### B 軸方向渦度の発達

剪断による引き伸ばしの効果が拡散のそれを上回れば、渦管は発達する。図 4 は  $\omega'_1$  の渦中心での値の時間発展を示す。図の太線、細線は、それぞれ高レイノルズ数の数値計算と上述の理論の結果を示す。また、実線、破線、点線はそれぞれ cyclonic, neutral, anti-cyclonic な場合を表す。Neutral な渦が最も発達するのは、主流剪断による引き伸ばしが最大となる方向が流れ方向から鉛直方向へ  $45^\circ$  傾いた方向、つまり、 $(\alpha, \beta) = (45^\circ, 0^\circ)$  だからである。また、anticyclone と cyclone を比較すると cyclone の発達が上回っていることがわかる。

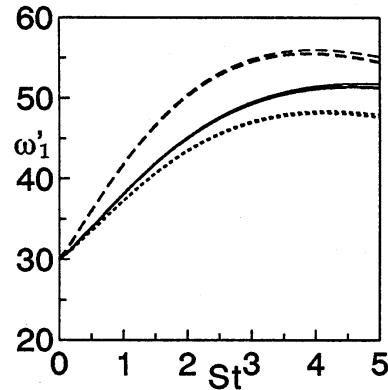


図 4  $\omega'_1(r=0)$  の時間発展。

主流によって引き伸ばされる効果は  $(X_1, X_2)$  平面に関して対称である。一方、(2.15), (2.16) の線形化方程式は  $X_3 \rightarrow -X_3$  の変換に対して不変、つまり、 $x_3, \beta, u'_3, \omega'_1(\psi)$  の符号を同時に反転しても式は変わらない。このため、 $Re \rightarrow 0$  の極限においては、鉛直方向の傾きが同じで水平方向に同角度傾いた cyclone と anti-cyclone の発達は全く同じである。ところが、高レイノルズ数においては、一様剪断の渦度の垂直成分が排除され、その軸方向成分が主流による引き伸ばしにより発達することとなる。剪断の渦度の軸方向成分は、cyclone では渦管の渦度と平行、anti-cyclone では反平行であるので、この効果は cyclone の発達を促進し、anti-cyclone の発達を抑制することになる。これより、cyclonic な渦は剪断の渦度を巻き込み、流れ方向に渦度を引き出ししてくるといえる。これは、Jiménez & Moin (1991) によって壁乱流において観測された'縦渦によるスパン方向渦度の巻き込み'と同様の現象であると推測される。また、チャンネル乱流においては、cyclonic な傾きをもつ縦渦が優勢であることが知られているが、これも上の結果と何らかの関係があるものと思われる。

図 4 より、 $St$  が小さいとき、式 (4.2) で表される理論と数値計算の結果はかなりよく一致していることがわかる。しかしながら、時間発展の後半において、理論値に比べ数値計算の値が小さくなっている。これは主に、下の図 5 で示すように、渦の周辺に渦管と反対符号の渦度が発生し、それが粘性によって拡散することによる。このような渦管の減衰は、低レイノルズ数でより顕著である。

次に、渦管から少し離れた領域における  $\omega'_1$  の振舞いについて考察する。図 5 は  $\omega'_1$  を  $\theta$  方向に平均し、拡散渦に相当する部分を取り除いた残りの部分を描いている。高レイノルズ数の数値計算 (図 5a) では  $\omega_1 - \omega_1^{(0)}$  を、漸近解析 (図 5b) では (3.48) の数値解を表示している。実線、破線、点線はそれぞれ cyclonic, neutral, anti-cyclonic な場合を表す。直線は、数値計算に対しては  $\omega_1^{(1)}$ 、漸近解析に対しては  $2\lambda_0\gamma_0$  (表式 (3.61) を参照) を示しており、いずれも全空間において垂直渦度が消滅したときに予想される値である。漸近解析では、原点付近において  $2\lambda_0\gamma_0$  に近い値をとっていることがわかる。漸近解析と比べ数値計算では  $\omega'_1$  の分布が鈍っているが、これは粘性拡散のためである。先ほども述べたように、中心部では、cyclone の発達が促進され、anti-cyclone の発達が抑制されていることがわかる。一方、渦の

周辺には、すべての場合において負の領域が存在している。渦芯（つまり、拡散渦）は遠方において  $e^{-\eta^2}$  で減衰するので、それを足し合わせても、この領域では  $\omega'_1 < 0$  である。

この  $\omega'_1$  の負のピークの発生は、垂直渦度のスパイラル構造における  $\omega_2$  分布と関係している。 $\omega_2$  に対して、図 5 と同様のものを示したのが図 6 である。ただし、直線は一様剪断流の渦度  $\bar{\omega}_2 = \cos \alpha \sin \beta$  を表す。理論と数値計算ではその形状がかなりよく一致していることがわかる。いずれの場合も、外側に  $\omega_2$  の大きな正のピークが存在している。図 3 に示されているように、垂直渦度のスパイラルの先端部分では、渦度はほぼ一様剪断の渦度の方向を向いており、そこで  $\omega_3 < 0$  である。その渦度が渦管に巻き込まれ鉛直方向にその向きを変えことにより生まれるのがこの  $\omega_2$  の正のピークである。式 (2.15) からわかるように、負の  $\omega'_1$  はこの正の  $\omega_2$  によって生成される。逆回転する渦管 ( $\omega'_1 < 0$ ) では、上の  $\omega_2, \omega'_1$  の符合も変わることから、渦管と反対符合の軸方向渦度が生成されているといえる。

理論では  $\omega'_1$  の負のピークと  $\omega_2$  の正のピークの位置はほぼ一致している。数値計算においても、 $\omega_2 > 0$  の領域で  $\omega'_1 < 0$  である。これを考慮に入れると、

$$\omega_{x_1} = \omega'_1 \cos \alpha - \omega'_2 \sin \alpha \quad (4.5)$$

により表される流れ方向渦度は、渦周辺において負の値をとることがわかる。チャンネル乱流においても縦渦周辺に縦渦とは反対符合の流れ方向渦度をもつ領域が形成されることが知られている (Sendstad & Moin 1992)。

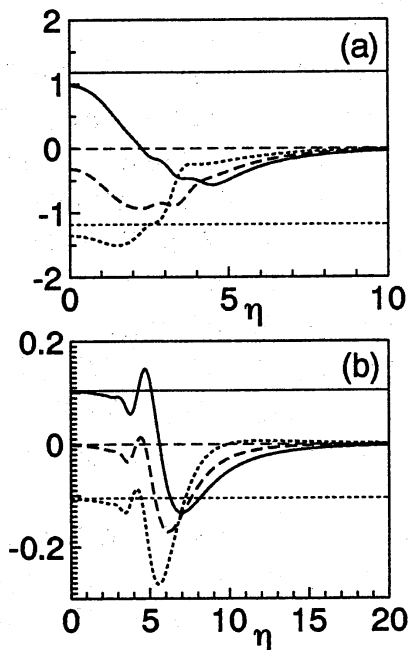


図 5  $\omega'_1$  の  $\theta$  方向平均の分布。

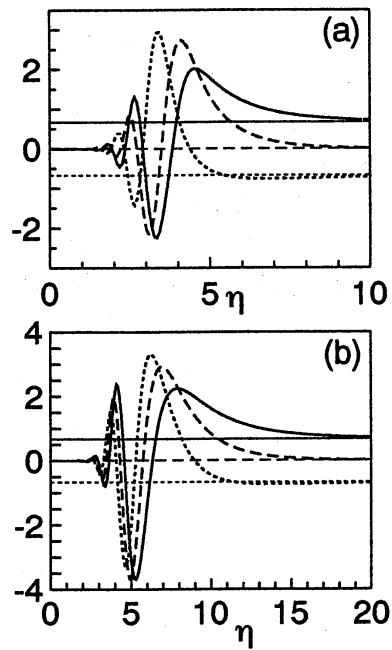


図 6  $\omega_2$  の  $\theta$  方向平均の分布。

## 5. まとめ

一様剪断流中におかれた無限に長い直線状渦について、 $St \ll 1$  の漸近解析と直接数値計算を行ない、次のような結果を得た (図 7)。



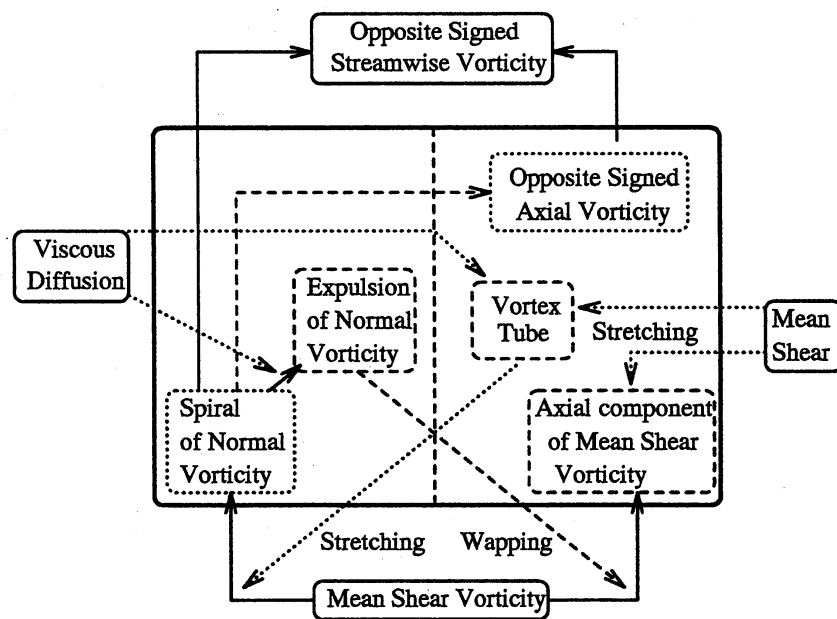


図 7 無限に長い直線状の渦管のダイナミクス。

- (i) 渦管が一様剪断の渦度を引き伸ばすことによって、渦管に垂直な渦度はスパイラル状の高渦度領域を形成する。垂直渦度は時間の経過とともにさらに引き伸ばされ、粘性拡散のため渦周辺において消滅する。これにより、一様剪断流の渦度の渦管に平行な成分のみが渦管に取り残されたことになる。
- (ii) 渦管内に取り残された一様剪断流の渦度の軸方向成分は、主流によって引き伸ばされることにより発達する。この結果 cyclone では渦管の発達が促進され、逆に anti-cyclone では抑制される。
- (iii) 垂直渦度のスパイラルのやや外よりの領域には、一様剪断流の渦度が渦管により巻き上げられることによって、 $\omega'_1 > 0$  ( $\omega'_1 < 0$ ) の渦管では、 $\omega_2 > 0$  ( $\omega_2 < 0$ ) の領域ができる。このとき式 (2.15) 以下で説明したように、一様剪断流の渦度が軸方向に曲げられ、渦管とは反対符合の  $\omega'_1$  が生まれる。これは同時に反対符合の流れ方向渦度の生成をも意味する。

## 文 献

- Jiménez, J. & Moin, P. 1991 *J. Fluid Mech.* **225**, 213-240.
- Lundgren, T. S. 1982 *Phys. Fluids* **25**, 2193-2203.
- Moffatt, H. K., Kida, S. & Ohkitani, K. 1994 *J. Fluid Mech.* **259**, 241-264.
- Moore, D. W. 1985 *Proc. R. Soc. Lond. A* **399**, 367-375.
- Pearson, C. F. & Abernathy, F. H. 1984 *J. Fluid Mech.* **146**, 271-283.
- Sendstad, O. & Moin, P. 1992 Department of Mechanical Engineering Report No. TF-57, Stanford University, Stanford, CA.