

## 2次元減衰性乱流におけるスケーリング理論の再考察

九工大・情報工 岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)  
高知大・理 岡本壽夫 (Hisao Okamoto)

### 要旨

2次元 (2-D) 減衰性乱流の第2ステージにおいて成り立つ Carnevale ら(1991)のスケーリング理論を再考察した. 理論の成功は  $-\omega\psi/2$  をコヒーレントな渦の領域で積分した不変量を用いたためであることを示す. ここで,  $\omega$  と  $\psi$  はそれぞれ渦度と流れ関数である. この不変量を渦糸系のハミルトニアンと比較することにより, また渦度方程式の直接数値シミュレーションを行うことにより, その不変量はコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであることがわかった. それゆえ, 我々はハミルトニアン of 時間不変性を用いたことが Carnevale らのスケーリング理論の成功の鍵であると結論した. さらに, エンストロフィーのスケーリング則についても考察した.

### §1. はじめに

大気や海洋の大規模運動は近似的に2次元運動である. それゆえ2次元乱流の研究は単なる学問的興味にとどまらず, 地球流体力学的興味からも重要であり, 長い間研究されてきた. 2重カスケード機構,<sup>1)</sup> 即ちエネルギーのラージスケールへ向けての逆カスケードとエンストロフィーのsmallスケールへのカスケード, は波数空間における2次元乱流の非常に有名な性質である.

近年の数値的研究<sup>2),3)</sup>によって2次元減衰性乱流は, コヒーレントな渦の出現とそれらの集団運動によって支配されていることがわかった. さらに, 多くの研究者の包括的研究<sup>2)~11)</sup>によって, その系の時間発展は3つのステージに分類できることが明らかにされた. 第1ステージでは, 流体がコヒーレントな渦の集団に向けて自己組織化する. コヒーレントな渦が出現すると次のステージが始まる. 第2ステージではコヒーレントな渦が系の動力学を支配する. 渦が互いに離れているときは, 渦の運動はコヒーレントな渦と等価な渦糸系のハミルトニアン動力学によって近似的に記述される相互移流を起こす. また, それらが近づくと同じ符号の渦は合体してより大きな渦になり, 異符号の渦の1組が最終的に双極子構造を形成する. 最後のステージでは, この双極子構造が拡散的に減衰する.

この第2ステージでは, 渦に関係した幾つかの諸量 (渦の総数  $N$  と半径  $R$ ) や流れを特徴付ける大域的量が, 代数的に時間発展することが数値シミュレーションによって示された. 全運動エネルギー  $E$  とコヒーレントな渦の渦度の極値  $\omega_0$  を不変量として Carnevale ら<sup>6)</sup> はこれらの諸量のスケーリング則を導き, その理論は数値シミュレーション<sup>6),7),11)</sup>と実験室の実験<sup>12)</sup>によって確かめられた.

本研究の目的は Carnevale らのスケーリング理論の再考察と数値計算を行うことにより、彼らの理論の成功した理由を解き明かすことである。我々は、本論文で彼らの理論における保存量  $E$  が  $\omega_0$ ,  $N$ ,  $R$  の関数として、

$$E \sim N\omega_0^2 R^4 \quad (1)$$

と表現されていることが重要であることを指摘する。我々は式(1)の右辺は全運動エネルギー ( $|\mathbf{u}|^2/2$  の全空間にわたる積分) ではなく、エネルギー密度の別の表式  $-\omega\psi/2$  をコヒーレントな渦の領域、コヒーレント領域、だけで積分した量であることを指摘する。ここで  $\omega$  と  $\psi$  はそれぞれ渦度と流れ関数である。第2ステージではコヒーレントな渦の運動は、近似的に渦糸系のハミルトニアン動力学によって記述できることが知られているので、我々は  $-\omega\psi/2$  の積分と渦糸系のハミルトニアンを比較する。その結果  $-\omega\psi/2$  の積分は、コヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであることが推測される。さらに直接数値計算によって、 $-\omega\psi/2$  のコヒーレント領域にわたる積分は保存することを示す。それゆえ、 $-\omega\psi/2$  の積分はコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであり、その時間的不変性、即ちハミルトニアンの時間不変性、を用いたことが Carnevale らの理論の成功の鍵であるという結論に達する。

本論文では、一辺が  $2\pi L$  の領域  $D$  内で周期的境界条件のもと、2次元 (2-D) 非圧縮性流体<sup>1)</sup>を考察する。この流体の運動は渦度方程式、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = (-1)^{p-1} \nu_p \nabla^2 \omega, \quad (2)$$

に従う。ここで  $J(a, b) = (\partial a / \partial x)(\partial b / \partial y) - (\partial a / \partial y)(\partial b / \partial x)$  はヤコビアン、 $\nu_p$  は粘性係数で、 $p=1$  のときが通常の粘性、 $p \geq 2$  のときは超粘性を表す。 $\omega$  と  $\psi$  の間の関係はポアソン方程式、

$$\nabla^2 \psi = \omega, \quad (3)$$

により与えられる。全運動エネルギー  $E$ 、

$$E = \iint_D \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 dx dy, \quad (4)$$

は  $\nu_p \rightarrow 0$  の極限で保存される。方程式(4)を部分積分して  $\nabla^2$  のグリーン関数  $G$ 、

$$\nabla^2 G(x, y, x', y') = \delta(x - x') \delta(y - y'), \quad (5)$$

を用いると次の式を得る：

$$\begin{aligned} E &= -\iint_D \frac{\omega \psi}{2} dx dy \\ &= -\iint_D \iint_D \frac{1}{2} \omega(x, y) \omega(x', y') G(x, y, x', y') dx dy dx' dy'. \end{aligned} \quad (6)$$

全運動エネルギーのこの表式は、本論文で重要な役割を果たす。

この論文の概要を以下に述べる。2節では Carnevale らのスケーリング理論を簡潔にレビューし、式(1)がスケーリング関係の導出に重要な役割を果たしていることを示す。

<sup>1)</sup> 密度  $\rho=1$  とする。

さらに式(1)の物理的意味を考える。3節では2-D減衰性乱流の直接数値計算の結果を示す。それらの結果に対するいくつかの考察を4節で行う。

## §2. Carnevale らのスケーリング理論の再考察

### 2.1 Carnevale らのスケーリング理論の簡潔なレビューと再考察

第2ステージにおけるスケーリング則の導出において, Carnevale ら<sup>6)</sup>は, このステージでは, コヒーレントな渦が系の動力学を支配していることから, 全運動エネルギー $E$ と全エンストロフィー $Z$ を渦の諸量, 渦の個数 $N$ , 渦の平均半径 $R_a$ , 渦の中心における渦度の値の平均値 $\omega_a$ , を用いて表現した。このとき, 次元解析によって $E$ と $Z$ はそれぞれ次のように与えられる:

$$E \sim N\omega_a^2 R_a^4, \quad (7)$$

$$Z \sim N\omega_a^2 R_a^2. \quad (8)$$

$E$ と $\omega_a$ が高レイノルズ数状態における系の保存量であることを考慮すると,<sup>ii)</sup> 渦の個数が

$$N(t) \sim N(t_0)(t/t_0)^{-\xi} \quad (9)$$

に従って振る舞うならば, 式(7)より

$$R_a(t) \sim R_a(t_0)(t/t_0)^{\xi/4} \quad (10)$$

が導かれ, 式(8)と(10)から

$$Z(t) \sim Z(t_0)(t/t_0)^{-\xi/2} \quad (11)$$

が導かれる。これらのスケーリング関係は多くの研究<sup>6,7,11,12)</sup>により $\xi = 0.7 \sim 0.75$ に関して正しいことが知られている<sup>iii)</sup>。

式(7)は次元解析的に導出されたものであるが, 式(7)の右辺の形式とスケーリング関係式が導出された過程を考慮すると, それは次のように解釈される:

I) 式(7)の右辺における $\omega_a^2 R_a^2$ は, 方程式(6)の被積分関数においてグリーン関数の空間変数が同じ渦のなかにある場合の近似的形式である。さらにそれをコヒーレントな渦の領域 $NR_a^2$ , コヒーレント領域, だけで積分した量である。すなわち, 式(7)の右辺は $-\omega\psi/2$ をコヒーレント領域で積分した量であり, 全運動エネルギーではない。また,  $-\omega\psi/2$ は $|\mathbf{u}|^2/2$ にくらべて空間的により局在している; 速度場はコヒーレント

<sup>ii)</sup>  $\omega_a$ が保存される理由は以下のように説明される。非粘性流体では各流体粒子に関して渦度が保存されるので, 相互移流の間は $\omega_a$ は保存される。一方, 渦が合併する過程では, 渦の周辺は侵食されるが中心はそのような侵食から孤立しているため, 合併過程でも $\omega_a$ は保存される。

<sup>iii)</sup> 数値シミュレーションによると, 全エンストロフィー $Z$ のスケーリングは, ここでの見積もりよりも少し速く減衰することがWeiss and McWilliams<sup>11)</sup>によって指摘されている。このことについては4節で議論する。

渦の領域からはみ出してなかなか減衰しないが、渦度場は渦の外では急激に小さくなる。従って $-\omega\psi/2$ のコヒーレント渦の領域にわたる積分は、 $|\omega|^2/2$ の同領域にわたる積分とは異なり、式(7)の右辺はコヒーレント領域の運動エネルギーでもない。

II) 式(7)がスケーリング則の導出で果たした役割は、 $-\omega\psi/2$ の積分の時間的振る舞いが全エネルギー $E$ と同様、即ち $-\omega\psi/2$ の積分が時間発展において不変である、ということである。 $-\omega\psi/2$ の積分が保存するかどうかは先見的ではなく、それゆえ式(7)は仮定である。

ここで我々は2つの疑問を提出する。第1に $-\omega\psi/2$ のコヒーレント領域にわたる積分は時間発展において保存されるか？第2に $-\omega\psi/2$ は何かもしくは $-\omega\psi/2$ のコヒーレント領域にわたる積分は何か？第1の疑問はそれを用いて導かれたスケーリング関係が正しいことから、恐らく満足されているであろう。それゆえ第1の疑問は後で再び考察することにして、先ず第2の疑問に答えていくことにする。

## 2.2 渦糸系のハミルトニアン力学からの推論

2-D 減衰性乱流の第2ステージでは、渦の諸量のスケーリング関係や波数空間におけるエネルギースペクトルは、合体する渦糸系のハミルトニアン力学モデル、このモデルは修正渦糸モデルと呼ばれている、によって定量的に説明できる<sup>3),5),6),11),13)</sup>。修正渦糸モデルの力学は、2つの過程によって記述される：渦が互いに離れているときには、ハミルトニアン力学、

$$\Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (12)$$

$$H = -\sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \Gamma_i \Gamma_j G(x_i, y_i; x_j, y_j), \quad (13)$$

$$\nabla^2 G(x_i, y_i; x_j, y_j) = \delta(x_i - x_j) \delta(y_i - y_j) - \frac{1}{(2\pi L)^2}, \quad (14)$$

によって記述される相互移流と、同符号の渦が臨界距離以内に近づいたときのエンストロフィー散逸合併過程の2つである。

ここで、修正渦糸モデルから $-\omega\psi/2$ の意味を推論する。今、渦度場が $N$ 個の軸対称な渦、それらの半径は $R_i$  ( $1 \leq i \leq N$ )、によって構成されていると仮定する。 $-\omega\psi/2$ をある渦、例えば $i$ 番目の渦、の領域で積分する。この時、 $i$ 番目の渦の流れ関数は一般に2つの部分、 $i$ 番目の渦自身により作られる部分 $\psi^s$ と $i$ 番目以外の渦により作られる部分 $\psi^c$  (これは渦の配置に依存する)、に分けられる。さらに、流れ関数は渦度に比べて空間的に滑らかな構造をしているので、積分のときに渦の中心における $\psi$ の値によってそれを置き換えることができるだろう。それゆえ、

$$\iint_{i-\text{th}} -\frac{\omega\psi}{2} dx dy \approx -\frac{1}{2} (\psi_i^s + \psi_i^c) \left( 2\pi \int_0^{R_i} \omega r dr \right) = -\frac{1}{2} (\psi_i^s + \psi_i^c) \Gamma_i, \quad (15)$$

を得る。さらに全ての渦の領域で積分したときには以下のように表現される：

$$\iint_{all} -\frac{\omega\psi}{2} dx dy = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i^s \Gamma_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i^c \Gamma_i. \quad (16)$$

方程式(16)右辺第2項は、渦の配置によって決まる項であり、方程式(13)に対応する、何故ならば渦糸モデルにおける流れ関数は

$$\psi(x,y) = \sum_i \Gamma_i G(x,y;x_i,y_i), \quad (17)$$

で与えられるからである。<sup>3)</sup> 一方、方程式(16)の右辺第1項は自己相互作用を表し、渦が有限の大きさをもつために現れた項であり、渦糸モデルのハミルトニアンには含まれていなかった部分である。したがって、 $-\omega\psi/2$ のコヒーレント領域にわたる積分は、コヒーレントな渦と等価な渦糸系のハミルトニアンに対応する。そこで我々は $-\omega\psi/2$ の積分はコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンである、もしくは $-\omega\psi/2$ はコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアン密度である、と推論する。もし $-\omega\psi/2$ の積分がハミルトニアンならば、それは時間発展において不変に保たれねばならない。それゆえ、ここで再び前小節の第1の疑問が現れる。次の節では渦度方程式の直接数値計算を行うことにより第1の疑問に答える。

### §3. 数値シミュレーション

#### 3.1 シミュレーションの詳細

一辺の長さが $2\pi$ の正方形領域で2重周期境界条件のもと、 $p=2$ の超粘性を含んだ渦度方程式(2)を擬スペクトル法<sup>14)</sup>を用いて数値的に解いた。空間の解像度は $(256)^2$ 、切断波数は85である。用いた超粘性係数の値は $\nu_2 = 3.125 \times 10^{-8}$ で、これはMcWilliams<sup>2)</sup>やYaoら<sup>15)</sup>の研究における同じ解像度のモデルで用いられた値と同じである。数値積分は $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ の時間間隔で、4次のルンゲ・クッタ法を用いて20000ステップまで計算した。全ての計算は倍精度で行った。

ここでは、波数空間のエネルギースペクトルが異なるような初期条件に関して2つの実験を行った。時間発展で出現するコヒーレントな渦の集団の性質は、初期のエネルギースペクトルに依存する。<sup>10)</sup> 相対的に広いスペクトルからは、渦の大きさの分布が広い集団を生じ、一方、相対的に狭いスペクトルでは狭い分布が出現する。狭い分布をもった渦の集団に対して式(7)、(8)で与えられるような渦の平均量による記述が意味を持つ。しかしながら $-\omega\psi/2$ がコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアン密度であるかどうかという問題は、渦の集団の性質とは無関係である。さらに修正渦糸モデルは、両方の初期スペクトルからの2-D減衰性乱流の統計的性質を定量的に記述できる。それゆえ我々は次のような2つの実験(EXPM1とEXPM2)を行った。

EXPM1では、方程式(2)の初期条件として流れ関数 $\psi$ の各Fourier成分に平均値0の正規乱数を与えた。但し、波数空間における初期エネルギースペクトル $E(k)$ を

$$E(k) \sim \frac{k}{1+(k/k_0)^4}, \quad (18)$$

( $k_0 = 6$ ) とした。これは相対的に広いスペクトルの初期条件である。一方 EXPM2 では、初期エネルギースペクトル  $E(k)$  を

$$E(k) \sim \frac{k^6}{[k + 2k_0]^{18}}, \quad (19)$$

( $k_0 = 30$ ) で与えた以外は EXPM1 と同じ初期条件である。これは相対的に狭い初期エネルギースペクトルの実験である。これらの初期エネルギースペクトルは McWilliams<sup>2), 8)</sup> の研究と同じものである。両実験共に初期における単位面積当りの全運動エネルギー

$$E = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|u|^2}{2} dx dy \quad (20)$$

は 0.5 に規格化した。初期における単位面積当りの全エンストロフィー

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega^2}{2} dx dy \quad (21)$$

は EXPM1, EXPM2 でそれぞれ約 200 と 1300 である。

### 3.2 結果

直接数値シミュレーションの結果の大域的性質として、単位面積当りの全運動エネルギー  $E$ 、単位面積当りの全エンストロフィー  $Z$ 、エネルギー平均された波数  $\bar{k}$ 、

$$\bar{k} = \frac{\sum_k k E(k)}{E}, \quad (22)$$

エネルギースペクトル  $E(k)$ 、渦度  $\omega$  と流れ関数  $\psi$  の 4 次モーメントの時間発展を調べた。 $E$  は  $t \sim 5$  までの間に大きく減少するが、それ以後はほとんど保存されている。一方  $Z$  は時間発展の間じゅう常に減少する。エネルギー平均された波数は時間と共に単調に減少する。エネルギースペクトル  $E(k)$  は、EXPM1 では  $E(k)$  の傾き  $\beta$  が初期における  $\beta = -3$  から数単位時間以内にずれて、シミュレーションの最後には  $\beta \sim -5$  になった。EXPM2 では、 $\beta$  は時間発展の初期の段階における  $\beta \sim -3$  を経てやはり  $\beta \sim -5$  に達した。 $\psi$  の 4 次モーメントは正規乱数のその値 3 に近いまま時間発展するが、 $\omega$  のそれは初期における値 3 から時間と共に単調に増加している。これらの性質は、以前の研究からよく知られたものである。<sup>2)</sup>

次に本題の結果を示す。 $-\omega\psi/2$  をコヒーレント領域で積分するために、数値計算の結果としてえられた場においてコヒーレント領域を定義しなければならない。2-D 乱流におけるコヒーレント領域の定義は、流れ関数  $\psi$  の Gaussian 曲率  $Q$ 、

$$Q = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (23)$$

が負となる領域をコヒーレント領域と定義する Weiss の規準<sup>16)</sup> が有名である。一方、McWilliams<sup>8)</sup> は、個々のコヒーレント渦の構造や性質、さらにそれらの相互作用を議論するため、非粘性の 2-D Navier-Stokes 方程式の安定定常解である渦のパターンを基

にして、コヒーレントな渦の自動抽出方法を提案した。McWilliams の自動抽出法<sup>9)</sup>は、Carnevale ら<sup>6)</sup>や Weiss and McWilliams<sup>11)</sup> によりスケーリング則の研究に採用されている。しかしながら、この自動抽出法は大変複雑であるため、我々は McWilliams の自動抽出法と等価で、より簡単な方法によってコヒーレント領域を定義した。コヒーレントな渦は定常であり、定常な渦では気圧傾度力は渦の中心を向く。さらに今考察している系では、圧力  $p$  の全領域平均はゼロであるため、 $p$  が負の領域が渦の領域と考えられる。さらにコヒーレント領域は安定な領域であり、 $Q$  は Lagrange 的粒子の安定性の指標<sup>2)-4), 17)</sup>であるため、したがって  $p < 0$ ,  $Q < 0$  となる領域をコヒーレント領域と定義した。

図 1 はコヒーレント領域で積分された  $-\omega\psi/2$ ,

$$H = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{p < 0, Q < 0} -\frac{\omega\psi}{2} dx dy, \quad (24)$$

その領域で積分された運動エネルギー,

$$T = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{p < 0, Q < 0} \frac{|u|^2}{2} dx dy, \quad (25)$$

そして領域平均された全運動エネルギー  $E$  (式(20)) の時間発展を示す。  $H$  は  $E$  の大部分を占めていて、第 2 ステージ (両実験において数単位時間後が第 2 ステージである) でのみ一定値をとることがわかる。一方  $T$  は  $E$  よりもオーダーとして小さく、時間と共に減少している<sup>iv)</sup>。それゆえ前節での第 1 の疑問、即ち、コヒーレント領域にわたる  $-\omega\psi/2$  の積分は時間発展に於て保存されるか? は立証された。前節の議論と本節の結果より、 $-\omega\psi/2$  のコヒーレント領域にわたる積分は、コヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであると我々は結論する。

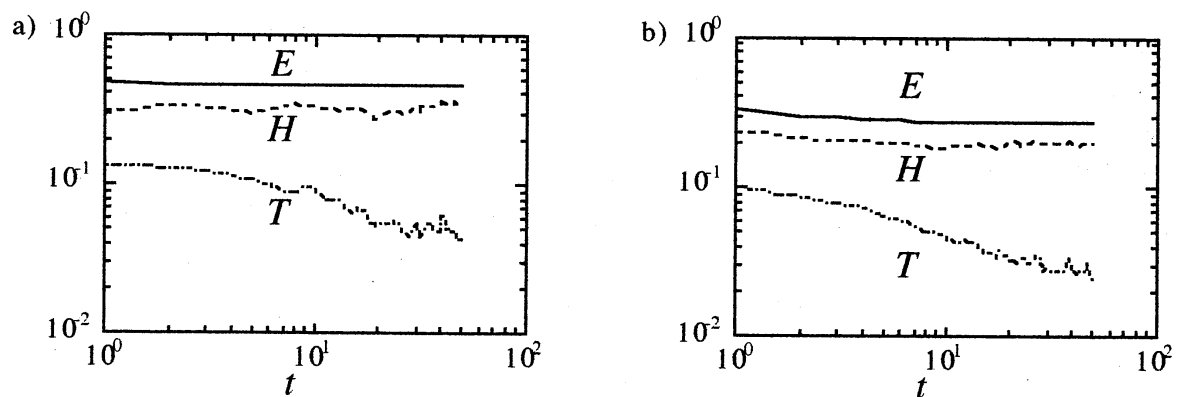


図 1.  $E$ ,  $H$ ,  $T$  の時間発展. a) EXPM1, b) EXPM2.

iv) ここで減少した運動エネルギーはコヒーレント領域の外の領域に輸送されている何故なら  $E$  は第 2 ステージで保存されているからである。

#### §4. まとめと考察

我々は 2-D 減衰性乱流に於て、コヒーレントな領域における  $-\omega\psi/2$  の積分がコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであることを渦糸系との比較から示した。EXPM1 及び EXPM2 と同じ初期条件からの 2-D 減衰性乱流の第 2 ステージで、波数空間におけるエネルギー Spektrum やスケーリング関係は、合併可能な渦糸系のハミルトニアン力学によって定量的に説明される。<sup>6),11),13)</sup> さらに 2-D 減衰性乱流の数値シミュレーションから、コヒーレント領域にわたる  $-\omega\psi/2$  の積分が時間と共に一定に保たれていることが示された。それゆえ  $-\omega\psi/2$  のコヒーレント領域にわたる積分は、コヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであると結論した。そこで Carnevale らのスケーリング理論の成功の鍵の一つは、この集団系のハミルトニアンの時間不変性の使用、すなわち式(7)、であると結論する。

ここで、前節で得られたコヒーレントな渦の集団系の運動エネルギー  $T$  が減少することに関して、物理的説明を与えることを考える。運動エネルギーはコヒーレントな渦の衝突・合併によって特徴付けられるカスケード過程により起こるので、コヒーレントな渦を粒子と見做し、粒子の衝突を思い起こそう。今 2 つの粒子 1 と 2 の衝突前における相対速度  $u_{12}$  と衝突後のそれらの相対速度  $u'_{12}$  との関係は、Newton の衝突の法則によって

$$u_{12} = \varepsilon u'_{12} \quad (26)$$

と書ける。ここで  $\varepsilon$  は衝突係数で、 $\varepsilon = 1$  のときが完全弾性衝突、 $\varepsilon < 1$  のときが非弾性衝突（特に  $\varepsilon = 0$  のときを完全非弾性衝突と呼ぶ）である。このような衝突の前後で運動エネルギーは  $\varepsilon = 1$  のときのみ保存する。 $\varepsilon = 0$  のときには衝突後の粒子はともに同じ速度で動く、即ち、あたかも一つの粒子のようについて動く。<sup>18)</sup> 2 つの同符号のコヒーレントな渦は、衝突して 1 個のより大きなコヒーレントな渦となり、これは粒子の完全非弾性衝突に対応するため、したがって運動エネルギーは衝突により減少することが理解される。

2 節で行ったものと同様の議論を、エンストロフィーのスケーリング則(11)に対しても適用することができる。Reynolds 数無限大の極限では、2-D 流体の全運動エネルギー  $E$  は保存されるが、全エンストロフィー  $Z$  は散逸する。それゆえ全運動エネルギーが系の長時間発展に影響を及ぼす初期条件の唯一の性質であると考え、Batchelor<sup>19)</sup> は  $Z$  のスケーリング則、

$$Z \sim t^{-2}, \quad (27)$$

を導いた。一方 Carnevale ら<sup>6)</sup> は式(11)を提唱した。高解像度の数値シミュレーション<sup>11)</sup> は(27)よりも(11)を支持する：全エンストロフィーは(27)よりももっとゆっくり減少するが、しかしながら(11)よりもわずかに速い。しかしながら(11)の有限 Reynolds 数状態に対する補正<sup>11)</sup> も、依然としてシミュレートされた全エンストロフィーの減衰を過小評価している。シミュレーションと理論のこの不一致は、以下のように定性的に



解釈される。我々は、式(7)の右辺が全エネルギーでなくコヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンであったように、式(8)の右辺は全エントロフィーではなくコヒーレントな渦の集団系のエントロフィー、コヒーレント領域で積分されたエントロフィー、であると主張する。それゆえ式(11)は集団系のエントロフィーのスケーリング則である。Benziら<sup>3),5)</sup>によって明らかにされたように、コヒーレントな渦の領域内でエントロフィーは保存的に振る舞う：エントロフィー散逸はコヒーレントな渦の背景場で非常に大きい。従って全エントロフィーの減衰する率は式(11)よりも大きくなる。コヒーレントな渦の集団系のエントロフィーのスケーリングが(11)を満足するかどうかは、引き続き論文で議論する。何故ならば、スケーリング指数を正確に決定するには、本研究で行ったよりも高解像度モデル・長時間積分が必要だからである。しかしながら、間接的に我々の議論が正しいことが次のように証明される。我々は2節で述べたスケーリング関係から、コヒーレント領域で積分されたエントロフィーと、その領域の面積との比が、減衰性乱流の第2ステージで時間的に一定になることを予測できる、即ち、

$$\iint_{p<0, Q<0} \frac{1}{2} \omega^2 dx dy / \iint_{p<0, Q<0} dx dy \sim t^0. \quad (28)$$

図2はEXPM2に関して、この比をプロットしたものである。数単位時間以後、即ち、第2ステージにおいて比が時間と共にほぼ一定に保たれていることがわかる。したがって、(11)はコヒーレントな渦の集団系のエントロフィーのスケーリング則であるといえる。

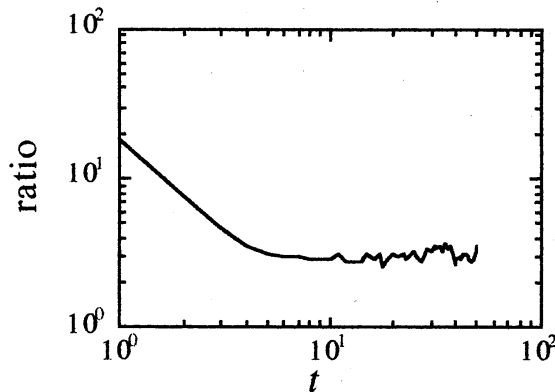


図2. コヒーレントな領域で積分されたエントロフィーとコヒーレントな領域の面積の比。

ここで、 $-\omega\psi/2$ と $|u|^2/2$ の違いについてコメントしておく。この研究で明らかにされたハミルトニアン密度 $-\omega\psi/2$ とエネルギー密度 $|u|^2/2$ の関係は、

$$-\frac{\omega\psi}{2} = \frac{1}{2}|u|^2 - \frac{1}{2}\nabla \cdot (\psi\nabla\psi) \quad (29)$$

で与えられる。もし方程式(29)を適当な境界条件、例えば2重周期境界条件（もしくは剛体境界条件）のもと、全空間で積分すれば(29)の右辺の第2項は消え、 $-\omega\psi/2$ の積分された値と $|\mathbf{u}|^2/2$ の積分された値は一致する。それゆえ我々は $-\omega\psi/2$ の意味、もしくは $-\omega\psi/2$ と $|\mathbf{u}|^2/2$ の違いについて特に注意を払って来なかった。しかしながら前者は本研究で示されたようにコヒーレント領域で積分されたときに保存され、コヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンという明確な物理的意味を持つ。一方コヒーレント領域で積分された後者は時間と共に減少し、全エネルギーに比べオーダーとして小さい。加えて、ハミルトニアンは与えられた系の動力学を生成する。そこで我々は $|\mathbf{u}|^2/2$ に比べて $-\omega\psi/2$ の方が、コヒーレントな渦によって支配されている2-D減衰性乱流においてより根本的的量であると主張する。

### 謝辞

本研究を進めるにあたり、九州大学理学部の宮原三郎教授、廣岡俊彦助教授、藤坂博一助教授、中島健介博士、三好勉信博士から有益な助言をいただきました。ここに記して感謝いたします。本研究は著者の一人(T.I.)が、日本学術振興会特別研究員として九州大学理学部地球惑星科学科に所属していたときに行なわれた研究であり、文部省科学研究費特別研究員奨励費の援助を受けて行われた。

### 参考文献

- 1) R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10** (1967), 1417.
- 2) J. C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **146** (1984), 21.
- 3) R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** (1988), 1221.
- 4) M. E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano and P. L. Sulem, *J. Fluid Mech.* **194** (1988), 333.
- 5) R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo, *Europhys. Lett.* **3** (1987), 811.
- 6) G. C. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991), 2735.
- 7) G. C. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, *Phys. Fluids A* **4** (1992), 1314.
- 8) J. C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **219** (1990), 361.
- 9) J. C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **2** (1990), 547.
- 10) P. Santangelo, R. Benzi and B. Legras, *Phys. Fluids A* **1** (1988), 1027.
- 11) J. B. Weiss and J. C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **5** (1993), 608.
- 12) P. Tabeling, S. Burkhart, O. Cardoso and H. Willaime, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 3772.
- 13) R. Benzi, M. Colella, M. Briscolini and P. Santangelo, *Phys. Fluids A* **4** (1992), 1036.
- 14) S. A. Orszag, *Phys. Fluids Suppl.* **12** (1969), II-250.
- 15) H. B. Yao, N. J. Zabusky and D. G. Dritschel, *Phys. Fluids* **7** (1995), 539.
- 16) J. B. Weiss, *Physica D* **48** (1991), 273.
- 17) C. Basdevant and T. Philipovitch, *Physica D* **73** (1994), 17.
- 18) M. R. Spiegel, *Theoretical Mechanics*. (McGraw-Hill, New York, 1967).
- 19) G. K. Batchelor, *Phys. Fluids Suppl.* **12** (1969), II-233.