数理解析研究所講究録
972 巻 1996 年 24-34

渦輪の不安定性

名工大　矢島 雅 (Masashi Yajima)
名工大　後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1 Introduction

渦輪についての研究は100年以上もの間、理論的及び実験的に行われており、その構造や運動について多くの報告がある。しかし、今だ理解されていない数多くの問題が残されており、最近の研究では渦輪が不安定になるメカニズムに関心が集まっている。

本研究の主題は、Yamada (1977) [10] による可視化実験で示されたような、渦輪の自己誘起運動による方位角方向の波状変形を、直接数値計算で再現することにある。そして、実験では測定が困難なデータを得ると同時に、理論では解析が難しい有限な渦核半径をもつ渦輪の変形の様子をコンピュータグラフィックス (CG) を用いて観察することによって、実験と理論の両者が不得意な面を補足し、新たな知見を見い出すことを目的とする。

本研究は、以下の3点について調べた。第1に、渦輪の並進速度について理論との対応を得るために、レイノルズ数や a/R の値を変化させて比較を行う。(レイノルズ数は Γ/ν で定義する。Γ は渦輪の循環、ν は動粘性係数を指す。また、a は渦核半径、R は渦輪半径を指す。)

渦輪の並進速度についての理論的研究は古くから行われており、1867年に Kelvin は渦核内にのみ一様な渦度分布を持つ渦輪についてその並進速度が

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right] \tag{1}$$

で与えられることを示した。一方、Kelvin と同時代の研究者達は次のように考えていた。軸流がなく、軸対称でまっすぐな渦管を考えた場合、その渦度は連続な接線方向の速度場を $u_\theta(r)$ とすると

$$\omega = \frac{d(ru_\theta)}{r\,dr} \equiv \frac{\zeta}{r} \tag{2}$$

と表すことができる。渦核内にのみ一様な渦度分布を持つ渦輪を考えた場合、実際には $\omega =$ 一定なのだが、当時の研究者達は $\zeta =$ 一定としていたので

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a} - 1\right] \tag{3}$$

という正しくない結果を得てしまった。

1970年には3人の研究者によって、任意の渦度分布を持つ渦輪の並進速度が求められている。Fraenkel (1970) と Bliss (1970) は漸近法を用いてこれを解析し、また、Saffman (1970) [3] は Lamb (1932) の理論を用いて次のように並進速度を求めた。

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{2} + A\right]. \tag{4}$$

ここで、

$$A = \frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^a r\,{u_\theta}^2\,dr \tag{5}$$

であり、渦核内にのみ一様な渦度分布を持つ場合は $A = 1/4$ となり Kelvin の結果と一致する。しかし、(5) 式には $O(a^2/R^2)$ の誤差が含まれており、後に Widnall & Sullivan (1973) [7] によって次のように修正されている。

$$A = \lim_{r/a\to\infty}\left[\frac{4\pi^2 a^2}{\Gamma^2}\int_0^{r/a} r\, {u_\theta}^2\, dr - \ln r/a\right]. \tag{6}$$

また、Widnall, Bliss & Tsai (1974) [8] (以後、WBT とする) は

$$\ln\left(\frac{a_\epsilon}{a}\right) = \frac{1}{4} - A \tag{7}$$

と置くことによって、(4) 式を

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a_\epsilon} - \frac{1}{4}\right] \tag{8}$$

と Kelvin の結果にあわせる形で示している。ここで、a_ϵ は effective core radius と呼ばれるもので、任意の渦度分布に対してその循環が等しくなるように一様な渦度分布で置き換えた時の渦核半径を指す。よって、渦核内にのみ一様な渦度分布を持つ場合では $a_\epsilon = a$ となる。a_ϵ の求め方については、定数 A から直接求めたり、Saffman (1978) [4] が記述している式を用いて求める等様々な方法があるようだが、Shariff, Verzicco & Orlandi (1994) [5] (以後、SVO とする) によって、渦核断面の渦度分布がガウス分布の場合では $a_\epsilon = 1.3067a$ であることが報告されている。

渦対の場合には、Widnall, Bliss & Zalay (1971) [6] (以後、WBZ とする) が (4) 式に軸流の効果を表す定数 C を加えて

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{2} + A - C\right] \tag{9}$$

と求めている。ここで、C は軸流による速度場を u_z として表すと

$$C = \frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^a r\, {u_z}^2\, dr \tag{10}$$

となる。以上のような理論的研究を比較の参考にした。

第 2 に、Maxworthy (1977) [2] に代表されるような実験 (可視化写真) との比較を行うために、CG によって渦輪の不安定な現象を観察する。また、CG から数えた波の数について WBT との比較を行い、各パラメータとどのような関係があるかについて考察する。並進速度の理論との比較とともに、こういったことを行うことで、理論的、実験的に妥当なパラメータを決定することができ、以後の数値計算を行う際の参考にすることができる。

第 3 に、不安定波の増幅率について調べるために、時間に対する渦輪の方位角方向のモーダルエネルギーを求め、各時刻での CG と照らし合わせてみる。これは、CG から数えたあやふやな波の数を、確かなものにするためにも有効な手段である。また、モーダルエネルギーへの軸流の影響についても調べてみる。

2 Numerical simulation

非圧縮性粘性流体は Navier-Stokes 方程式及び、連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + (-1)^{n-1}\,\nu_n\,\nabla^{2n}\mathbf{u}, \tag{11}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{12}$$

に従うとし、周期境界条件のもとでスペクトル法を用いて計算を行う。時間発展は二次の予測子修正子法を用いた。また、ほとんどの場合通常粘性 : $\nu = \nu_1$ を用いたが、必要に応じてハイパーヴィスコシティ : $\nu_h = \nu_2$ も用いた。

3 Initial conditions and run parameters

3.1 基本状態

渦核断面における渦度分布は、渦核中心からの距離 r のガウス関数

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{\pi\left(\sqrt{2}a\right)^2}\exp\left(-\left(\frac{r}{\sqrt{2}a}\right)^2\right) \tag{13}$$

で与えられる。ここで、Γ は循環、a は渦核半径である。この $\omega(r)$ から渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ を作り、フーリエ変換した後に、非圧縮条件を満足させるために次のような演算を施す。

$$\tilde{\omega}_i(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k})\,\omega_j(\mathbf{k}), \quad P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \tag{14}$$

この $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})$ から作られた速度ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ を、以下 $\mathbf{u}_{vortex}$ とする。

3.2 初期摂動

本研究は渦輪の安定性を調べることが目的なので、基本状態 ($\mathbf{u}_{vortex}$) にかく乱 ($\mathbf{u}_{noise}$) を次のように加える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t=0) = \mathbf{u}_{vortex} + \epsilon_n \mathbf{u}_{noise}\,, \quad \epsilon_n \sim 10^{-2}.$$

この時加える $\mathbf{u}_{noise}$ はあるエネルギースペクトルを持ち、ガウス分布に従う場となるように作られる。その方法を以下に示す。

まず、ここで扱う各物理量に対して、その扱いを簡単化するために一様性及び等方性の各条件を仮定する。この条件により、各物理量が座標の並行移動と回転・反転に対して不変となり、テンソル量をスカラー量で表すことが可能となる。単位質量あたりのエネルギーを $E(t)$ とすると

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\langle|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2\right\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty}\langle u_i(\mathbf{k},t)\,u_i{}^*(\mathbf{k},t)\rangle \tag{15}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\int_0^\infty 4\pi k^2 Q(k,t)\,dk \tag{16}$$

$$\simeq \int_0^\infty E(k,t)\,dk \tag{17}$$

である。ここで、$\langle\ \rangle$ はアンサンブル平均を表す。また、$Q(k)$ は波数 k でのエネルギー密度を表し、エネルギースペクトル密度と呼ばれる。同様に、$E(k)$ は波数 k でのエネルギー量を表し、エネルギースペクトル関数と呼ばれる。(15)、(16)、(17) 式より、速度、エネルギースペクトル密度、エネルギースペクトル関数の関係を次のように定義する。

$$\frac{1}{2}\left\langle|\mathbf{u}(\mathbf{k},t)|^2\right\rangle \equiv \frac{1}{2}Q(k,t) \equiv \frac{E(k,t)}{4\pi k^2}. \tag{18}$$

よって、$E(k)$ を与えれば $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ 及び、$Q(k)$ が決まることが分かる。本研究では二種類のエネルギースペクトル関数を考える。

ガウシアンスペクトルノイズ (GSnoise)

ガウス型のエネルギースペクトル分布を次のように与える。

$$E(k) = ck^4\exp\left(-2\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right), \quad c = \frac{16}{k_0{}^5}\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{19}$$

実際の計算では $k_0 = 6$ とした。

フラットスペクトルノイズ (FSnoise)

トップハット型のエネルギースペクトル分布を次のように与える。

$$E(k) = \begin{cases} \dfrac{1.5}{k_2 - k_1} & (k_1 \le k \le k_2) \\ 0 & (\text{その他}) . \end{cases} \tag{20}$$

実際の計算では $k_1 = 4$, $k_2 = 16$ とした。

次に、ガウス分布に従う場となるような操作を行う。$\mathbf{u}(\mathbf{k})$ を表すために実数ベクトル $\mathbf{a}(\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ を次のように導入する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{k}) + i\mathbf{b}(\mathbf{k}) . \tag{21}$$

この時、$\mathbf{a}(\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ が互いに独立なガウス乱数なら、$\mathbf{u}(\mathbf{k})$ もガウス乱数となる。また、$\mathbf{a}(\mathbf{k})$, $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ は統計的に同等なので、(18) 式より

$$\left\langle |\mathbf{a}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle = \left\langle |\mathbf{b}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} Q(k) \tag{22}$$

としてよい。さらに、$\mathbf{u}(\mathbf{k})$ は非圧縮条件を満たさなければならないので

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})) + i\,(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\beta}(\mathbf{k})) \tag{23}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q(k) = \left\langle |\mathbf{a}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle &= \left\langle k^2 |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}))^2 \right\rangle \\ &= k^2 \left\{ \left\langle |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle - \left\langle (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}))^2 \right\rangle \right\} \end{aligned} \tag{24}$$

と書ける。ここで、$\mathbf{n}$ は $\mathbf{k}$ 方向の単位ベクトルである。アンサンブル平均の意味には、振幅についての平均と方向についての平均がある。また、$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ はランダムな方向を向き、等方性の仮定により x, y, z 方向すべてに対等なので、方向についての平均をとり、アンサンブル平均を振幅についての平均 $\langle\ \rangle_{amplitude}$ で表すと

$$\left\langle |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle = \left\langle |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle_{amplitude} , \tag{25}$$

$$\left\langle (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}))^2 \right\rangle = \frac{1}{3} \left\langle |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle_{amplitude} \tag{26}$$

となる。(24) 式に (25)、(26) 式を代入すると

$$\left\langle |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle_{amplitude} = \frac{3}{4} \frac{Q(k)}{k^2} \tag{27}$$

を得る。同様にして、$\left\langle |\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle_{amplitude}$ も同じ形を得る。以上より、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{k}) &= \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) + i\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k})) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} \frac{Q(k)}{k^2}}\, \mathbf{k} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{k}) + \frac{i}{\sqrt{3}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{k}) \right) \end{aligned} \tag{28}$$

によって $\mathbf{u}_{noise}$ を求めればよい。ここで、$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{k})$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{k})$ は

$$\langle \tilde{\alpha}_i(\mathbf{k}) \rangle = \left\langle \tilde{\beta}_i(\mathbf{k}) \right\rangle = 0 , \quad \left\langle \tilde{\alpha}_i{}^2(\mathbf{k}) \right\rangle = \left\langle \tilde{\beta}_i{}^2(\mathbf{k}) \right\rangle = 1 \tag{29}$$

となるようなガウス乱数である。

3.3 軸流

軸流の効果について調べるために、$\mathbf{u}_{axialflow}$ を次のように加える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t=0) = \mathbf{u}_{vortex} + \epsilon_n \mathbf{u}_{noise} + \epsilon_a \mathbf{u}_{axialflow}\,, \quad \epsilon_a \sim 10^{-1}\,.$$

この時加える $\mathbf{u}_{axialflow}$ は、基本状態で作られる $\tilde{\omega}(\mathbf{k})$ と同じ分布を持つ。つまり、渦核断面における軸流の速度分布は、渦核中心からの距離のガウス関数になっている。また、渦度の向きに対する軸流の向きの正負を表すために、ヘリシティ：H と呼ばれる量を次のように導入する。

$$H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{x}\,. \tag{30}$$

つまり、$H > 0$ なら同じ向き、$H < 0$ なら逆向きを示す。

3.4 run パラメータ

表 1 に本研究で使用した run パラメータを示す。また、各 run に共通なパラメータは次のとおりである。

解像度：$N = 64$
時間ステップ：$\Delta t = 2 \times 10^{-2}$
循環：$\Gamma = 1.0$

ν：動粘性係数、R：渦輪半径、a：渦核半径

	かく乱 及び 軸流	Γ/ν	a/R
run1	なし	1000	0.25
run2	なし	3333	0.25
run3	GSnoise	3333	0.25
run4	GSnoise	5000	0.25
run5	GSnoise	5000	0.2
run6	GSnoise	$\nu_h = 1 \times 10^{-4}$	0.25
run7	GSnoise	$\nu_h = 1 \times 10^{-5}$	0.25
run8	GSnoise	$\nu_h = 1 \times 10^{-6}$	0.25
run9	GSnoise	$\nu_h = 1 \times 10^{-5}$	0.2
run10	GSnoise	$\nu_h = 5 \times 10^{-6}$	0.2
run11	GSnoise	5000	0.4
run12	GSnoise + 軸流 ($H > 0$)	5000	0.2
run13	GSnoise + 軸流 ($H < 0$)	5000	0.2
run14	FSnoise	5000	0.2
run15	FSnoise + 軸流 ($H > 0$)	5000	0.2
run16	FSnoise + 軸流 ($H < 0$)	5000	0.2

表 1: run パラメータ

4 Results

4.1 並進速度

並進速度を無次元化するために代表スケールを次のようにとる。

- 代表時間 : T
- 代表長さ : a

ここで、T は渦核内の流体粒子が渦核を一周するのにかかる時間、a は渦核半径である。循環の定義を用いて、Γ を代表スケールで表すと

$$\Gamma = \int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \sim u_\theta a \sim \frac{a^2}{T} \tag{31}$$

となる。ここで、u_θ は (2) 式で用いられたものと同様、渦の接線方向に連続な速度場である。これを用いて渦輪の並進速度 : U_0 を規格化し、無次元並進速度 : U を次のように定義する。

$$U \equiv \frac{U_0}{\frac{a}{T}} = \frac{U_0 a}{\Gamma}. \tag{32}$$

以下では、この無次元並進速度について議論する。

WBT によると渦輪の並進速度 : ${U_0}^{th}$ は (8) 式で表される。再び記すと

$${U_0}^{th} = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a_e} - \frac{1}{4}\right]. \tag{33}$$

SVO は effective core radius を詳しい説明なしで $a_e = 1.3067a$ としているが、本研究は SVO と同様、渦核断面における渦度分布がガウス関数なのでこれを採用する。ガウス関数の違いから SVO の渦核半径は本研究の渦核半径の $\sqrt{2}$ 倍なので、(33) 式は

$${U_0}^{th} = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{1.3067\sqrt{2}a} - \frac{1}{4}\right]. \tag{34}$$

となる。よって、(32)、(34) 式より無次元並進速度 : U^{th} は

$$\begin{aligned} U^{th} &= \frac{{U_0}^{th} a}{\Gamma} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{a}{R}\right)\left[\ln\frac{8R}{1.3067\sqrt{2}a} - \frac{1}{4}\right] \end{aligned} \tag{35}$$

と表すことができる。(35) 式をよく見ると、U^{th} は a/R という渦輪の相対的な太さを表すパラメータによって決まることが分かる。一方、本研究の直接数値計算における無次元並進速度 : U^{DNS} は

$$U^{DNS} = \frac{{U_0}^{DNS} a}{\Gamma}$$

より、直接数値計算における渦輪の並進速度 : ${U_0}^{DNS}$ を測定することによって得られる。

図 4.1.1 に a/R に対する U^{th} と U^{DNS} の値を示す。図からも明らかなように、U^{DNS} の値が U^{th} の値に近いことが分かる。各パラメータへの依存性に関して調べてみると、a/R が小さくなるに従って U^{DNS} の値が U^{th} の値に近づくことが分かる。もともと (33) 式は、無限に細い渦輪について漸近的に得られたものなので、渦輪が相対的に細くなるに従ってこれらの値が近くなることは理にかなっている。さらに、ν が小さくなるに従って U^{DNS} の値が U^{th} の値に近づくことも分かる。これは、ハイパーヴィスコシティの場合でも同じことがいえる。また、すべての run を通して U^{DNS}

の値が U^{th} の値に最も近づくのはハイパーヴィスコシティを用いた run10 の場合であった。以上から、より小さな ν と相対的により細い渦輪を用いて数値計算を行えば、かなり理論に近いものが得られることが分かる。

また、$\Gamma/\nu = 5000$、$a/R = 0.2$ に固定し、軸流のある場合とない場合の U^{DNS} の比較を行ったものを図 4.1.2 に示す。軸流の効果は加味してないが、参考のために U^{th} も示す。WBZ は、軸流は渦輪の並進速度を遅くする効果があると報告しているが、図からも明らかなように本研究においても、軸流を加えることによって無次元並進速度が遅くなっていることが分かる。

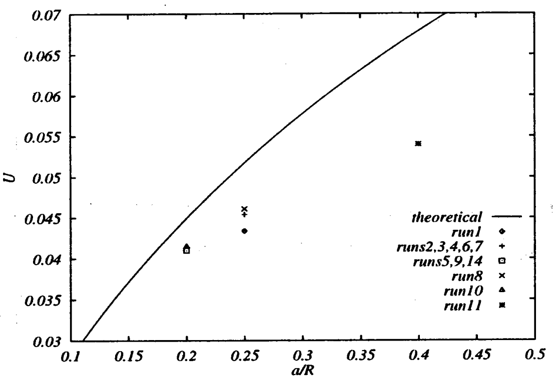

図 4.1.1 無次元並進速度 (WBT との比較)

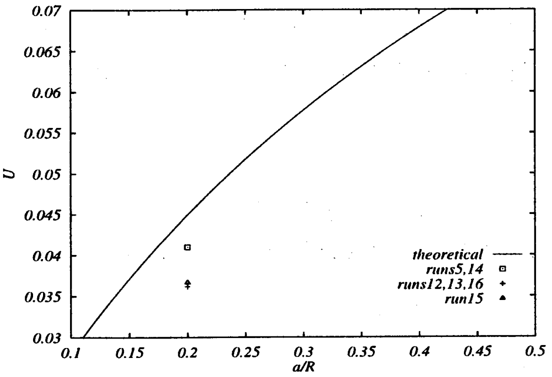

図 4.1.2 無次元並進速度 (軸流の有無による比較)

4.2 不安定性

CG によって時間を追いながら立体的に渦輪の観察を行った結果、以下のことが分かった。

4.2.1 方位角方向の変形

渦輪の方位角方向に波状変形が現れ、時間とともに振幅が増大する様子が観察された。代表的な例を図 4.2.1 、図 4.2.2 に示す。以下で使われる時間はすべて次元をもつが、必要であれば代表時間 T で規格化した $\hat{t} = t/T = t/(a^2/\Gamma)$ を計算すれば無次元時間が分かる。前のセクションでも述べたが、ここでもより小さな ν と相対的により細い渦輪を用いて数値計算を行えば、かなりきれいな波状変形が見られる。

WBT は、彼らによる無次元並進速度

$$\widetilde{V} = \frac{U_0{}^{th}}{\Gamma/4\pi R} \tag{36}$$

$$= \ln\frac{8R}{a_e} - \frac{1}{4} \tag{37}$$

に対する不安定波の数：n についても調べている。(36) 式の $U_0{}^{th}$ は (33) 式のことである。その結果を、図 4.2.3 に示す。ここで示された実線、破線、点線は彼らによって得られたものであり、experiment は実験値、asymptotic result は無限に細い渦 (糸) 輪の漸近解析の結果を示す。そして、constant vorticity、distributed vorticity はそれぞれ、渦核内にのみ一様な渦度分布をもつ場合とある特定の渦度分布をもつ場合の理論値である。これら 3 つの理論値の中で、実際の渦度分布により近い分布を持つ distributed vorticity が実験値に最も近いということで、彼らはこれを支持している。図から明らかなように、全体的にかなりよい位置にあるといえる。また、ν 及び a/R を小さくとると波の数が増える傾向にあることも分かる。

4.2.2 並進方向の変形

渦輪の並進方向にも変形が現れ、時間とともに振幅が増大する様子が観察された。代表的な例を図 4.2.4 、図 4.2.5 に示す。これは、可視化実験ではなかなか捉えにくいもので、並進方向の波状変形を表すには CG が有効な手段であることを示している。渦輪は左方向に進んで行き、左端まで行くと周期境界条件により、右端から出てくるものとして見ると分かり易い。

4.2.3 渦核断面の変形

渦核断面の形状が場所によっては円形ではなく、ひしゃげている様子が観察された。代表的な例を図 4.2.6 に示す。その原因について、渦管の'ねじれ'によるものではないかと考えた。この'ねじれ'を説明するために局所誘導方程式 [1] を用い、以下のように考えた。

無限に長い渦糸の一部分にある曲率をもった変形が生じた時、その部分の接線ベクトルを $\mathbf{x}_s$ 、法線ベクトルを $\mathbf{x}_{ss}$ とすると、変形によってその部分に誘起される速度は次式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = c\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_{ss} . \tag{38}$$

ここで、c は定数である。(38) 式の右辺は、その向きにおいて倍法線ベクトルと等しいので、倍法線方向に速度が誘起されることが分かる。つまり、変形が起こり曲率が高くなった部分は、より曲率を高めながらもともとあった渦核中心を軸として回転を始めるのである。これが、まっすぐな渦糸 (管) や太さをもたない渦 (糸) 輪の場合であればいつまでも回転を続けることができる。しかし、有限な太さをもつ渦輪の場合では、不安定波によって様々な曲率をもった各部分が、それぞれの誘起速度で同一方向に回転するために (勿論、この局所的な誘起速度はあまり大きなものではないので、回転というほどの大きな動きは見せないのではあるが)、各部分での回転方向への誘起速度の違いによって'ねじれ'が生じるのではないかと解釈した。

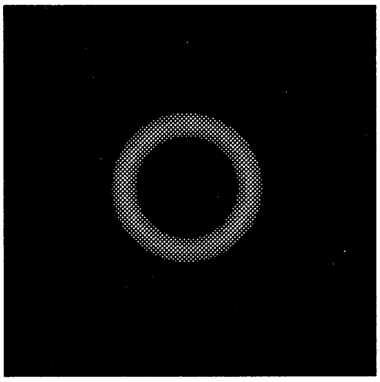

図 4.2.1 渦輪の正面図 (run5 , t=0)

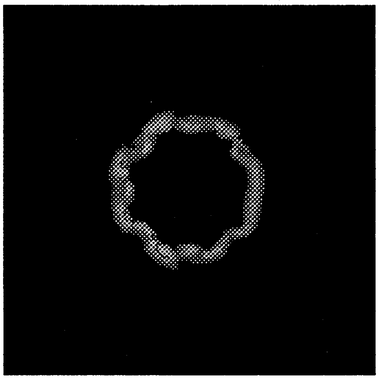

図 4.2.2 渦輪の正面図 (run5 , t=36)

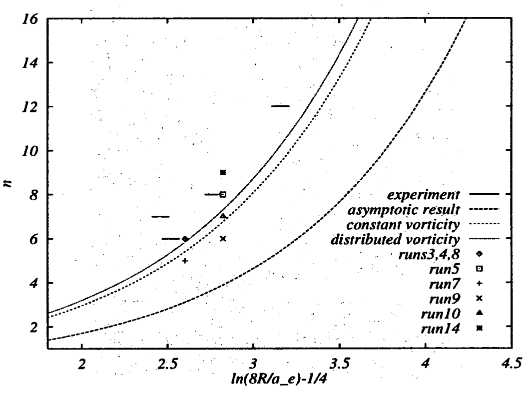

図 4.2.3 相対的な渦輪の太さと波の数の関係

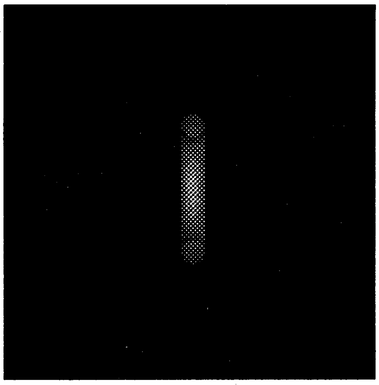

図 4.2.4 渦輪の側面図 (run14 , t=0)

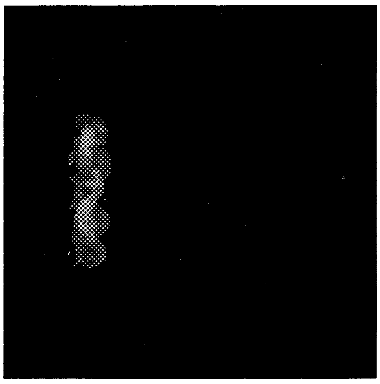

図 4.2.5 渦輪の側面図 (run14 , t=44)

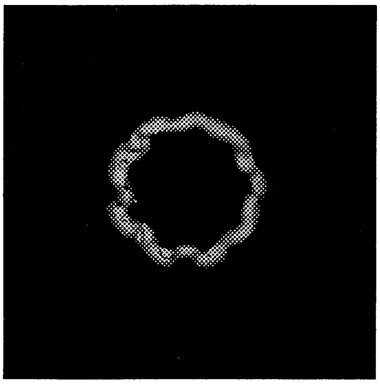

図 4.2.6 渦輪の正面図 (run14 , t=40)

4.3 モーダルエネルギー

前のセクションでは、ある run (特定のパラメータ) に対して決まった数の不安定波が現れるという前提で話を進めたが、実際に CG で細かな観察を行うと、波の数が減少しているように見えることもある。そこで、時間に対する θ 方向 (渦輪の方位角方向) のモーダルエネルギーを図示し、本当に波の数が減少しているかを調べた。以下に θ 方向のモーダルエネルギーの求め方を示す。

本研究は 3 次元のデカルト座標系を用いたので、1 次補間を用いて円筒座標系で与えられる場に変換する。次に、この時の速度場 : $u_i(x,r,\theta,t)$ (i は x,r,θ 成分を表す) を θ についてフーリエ変換し、次式によってモーダルエネルギー : $E_n(t)$ を与える。

$$E_n(t) \equiv \sum_i \left(\sum_{x,r} |u_i(x,r,n,t)|^2 \right) . \tag{39}$$

ここで、n は任意の波数を表す。

run14 のモーダルエネルギーを図 4.3.1 に示す。9 から 7 へモーダルエネルギーのシフトが起こっていることが図からはっきりと分かる。エネルギーシフトの前後で何が起こっているのかを調べるために、CG で時間を追いながら観察した。その様子を、図 4.3.2 ～ 図 4.3.4 に示す。不安定波の数は図 4.3.2 では 9、図 4.3.4 では 7 とはっきりと数えられるが、図 4.3.3 では数え方によって 7 とも 8 とも 9 ともとれる。このように、波の数がはっきりとしていない時刻を不安定波の減少の遷移段階として解釈した。こういった現象は可視化実験 [11] からも報告されている。

次にモーダルエネルギーへの軸流の効果について少し調べてみた。その結果を図 4.3.5 、図 4.3.6 に示す。すべての場合について言えることだが、軸流がない場合でははっきり現れていた低波数と高波数の間のエネルギーギャップが、軸流を入れることによって現れなくなることが分かる。

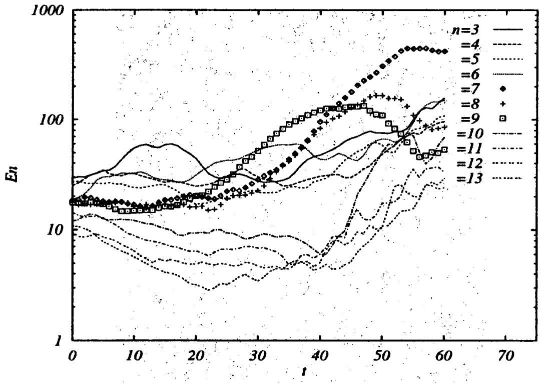

図 4.3.1 モーダルエネルギー (run14)

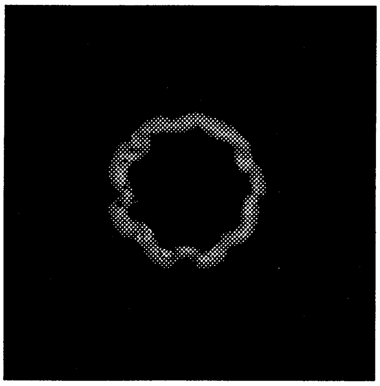

図 4.3.2 渦輪の正面図 (run14 , t=40)

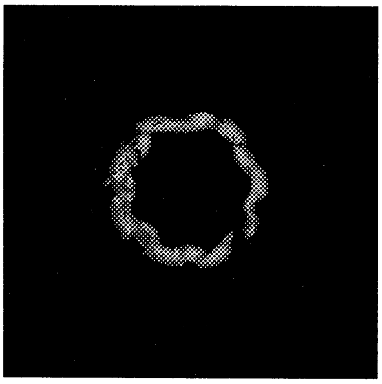

図 4.3.3 渦輪の正面図 (run14 , t=44)

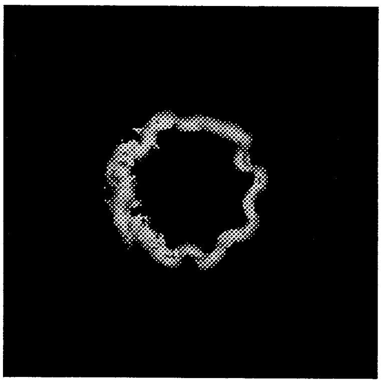

図 4.3.4 渦輪の正面図 (run14 , t=48)

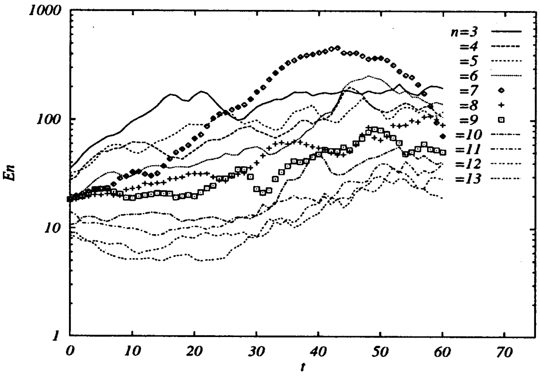

図 4.3.5 モーダルエネルギー (run12)

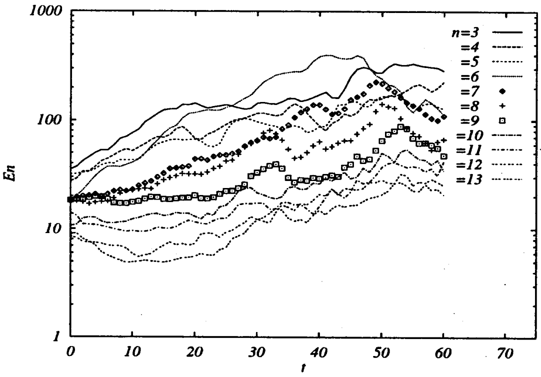

図 4.3.6 モーダルエネルギー (run13)

5 Conclusions

結果を以下にまとめる。

・並進速度について

WBT との比較

- a/R 及び、$\nu\,(\nu_h)$ を小さくするに従って理論値に近くなる。

軸流の有無による比較

- 軸流は並進速度を遅くする効果がある。

・不安定性について

方位角方向の変形

- 可視化写真のようにきれいな不安定波が現れた。
- a/R に対する波の数に関して、WBT の理論値及び実験値にかなり近い値を示した。
- $\nu\,(\nu_h)$ 及び a/R を小さくしていくと波の数が増える。

並進方向の変形

- 並進方向に対しても変形が現れ、その振幅が増大する様子が観察された。

渦核断面の変形

- 場所によって渦核断面がひしゃげているように見えるが、これは渦管の'ねじれ'が原因であると解釈した。

・モーダルエネルギーについて

- 不安定波の減少についてモーダルエネルギーの図と CG がよく一致した。
- 軸流はエネルギーを各波数にばらまく効果がある。

全体を通して言えることは、より小さな $\nu\,(\nu_h)$ と相対的により細い渦輪を用いて直接数値計算を行えば、理論や実験に近い渦輪の不安定な現象を再現できるということである。

今後の展望として、渦管の'ねじれ'についてもう少し具体的に、分かりやすく説明できる方法を考えたい。また、軸流のメカニズムについても詳しく調べたい。

参考文献

[1] Hama, F.R. 1962 *Phys. Fluids.* **5,** 1156-1162.

[2] Maxworthy, T. 1977 *J. Fluid Mech.* **81,** 465-495.

[3] Saffman, P.G. 1970 *Stud. Appl. Math.* **49,** 371-380.

[4] Saffman, P.G. 1978 *J. Fluid Mech.* **84,** 625-639.

[5] Shariff, K., Verzicco, R. & Orlandi, P. 1994 *J. Fluid Mech.* **279,** 351-375.

[6] Widnall, S.E., Bliss, D.B. & Zalay, A. 1971 *In Aircraft Wake Turbulence and Its Detection,* p.305. Plenum.

[7] Widnall, S.E. & Sullivan, J.P. 1973 *Proc. Roy. Soc.* **A 332,** 335-353.

[8] Widnall, S.E., Bliss, D.B. & Tsai, C.-Y. 1974 *J. Fluid Mech.* **66,** 35-47.

[9] Widnall, S.E. 1975 *Annual Review of Fluid Mechanics.* **7,** 141-165.

[10] Yamada, H. 1977 *Theoretical and Applied Mechanics.* **27,** 481-488.

[11] 今井 伸治 1994 卒業論文, 名古屋工業大学 生産システム工学科