

Existence of group invariant solutions
for semilinear elliptic equations

長崎総合科学大学 梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)

本講演では、次の楕円型方程式の解の存在について考える。

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(gx) = u(x), & g \in G, x \in \Omega, \end{cases}$$

ただし、 $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n \geq 2$, $1 < p < (n+2)/(n-2)$ とする。 $O(n)$ は $n \times n$ 直交行列の全体を表し、 G は $O(n)$ の部分群とする。

(1) の解を G invariant solution と呼ぶ。球対称解は G invariant solution である。そこで次の問題を考える。

問題. G invariant であり、かつ球対称でない解は存在するか。

次の結果が得られた。

定理 1. $n \geq 2$, $1 < p < (n+2)/(n-2)$ として、 G を $O(n)$ の有限部分群とする。このとき、球対称でない (1) の解の列 $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ で、

$$0 < \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} < \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)} < \dots \nearrow \infty$$

を満たすものが存在する。ただし $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は、ソボレフノルムを表す。

注意 1. $p \geq (n+2)/(n-2)$ のときは (1) は零解しか持たないことが、Pohozaev identity [4] により知られている。

例 1. $G = \{e, -e\}$ (ただし、 e は単位行列) ととると、偶関数であり球対称でない (1) の解が無数個存在することがわかる。

例 2. 自然数 $m \geq 2$ を固定する。

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi l}{m} & -\sin \frac{2\pi l}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \sin \frac{2\pi l}{m} & \cos \frac{2\pi l}{m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} : l = 0, 1, 2, \dots, m-1 \right\}.$$

このとき (1) の解の列 $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ で、各 $u_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が x_1, x_2 について角度 $\frac{2\pi}{m}$ 回転不変であり、球対称でないものが存在する。

証明の概略. 証明は変分法によって行われる。

$$H_0^1(\Omega, G) \equiv \{u \in H_0^1(\Omega) : u(gx) = u(x) \quad (\forall g \in G, \forall x \in \Omega)\}$$

$$I(u) \equiv \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega, G),$$

と定義すると, $I(\cdot)$ はヒルベルト空間 $H_0^1(\Omega, G)$ 上の C^1 級の実数値汎関数であり, Palais-Smale 条件を満たす。また $u(x)$ が (1) の弱解であることと, u が $I'(u) = 0$ をみたすことは同値になる。さらに $1 < p < (n+2)/(n-2)$ のとき, $H_0^1(\Omega)$ に属する弱解は, C^2 級の解になることが楕円型方程式の regularity theory によりわかる。従って, G invariant であり球対称でないような $I(\cdot)$ の critical point をたくさん探せばよい。そのためにまず, G invariant な固有値の漸近分布を調べる。

補題 1. G を $O(n)$ の有限部分群とする。次の固有値問題

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi(gx) = \phi(x), & g \in G, x \in \Omega, \end{cases}$$

の固有値を $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ 重複度も込めて並べる) とする。このとき, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して次が成り立つ。

$$c_1 k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k \leq c_2 k^{\frac{2}{n}}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

補題 1 の証明のために次の補題を用意する。

補題 2. 単位球面を $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ と書く。 G を $O(n)$ の有限部分群として $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$ とする。このとき, ある $\sigma_0 \in S^{n-1}$ が存在して

$$(3) \quad g_i \sigma_0 \neq g_j \sigma_0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つ。

証明. $g \in O(n)$ に対して

$$F(g) = \{\sigma \in S^{n-1} : g\sigma = \sigma\}$$

とおくとき, $F(g)$ は S^{n-1} の閉部分集合であり, g が単位行列でないときは, $F(g)$ は, S^{n-1} において内点を持たない。実際にもし内点を持てば, $M = \{x \in \mathbb{R}^n : gx = x\}$ は, \mathbb{R}^n において内点を持つ。 M は線形空間だから, $M = \mathbb{R}^n$ となり $gx = x$ がすべての $x \in \mathbb{R}^n$ について成り立つ。すなわち g は単位行列になる。

今, $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$ である。 G は単位行列を含むので, 以下では g_0 を単位行列とする。上で示したことにより各 $F(g_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) は S^{n-1} の内点を持たない閉集合である。 S^{n-1} は完備距離空間だから Baire のカテゴリー一定理により $S^{n-1} \neq \bigcup_{i=1}^m F(g_i)$ となる。よって

$$(4) \quad \sigma_0 \in S^{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^m F(g_i)$$

と取ることができる。

今から(3)を示す。ある i, j ($0 \leq i, j \leq m$) に対して $g_i \sigma_0 = g_j \sigma_0$ を仮定する。このとき $g_j^{-1} g_i \sigma_0 = \sigma_0$ であり、 G は群だから $g_j^{-1} g_i \in G$ となる。よってある l に対して $g_l = g_j^{-1} g_i$ となり、 $g_l \sigma_0 = \sigma_0$ である。このことと(4)により $l=0$, g_l は単位行列となり、 $g_i = g_j$ が成り立ち、従って $i=j$ となる。すなわち(3)が示された。 (補題2の証明終)

補題1の証明. 点 x 中心で半径 r の球を $B(x, r)$ とかく。

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}.$$

補題2で選んだ σ_0 に対して十分小さな $\varepsilon > 0$ をとると

$$(5) \quad B(g_i \sigma_0, \varepsilon) \cap B(g_j \sigma_0, \varepsilon) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

となる。そこで次のような cone を定義する。

$$C_i = \{\lambda \tau : 0 < \lambda < 1, \tau \in B(g_i \sigma_0, \varepsilon) \cap S^{m-1}\}.$$

(5)より $C_i \cap C_j = \emptyset$ ($i \neq j$) であり、各 g_i は直行行列だから $g_i C_0 = C_i$ となる。今 $u \in H_0^1(C_0)$ のとき

$$\begin{cases} \bar{u}(g_i x) = u(x) & (x \in C_0, i = 1, \dots, m) \\ \bar{u}(x) = 0 & (x \notin \bigcup_{i=0}^m C_i) \end{cases}$$

として \bar{u} を定義すれば $\bar{u} \in H_0^1(\Omega, G)$ である。そこで、

$$\tilde{H}_0^1(C_0) = \{\bar{u} : u \in H_0^1(C_0)\}$$

とおくと

$$(6) \quad \tilde{H}_0^1(C_0) \subset H_0^1(\Omega, G)$$

である。

ところで(2)の固有値は、以下のようにして特徴づけられる。まず $u_1, \dots, u_k \in H_0^1(\Omega, G)$ のとき

$$(7) \quad d(u_1, \dots, u_k) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} : u \in H_0^1(\Omega, G), (u, u_i)_{L^2} = 0 \quad (i = 1, \dots, k) \right\}$$

として $d(u_1, \dots, u_k)$ を定義する。ただし $(u, v)_{L^2}$ は u, v の L^2 内積を表す。このとき(2)の固有値 λ_k は

$$(8) \quad \lambda_k = \sup \{d(u_1, \dots, u_k) : u_1, \dots, u_k \in H_0^1(\Omega, G)\}$$

となる([1]参照)。上の定義(7),(8)において $H_0^1(\Omega, G)$ を $\tilde{H}_0^1(C_0)$ に代えたものをそれぞれ $\tilde{d}, \tilde{\lambda}_k$ とすれば(6)より

$$(9) \quad \lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。 $\tilde{\lambda}_k$ は、 C_0 での Dirichlet Laplacian

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \tilde{\lambda}\phi, & x \in C_0, \\ \phi = 0, & x \in \partial C_0, \end{cases}$$

の第 k 固有値だから、ある $c > 0$ をとると

$$(10) \quad \tilde{\lambda}_k \leq ck^{\frac{2}{n}}$$

が成り立つ ([1])。 (9), (10) により $\lambda_k \leq ck^{\frac{2}{n}}$ が得られる。

λ_k の下からの評価はもっと簡単である。 $H_0^1(\Omega, G) \subset H_0^1(\Omega)$ であるから、定義 (7), (8) において $H_0^1(\Omega, G)$ を $H_0^1(\Omega)$ に代えたものをそれぞれ $e(u_1, \dots, u_k)$, μ_k とすれば $\mu_k \leq \lambda_k$ であり μ_k は

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \mu\phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

の第 k 固有値だから、ある $c_0 > 0$ をとると $c_0k^{\frac{2}{n}} \leq \mu_k$ が成り立つ。よって $c_0k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k$ が得られる。 (補題 1 の証明終)

次に G invariant critical values を構成するが、その前に genus を定義する。

定義 1. $H_0^1(\Omega, G)$ の閉部分集合 A で、 $0 \notin A$ であり、 $u \in A$ ならば $-u \in A$ を満たすもの全体を $Sym(H_0^1(\Omega, G))$ と書く。

$$Sym(H_0^1(\Omega, G)) \equiv \{A : A \text{ is closed in } H_0^1(\Omega, G), 0 \notin A, u \in A \text{ implies } -u \in A\}$$

$A \in Sym(H_0^1(\Omega, G))$ に対して

$$\gamma(A) = \min\{m : A \text{ から } \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \text{ への連続な奇関数が存在する。}\}$$

として $\gamma(A)$ を定義して、これを A の genus と呼ぶ ([5, p45] 参照)。もしどのような自然数 m に対しても A から $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ への連続な奇関数が存在しないとき、 $\gamma(A) = \infty$ と定義し、空集合 \emptyset に対しては、 $\gamma(\emptyset) = 0$ と定義する。

補題 1 を利用して次の補題 3 が示される。

補題 3. 次の条件を満たす実数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する。

(i) $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \nearrow \infty$.

(ii) $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_{k+j}$ ならば $\gamma(K) \geq j+1$ である。ただし

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega, G) : I(u) = \alpha_k, I'(u) = 0\}$$

(iii) 各 α_k は、 $I(\cdot)$ の critical value である。すなわち、各 α_k に対して、 $I(u_k) = \alpha_k$, $I'(u_k) = 0$ をみたす $u_k (\in H_0^1(\Omega, G))$ が存在する。

(iv) ある $c > 0$ が存在して、 $\alpha_k \leq ck^{\frac{2(p+1)}{n(p-1)}}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つ。

証明. (2) の固有値を重複度も込めて小さい方から順に並べて $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$) とする。 λ_k に対応する固有関数を ϕ_k とかく。

$$E = H_0^1(\Omega, G), \quad E_k = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$$

とする。以降 $\|\cdot\|_q$ は L^q ノルムを表し、添え字無しノルム $\|\cdot\|$ は、 $H_0^1(\Omega, G)$ ノルムを表す。すなわち、 $\|u\| = \|u\|_{H_0^1(\Omega, G)} = \|\nabla u\|_2$ 。このとき、各自然数 k に対して、ある $R_k > 0$ が存在して

$$(11) \quad I(u) \leq 0 \quad (\|u\| \geq R_k, \quad u \in E_k)$$

が成り立つ。これを示すには、 E_k が有限次元ノルム空間だから、ノルム $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と $\|\cdot\|_{L^{p+1}}$ が同値になることを使う。($1 < p < (n+2)/(n-2)$ に注意。) すなわち、

$$\exists c_1(k), c_2(k) > 0: c_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p+1}} \leq c_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (u \in E_k)$$

ゆえに

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{c_1^{p+1}}{p+1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$$

よって $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq ((p+1)/(2c_1^{p+1}))^{1/(p-1)}$ のとき $I(u) \leq 0$ となり (11) が成り立つ。(11) の R_k は $0 < R_1 < R_2 < R_3 < \dots \nearrow \infty$ としてよい。補題 3 を示すには、以下のようにして α_k を定義すればよい。

$$D_k = \{u \in E_k : \|u\| \leq R_k\}$$

$\Gamma_k = \{h : h \text{ は } D_k \text{ から } E \text{ への連続な奇関数で、} \|u\| = R_k \text{ のとき } h(u) = u \text{ を満たす。}\}$

$$\alpha_k = \inf_{h \in \Gamma_k} \max_{u \in D_k} I(h(u)) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき補題 3 の (i)、(ii)、(iii) が成り立つことは [5, Theorem 9.12] を見よ。(iv) を示す。 α_k の定義において、 $h \in \Gamma_k$ として特に恒等写像 $h_0(u) \equiv u$ をとると $h_0 \in \Gamma_k$ であり、

$$(12) \quad \alpha_k \leq \max_{u \in D_k} I(h_0(u)) = \max_{u \in D_k} I(u) \leq \sup_{u \in E_k} I(u)$$

となる。今 Ω が有界領域だから

$$\exists c > 0: \quad \|u\|_2 \leq c \|u\|_{p+1} \quad (u \in L^{p+1}(\Omega))$$

が成り立つ。また E_k の定義より

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \lambda_k \|u\|_2^2 \quad (u \in E_k)$$

が成り立つ。上の二式を合わせて、

$$c\lambda_k^{-\frac{p+1}{2}} \|\nabla u\|_2^{p+1} \leq \|u\|_{p+1}^{p+1} \quad (u \in E_k)$$

が得られる。ここで c は、 u, k に無関係である。よって

$$(13) \quad I(u) \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - c\lambda_k^{-\frac{p+1}{2}} \|\nabla u\|_2^{p+1} \quad (u \in E_k)$$

が成り立つ。関数 $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - c\lambda_k^{-\frac{p+1}{2}} t^{p+1}$ の $t \geq 0$ での最大値は、 $c_0\lambda_k^{(p+1)/(p-1)}$ である。ただし、

$$c_0 = \frac{p-1}{2(p+1)} \left\{ \frac{1}{c(p+1)} \right\}^{2/(p-1)}$$

である。この事と (12)、(13) より

$$\alpha_k \leq c_0\lambda_k^{\frac{p+1}{p-1}}$$

が導かれる。この式と補題1より補題3の (iv) が得られる。

(補題3の証明終)

補題3で多くの G invariant critical values が得られた。今から、球対称解について調べる。

補題 4. (1) の球対称解でちょうど k 個の零点を持ち $u(0) > 0$ を満たすものがただ1つ存在する。それを v_k と書くと、(1) のすべての球対称解の集合は

$$\{v_k : k = 1, 2, \dots\} \cup \{-v_k : k = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$$

である。 $\beta_k = I(v_k) = I(-v_k)$ とおくと次が成り立つ。

$$(i) \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots \nearrow \infty.$$

$$(ii) \quad I(v_k) = \beta_k, \quad I'(v_k) = 0.$$

$$(iii) \quad \exists A, \exists B > 0 : Ak^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \leq \beta_k \leq Bk^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

証明. (1) の球対称解 $u = u(r), r = |x|$ の満たす方程式は、

$$(14) \quad u'' + \frac{n-1}{r}u' + |u|^{p-1}u = 0, \quad r \in (0, 1),$$

$$(15) \quad u'(0) = u(1) = 0$$

となる。(14) と初期条件

$$(16) \quad u'(0) = 0, \quad u(0) = 1$$

を満たす解は一意に存在し、 $r \in [0, \infty)$ まで延長される。これを $w(r)$ と書く。このとき $w(r)$ は、非有界な零点の列を持つ。小さい方から順に $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$ とする。今、変換 $\lambda^{2/(p-1)}w(\lambda r)$ ($\lambda > 0$) は、方程式(14)を不変にすることがわかる。そこで

$$v_k(r) \equiv s_k^{2/(p-1)}w(s_k r)$$

とおくと、この v_k が (14)–(15) の解であり、(i), (ii) を満たす。しかも $u(0) > 0$ を満たし
 区間 $[0, 1]$ にちょうど k 個の零点を持つ (14)–(15) の解は v_k のみであることもわかる (詳細
 は [2, p263] を見よ)。 (iii) の証明は (14) を次の一階常微分方程式系

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\frac{n-1}{r}v - |u|^{p-1}u \end{cases}$$

になおし、これに対して非線形 Prüfer 変換を使うことによりなされる。(詳細は [2, 3] を参
 照) (補題 4 の証明終)

定理 1 の証明. $\{\alpha_k\}$ は G invariant critical value の集合であり、一方 $\{\beta_k\}$ はすべての
 球対称 critical value の集合であることに注意する。直感的には、 $\{\alpha_k\} \setminus \{\beta_k\}$ が非有界集
 合であることを示して、これを $\{\gamma_k\}$ とおけば、 γ_k に対する critical value として定理 1 の
 u_k が得られる。厳密には、以下のようにする。

定理 1 を否定する。その結果、ある k_0 が存在して $k \geq k_0$ のとき α_k に対する critical point
 は球対称解のみとなる。すなわち

$$(17) \quad \{\alpha_k : k \geq k_0\} \subset \{\beta_k : k = 1, 2, 3, \dots\}.$$

もし、ある $k (\geq k_0)$ と、ある自然数 j に対して $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_{k+j}$ ならば補題 3 より
 $\gamma(K) \geq j+1$ である。ただし、

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega, G) : I(u) = \alpha_k, I'(u) = 0\}$$

である。

一方 (17) より、ある l が存在して $\alpha_k = \beta_l$ であり、これに対する critical point は、球対
 称解のみなので $K = \{v_l, -v_l\}$ となる。genus の定義より有限集合 K の genus は $\gamma(K) = 1$
 となるので、 $\gamma(K) \geq j+1$ に矛盾する。よって $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ ($k \geq k_0$) となる。これと (17)
 より、ある自然数の列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ ($n_1 < n_2 < \dots$) が存在して、

$$\alpha_{k_0+j} = \beta_{n_j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

よって補題 3 (iv) と補題 4 (iii) により

$$An_j^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \leq c(k_0 + j)^{\frac{2(p+1)}{n(p-1)}}$$

$\{n_j\}$ は狭義単調増加な自然数列だから $j \leq n_j$ となり、

$$Aj^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \leq c(k_0 + j)^{\frac{2(p+1)}{n(p-1)}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

となる。これは $n \geq 2$ に反する。こうして定理 1 の否定から矛盾が生じるので定理 1 は、
 正しいことがわかる。 (定理 1 の証明終)

参考文献

- [1] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. I. II*, New York, Interscience 1953, 1962.
- [2] R. Kajikiya, Sobolev norms of radially symmetric oscillatory solutions for superlinear elliptic equations, *Hiroshima Math. J.* 20 (1990), 259–276.
- [3] R. Kajikiya, Radially symmetric solutions of semilinear elliptic equations, existence and Sobolev estimates, *Hiroshima Math. J.* 21 (1991), 111–161.
- [4] S. I. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.* 5 (1965), 1408–1411.
- [5] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Math. 65, Amer. Math. Soc. 1984.