数理解析研究所講究録
973 巻 1996 年 96-106

On the uniqueness of entropy solutions for $u_t + \nabla\cdot A(u) = \Delta\beta(u)$

岡本 邦也 (Kuniya OKAMOTO)
徳島大・工

非線形退化型放物項をもつ次の保存型方程式

$$\text{(DE)} \qquad u_t + \nabla\cdot A(u) = \Delta\beta(u), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty),$$

$$\text{(IC)} \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad : \text{given},$$

の初期値問題(DE)-(IC)を考える。ここに $u = u(x,t)$ は未知関数，係数は $A = (A^1, \cdots, A^N) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ とする。さらに β には nondecreasing を仮定し，$\beta(\not\equiv \text{Const.})$ とする。

このタイプの方程式に対する関心の一つに，その弱解の一意性がある。(DE)の右辺を 0 と置いた“一階保存型方程式”では周知のように一般には初期値が如何に滑らかであろうとも有限時刻において特異性が現れることが知られており，従って時間大域解を対象とするかぎりは不連続解を許容する弱解のクラスを導入する必要があった。また，弱解の初期値に関する一意性が一般には成立しないことから，物理的な正当性をもつ弱解を選択すべく，何らかの付加条件，“エントロピー条件”，を満たす弱解を通常は採用する。我々の(DE)-(IC)についても，その放物項の退化性と移流項の及ぼす影響とのかね合いから先と同様の現象が起こることが予想されるため，いかなる超関数解を選択するかが問題であった。

これまで(DE)-(IC)に関しては，主に porous medium 型の退化放物項の場合が研究され，β の退化の様子とその退化点に於ける移流項との様々な整合

条件のもとで解の一意性等が考察されてきた。近年また幾つかの結果も報告されてきたが，最近 Gagneux and Madaune-Tort [4] は有界領域 $\Omega\,(\subset \mathbb{R}^N)$ に於いて

$$\beta : \text{strictly increasing}$$

$$A(\xi) = \phi(\xi)\boldsymbol{G}, \qquad \text{ここに } \phi \in C(\mathbb{R}),\ \boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^N$$

である場合に次の定理を示した:

Theorem (Gagneux and Madaune-Tort).
Let $u, \hat{u} \in C([0;T]; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$ *are distribution solutions of* (DE). *Then*

$$\int_\Omega \Big(u(t) - \hat{u}(t)\Big)^+ dx \leq \int_\Omega \Big(u(s) - \hat{u}(s)\Big)^+ dx \qquad \textit{for } 0 \leq s \leq t.$$

ここで採られたの証明の方法が移流項が一般の (DE) の場合にも適用できること等から，(β が strictly increasing である限りにおいては) この結果は非線形放物項の退化性と移流項の間に何の制約や整合条件を課することを要求しない，ほぼ超関数解であることのみで一意性の成立を主張するという意味で最適なものといえる。この結果，既存の一意性に関する結果は殆ど全て [4] に含まれ，よって一意性問題の簡潔な形で解決をみたと同時に，これまでその必要性が予想されていた選択の基準となるであろうエントロピー条件等の何らかの付加条件も実は不要であったことが判明した。

[4] でなされた一意性の証明は Kato's inequality:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|u - \hat{u}| &+ \nabla\cdot\Big(\mathrm{sgn}_0(u - \hat{u})[A(u) - A(\hat{u})]\Big)\\ &\leq \nabla\cdot\Big[\mathrm{sgn}_0(u - \hat{u})\Big(\nabla\beta(u) - \nabla\beta(\hat{u})\Big)\Big] \quad \text{in } \mathscr{D}'(\Omega \times (0,T)),\end{aligned}$$

を示すために Kružkov のテスト関数の方法が用いられている。また [4] では任意の weak solution が非線形拡散項を含んだ場合の Kružkov の意味の解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|u - k| &+ \nabla\cdot\Big(\mathrm{sgn}_0(u - k)[A(u) - A(k)]\Big)\\ &\leq \nabla\cdot\Big(\mathrm{sgn}_0(u - k)\nabla\beta(u)\Big) \quad \text{in } \mathscr{D}'(\Omega \times (0,T)),\end{aligned}$$

であることも示されてはいるが，この事実自体は一意性の証明には用いられておらず，直接の関連はない。この結果より以前に Yin [9] は Vol'pert and Hudjaev [7] の流れに沿った BV-function theory により BV に属する解に対して Kato's inequality を示した。しかしながら測度としか意味づけ出来ない時間微分の取り扱いに於いて若干問題を残すものではあった。筆者は [9] のアイデアを用いて (DE) に記述する微分作用素が $L^1(\mathbb{R}^N)$ で m-dissipative であることを示し，非線形半群解として (DE)-(IC) の解を構成した [6]。ここで構成された半群解は (DE)-(IC) に対する有限差分近似解の極限でもあることから，[4] で一意性定理が示されるまでは半群解が物理的な正当性をもつ弱解の候補であろうと捉えていた。

本稿では，先の結果に於いて本質的な役割を果たした β に対する strictly increasing の仮定を <u>nondecreasing</u> にまで緩めた場合，つまり β の形状が flat な区間を有するとき (これを強退化型と呼ぶ) を考察する。強退化型の場合も，(あるとすればの) 一意解のクラスはある消散作用素の生成する非線形半群解として与えられると期待されることから，非定常問題の一意性の前段階として

- (DE) を適切に記述する微分作用素 $\mathcal{A} : v \mapsto \Delta\beta(v) - \nabla\cdot A(v)$ の導入
- 作用素論的な立場からの $\mathcal{A}$ の性質 (消散性，値域条件，etc.)

に主眼をおく。β が strictly increasing の場合には結果的に不要とされた “エントロピー条件” が，nondecreasing の場合には再びその必要性を生ずるという差異がみられる。

1. エントロピー条件

(DE) を記述する微分作用素 $\mathcal{A}$ を関数空間 $L^1(\mathbb{R}^N)$ で定式化し，その消散性:

$$\|v - \hat{v}\|_1 \le \|(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})v - (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})\hat{v}\|_1 \qquad \text{for } v, \hat{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \lambda > 0,$$

を問題とする際，$L^1(\mathbb{R}^N)$ の双対写像が $\mathrm{sgn}_0(\cdot)$ であることから，$\mathrm{sgn}_0(v - \hat{v})$ がテスト関数の候補である。しかしながら (DE) の解には滑らかさが BV 以上

を期待できないことにより，$\mathrm{sgn}_0(v-\hat{v})$ の扱いには困難を伴う。β が strictly increasing ならば $\mathrm{sgn}_0(v-\hat{v}) = \mathrm{sgn}_0(\beta(v)-\beta(\hat{v}))$ であり，$\beta(v)-\beta(\hat{v})$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ に属することから，若干その取り扱いが容易となる利点がある。さらに

$$u = \beta^{-1}\big(\beta(u)\big)$$

により，いわば未知関数 u を $\beta(u)$ である程度代用することが可能であることが使えるが，我々の場合 β^{-1} は多価となるので破綻をきたす。

これらの事実，及びエントロピー解の実現に留意して，(DE) を記述する微分作用素 $\mathcal{A}: v \mapsto \Delta\beta(v) - \nabla\cdot A(v)$ を以下のように定義をする。

Definition 1. $(v,w) \in \mathcal{A}$ $(\subset L^1(\mathbb{R}^N)^2)$ if and only if

(i) $v \in BV \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ and $\nabla\beta(v)$, $\nabla G(v) \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$ where $G(r) = \int^r \sqrt{\beta'(s)}\,ds$;

(ii) For any $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R})$ with $\mathcal{H}' \in L^\infty(\mathbb{R})^+$, the following two inequalities hold:

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{H}(\beta(v))w\varphi\,dx \\
&\qquad \le -\int \nabla\beta(v)\cdot\nabla\Big[\mathcal{H}(\beta(v))\varphi\Big]dx \\
&\qquad\qquad +\int \Big(\int^v \mathcal{H}(\beta(s))a(s)\,ds\Big)\cdot\nabla\varphi\,dx, \\
&\int \mathcal{H}(v)w\varphi\,dx \\
&\qquad \le -\int \mathcal{H}'(v)|\nabla G(v)|^2\varphi\,dx - \int \mathcal{H}(v)\nabla\beta(v)\cdot\nabla\varphi\,dx \\
&\qquad\qquad +\int \Big(\int^v \mathcal{H}(s)a(s)\,ds\Big)\nabla\varphi\,dx
\end{aligned}$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+$,

where $a(s) = (d/ds)A(s)$.

ここで現れた $\mathcal{H}$ は $\mathrm{sgn}_0(\cdot)$ の近似を，つまりこの二つの積分不等式は test function として

$$\mathrm{sgn}_0(\beta(u)-\beta(k)) \qquad \text{及び} \qquad \mathrm{sgn}_0(u-k)$$

を採ることを想定している。β が strictly increasing であるときは，これらは等しく区別されなかった。後の不等式に於いて $\mathcal{H}(\cdot)=\mathcal{H}_j(\cdot-k)$ $(k\in\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}_j(s)=\begin{cases} -(j\pi/2)^{-1}\cos[(j\pi/2)s]+j^{-1} & (|s|\le j^{-1}), \\ |s| & (|s|\ge j^{-1}). \end{cases}$$

と選べば

$$\lim_{j\to\infty}\mathcal{H}_j(s)=|s|, \qquad \lim_{j\to\infty}\mathcal{H}_j'(s)=\mathrm{sgn}_0(s),$$

から

$$\int \mathrm{sgn}_0(v-k)w\varphi\,dx \le -\int \mathrm{sgn}_0(v-k)\nabla\beta(v)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int\Big(\int_k^v \mathrm{sgn}_0(s-k)a(s)\,ds\Big)\cdot\nabla\varphi\,dx.$$

k の任意性により

$$w=\Delta\beta(v)-\nabla\cdot A(v) \qquad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N\times(0,\infty))$$

を得るから超関数の意味では満たしている。

次に $\mathcal{A}$ の値域条件に関しては，$\beta_\varepsilon(s)=\beta(s)+\varepsilon s$ $(\varepsilon>0)$ として

$$\mathcal{A}_\varepsilon v := \Delta\beta_\varepsilon(v)-\nabla\cdot A(v)$$

を考えることにより以下を得る。

Proposition 2. *Let $v\in BV\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Then*

(i) $\{(\mathcal{I}-\lambda\mathcal{A}_\varepsilon)^{-1}v\,;\,\varepsilon>0\}$ *is bounded in* $BV\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $\exists(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ *such that*

$$v^\lambda := \exists\lim_{n\to\infty}(\mathcal{I}-\lambda\mathcal{A}_{\varepsilon_n})^{-1}v \qquad \text{in } L^1(\mathbb{R}^N)$$

and

$$v^\lambda\in\mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (I-\lambda\mathcal{A})v^\lambda=v.$$

2. 消散性

$\mathcal{A}$ の $L^1(\mathbb{R}^N)$ での消散性を調べるため，この節以降は係数の間に次の整合条件を置く。

$$
\text{(H)} \qquad \begin{cases} \text{For each } v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ and } i = 1, \cdots, N, \\ \qquad \dfrac{a^i(v)}{\beta'(v)} \chi_{E(v)} \in L^2_{\ell oc}(\mathbb{R}^N) \\ \text{where } E(v) = \{x \in \mathbb{R}^N ; \beta'(v(x)) > 0\}. \end{cases}
$$

つまり β が flat な部分では A の様子を規定はしないが，β の形状が傾きかける近傍での制約を課すものである。[4] が示される以前の結果ではこの種の何らかの整合条件が置かれていた [1,3,8]。また，特に

$$
\sup_{\beta' > 0} \frac{|a^i(s)|}{\beta'(s)} < \infty
$$

であればこの条件は満たされることに注意する。

先の仮定のもとで消散性に準ずると考えられる次の結果を得る:

Proposition 3. *Let $v, \hat{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ and $\lambda > 0$. Then*

$$
\begin{aligned}
&\int \operatorname{sgn}_0(\beta(v) - \beta(\hat{v})) \cdot (v - \hat{v})\, dx \\
&\qquad \le \int \operatorname{sgn}_0(\beta(v) - \beta(\hat{v})) \cdot \Big[(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})v - (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})\hat{v} \Big]\, dx.
\end{aligned}
$$

証明は $\mathcal{A}$ の定義に於ける第一の積分不等式に Kružkov のテスト関数の方法を適用し，BV 関数についての幾つかの性質 (fine properties) を用いる。この結果から直ちに次を得る:

Corollary 4. *Let $v, \hat{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ and $\lambda > 0$. If $(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})v = (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})\hat{v}$, then*

$$
\beta(v) = \beta(\hat{v}) \qquad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^N.
$$

$\mathcal{A}$ の消散性が成立すれば $\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A}$ の単射性が従うことは明らかであるが，これらの結果からは未だ単射であるか否かも結論できない。Corollary 4 が意

味するのは v と $\hat{v}$ との差異は退化集合 $(\beta')^{-1}(\{0\})$ 上でしか起こらないと解釈できるが，係数間の整合性を $\beta' > 0$ 上でしか考慮しなかったことを考えるとこの状況は当然の帰結ともいえる。

それでは $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ の元が如何なる付加条件を満たせば $\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A}$ の単射性，つまり定常問題:

$$v - \lambda[\Delta\beta(v) - \nabla\cdot A(v)] = f \text{ (: given)}$$

の解の一意性，が成立するのかを次節で扱う。

3. Jump condition

いま Corollary 4 の仮定が成立するとしよう。このとき

$$\mathcal{A}v - \mathcal{A}\hat{v} = \big(\Delta\beta(v) - \nabla\cdot A(v)\big) - \big(\Delta\beta(\hat{v}) - \nabla\cdot A(\hat{v})\big) = -\big(\nabla\cdot A(v) - \nabla\cdot A(\hat{v})\big)$$

が空間 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ (あるいは $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$) で成立する。従って

$$\mathrm{sgn}_0(v - \hat{v})(\mathcal{A}v - \mathcal{A}\hat{v})\,dx = -\mathrm{sgn}_0(\overline{v} - \overline{\hat{v}})\,dD\big(A(v) - A(\hat{v})\big)$$

が測度の意味で成立する$\Big($ここに，$\overline{v} := (v^+ + v^-)/2$ は v の Vol'pert's average value であって，$\Gamma_v := \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, v^-(x) < v^+(x)\}$ とするとき，$\overline{v}(x) = v^+(x) = v^-(x)$ for $x \notin \Gamma_v$ である$\Big)$。この式自体は $\mathcal{A}$ がもとより $\Delta\beta(v)$ を伴わない一階の作用素 $v \mapsto -\nabla\cdot A(v)$ であるときにはその定義域を $BV(\mathbb{R}^N)$ に制限して成立するものである。ここで BV-function に対する発散定理を用いることにより

$$\begin{aligned}
&-\int \varphi\mathrm{sgn}_0(\overline{v} - \overline{\hat{v}})\,dD\big(A(v) - A(\hat{v})\big) \\
&\quad = \int \mathrm{sgn}_0(v - \hat{v})(A(v) - A(\hat{v}))\cdot\nabla\varphi\,dx \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{v-\hat{v}}} \varphi[\mathrm{sgn}_0(v^+ - \hat{v}^+) - \mathrm{sgn}_0(v^- - \hat{v}^-)](A(\overline{v}) - A(\overline{\hat{v}}))\cdot\nu_{v-\hat{v}}\,d\mathscr{H}^{N-1}
\end{aligned}$$

であるから，もし

$$(D)\qquad \left\{ \begin{array}{r} [\mathrm{sgn}_0(v^+ - \hat{v}^+) - \mathrm{sgn}_0(v^- - \hat{v}^-)](A(\overline{v}) - A(\overline{\hat{v}}))\cdot\nu_{v-\hat{v}} \le 0 \\ \text{for } \mathscr{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \Gamma_{v-\hat{v}} \end{array} \right.$$

が成立するならば，これより直ちに $\mathcal{I}-\lambda\mathcal{A}$ の単射性が従うこととなる。

ここで $k\in\mathbb{R}$ を恒等的に値 k をとる関数と同一視すると $(k,0)\in\mathcal{A}$ であるから[1]，

$$\begin{aligned}
&-\int\varphi\mathrm{sgn}_0(\overline{v}-k)\,dDA(v)\\
&\quad=\int\mathrm{sgn}_0(v-k)(A(v)-A(k))\cdot\nabla\varphi\,dx\\
&\qquad+\int_{\Gamma_v}\varphi[\mathrm{sgn}_0(v^+-k)-\mathrm{sgn}_0(v^--k)](A(\overline{v})-A(k))\cdot\nu_v\,d\mathscr{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

この等式は一階の項のみの関係式ゆえ，いま Kružkov の意味の一階の作用素 $v\mapsto-\nabla\cdot A(v)$ を $BV(\mathbb{R}^N)$ に制限したものを $\mathcal{A}_0$ とするとき，

$$v\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)\iff[\mathrm{sgn}_0(v^+-k)-\mathrm{sgn}_0(v^--k)](A(\overline{v})-A(k))\cdot\nu_v\le 0\quad\text{for }\mathscr{H}^{N-1}\text{-a.e. }x\in\Gamma_v$$

と言い換えることができる。この事実に着目して次の定義をする。

Definition 5. We say that $v\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfies the *jump condition* if for any $k\in\mathbb{R}$

$$(J)\qquad\left\{\begin{array}{l}[\mathrm{sgn}_0(v^+-k)-\mathrm{sgn}_0(v^--k)](A(\overline{v})-A(k))\cdot\nu_v\le 0\\ \qquad\qquad\text{for }\mathscr{H}^{N-1}\text{-a.e. }x\in\Gamma_v.\end{array}\right.$$

先に述べたように (D) から (J) が従うのは明らかだが，逆に Kružkov のテスト関数の方法を用いて次の Lemma を示すことができる：

Lemma 6. *Let $v,\hat{v}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfy the jump condition. Then*

$$[\mathrm{sgn}_0(v^+-\hat{v}^+)-\mathrm{sgn}_0(v^--\hat{v}^-)](A(\overline{v})-A(\overline{\hat{v}}))\cdot\nu_{v-\hat{v}}\le 0\quad\textit{for }\mathscr{H}^{N-1}\textit{-a.e. }x\in\Gamma_{v-\hat{v}}.$$

換言すれば Kružkov のテスト関数の方法とは (J) の定数 k を一般の $\hat{v}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ に置き換えるための手段といえる。

[1] $k\notin L^1(\mathbb{R}^N)$ ではあるが，本稿の議論は適切な weight function を考えることにで $L^1(\mathbb{R}^N)$ を $L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^N)$ とできる。

以上のことから我々の場合も $\mathcal{I}-\lambda\mathcal{A}$ の単射性を示す際には，$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ の元 v に対して jump condition がいつ成立するのかが問題となる。この種の Γ_v 上での条件は Vol'pert and Hudjaev が既に [7] に於いて "discontinuity condition" として提起し，それに基づいて彼らは一意性の証明を与えた。しかし，Wu Zhuoqun [10] は実は彼らの条件の拡散項の部分に不備があったことを指摘し，修正した "discontinuity condition" を与えている。これは空間一次元でしか定式化されておらず，またそのもとで一意性を得られたことを証明なしで announce はしているものの詳細は不明である。Corollary 4 が示すように，こと単射性に関する限りは拡散項は考慮する必要性がないことから，ここでは "discontinuity condition" を対象とする代わりに (J) の成立する状況を考えることにする。

$\mathcal{A}$ の定義の第二の積分不等式は形式的には方程式 (DE) と $\mathcal{H}(v)\varphi$ との対をとって部分積分

$$\int \mathcal{H}(v)\varphi\Delta\beta(v)\,dx = -\int \mathcal{H}'(v)|\nabla G(v)|^2\varphi\,dx - \int \mathcal{H}(v)\nabla\beta(v)\cdot\nabla\varphi\,dx,$$
$$-\int \mathcal{H}(v)\varphi\nabla\cdot A(v)\,dx = \int\Big(\int^v \mathcal{H}(s)a(s)\,ds\Big)\cdot\nabla\varphi\,dx$$

を行ったものであるが，$\mu := \Delta\beta(v)$ や $\nabla\cdot A(v)$ は一般には $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ の元以上の滑らかさを持ち得ず，その扱いは困難である。例えば，$\mathcal{H}(v)$ との対をとる際もこれ自身 BV の滑らかさしか有しないことなど，test function としては広いクラスから選んでいること等。従って部分積分

$$(E) \qquad \int \mathcal{H}(\overline{v})\varphi\,d\mu = -\int \mathcal{H}'(v)|\nabla G(v)|^2\varphi\,dx - \int \mathcal{H}(v)\nabla\beta(v)\cdot\nabla\varphi\,dx$$

が成立するか否かは不明で，一般には不等号 $\leq$ しか得られない。

実は次の事実を示すことができる。

Lemma 7. *Let $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. If the equality* (E) *holds, then v satisfies the jump condition.*

(E) が成立するための幾つかの十分条件が挙げられるが，最も簡潔な十分条件として

Proposition 8. *If $N = 1$, then the equality (E) holds.*

この証明には一次元の特殊性が本質的である。現在までの所，これ以外に有用な十分条件は得られていない。その主たる理由は，多次元の有界変動関数の取り扱いの困難さから実際に check するのが容易でない事による。

4. 結果

Proposition 8 により $N = 1$ のときは (E) が，従って $\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A}$ の単射性が得られる。ここで Proposition 2 により $v \in BV \cap L^\infty(\mathbb{R})$ に対しては

$$\{(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A}_\varepsilon)^{-1} v \,;\, \varepsilon > 0\}$$

の $L^1(\mathbb{R})$ での任意の集積点 z は $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ に属し，且つ $(I - \lambda\mathcal{A})z = v$ を満たした。従って集積点は唯一となり，収束は部分列を採ることなく

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A}_\varepsilon)^{-1} v = (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})^{-1} v \qquad \text{in } L^1(\mathbb{R})$$

を得る。この収束結果と $\mathcal{A}_\varepsilon$ が $L^1(\mathbb{R})$ で消散的であることから，$\mathcal{A}$ の $L^1(\mathbb{R})$ での消散性や値域条件は容易に従う。

以上を要約すると

Theorem 9. *Assume that β and A satisfy the condition* (H)*. Then, the following assertions hold:*

(i) *$\mathcal{A}$ is dissipative in $L^1(\mathbb{R})$ and $\mathcal{R}(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A}) \supset BV \cap L^\infty(\mathbb{R})$.*

(ii) *For any $v \in BV \cap L^\infty(\mathbb{R})$ we have*

$$T(t)v := {}^{\exists}\lim_{\lambda\downarrow 0}(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})^{-[t/\lambda]} v \qquad \textit{in } L^1(\mathbb{R})$$

and the convergence is uniform for bounded t.

(iii) $\{T(t)\,;\,t \geq 0\}$ *forms a nonlinear semigroup in* $L^1(\mathbb{R})$ *with its domain* $BV \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

(iv) $u(x,t) := [T(t)v](x)$ *is a weak solution for* (DE)-(IC) *with the initial data* v.

References

[1] Ph. Bénilan and R. Gariepy, Strong solutions in L^1 of degenerate parabolic equations, Jour. Diff. Eq's, **119** (1995), 473-502.

[2] Ph. Bénilan and H. Touré, Sur l'équation générale $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$, C. R. Acad. Sci. Paris, **299** (1984), 919-922.

[3] J. B. Betbeder, Etude d'une équation non linéaire d'évolution de type divergential, Comm. in PDE, **19** (1994), 1019-1035.

[4] G. Gagneux and M. Madaune-Tort, Unicité des solutions faibles d'équations de diffusion-convection, C. R. Acad. Sci. Pari, t. **318** (1994), 919-924.

[5] ———, *Analyse mathématique de modéles non linéaires de l'ingénierie pétroliére*, Mathématiques & Applications 22, Springer-Verlag (1996).

[6] K. Okamoto, A kinetic approach to nonlinear degenerate parabolic equations, Hiroshima Math. J., **23** (1993), 577-606.

[7] A. I. Vol'pert and S. I. Hudjaev, Cauchy's problem for second order quasilinear degenerate parabolic equations, Math. USSR-Sb., **7** (1969), 365-387.

[8] M. Watanabe, An approach by difference to the porous medium equation with convection, Hiroshima Math. J..

[9] J. Yin, On the uniqueness and stability of BV solutions for nonlinear diffusion equations, Comm. in PDE, **15** (1990), 1671-1683.

[10] Wu Zhuoqun, Some problems on degenerate quasilinear parabolic equations, Proc. Symposia in Pure Math. Vol. **45**, Part 2 (1986), 565-572.