数理解析研究所講究録
974巻 1996年 141-150

一般曲線座標系による乱流のDNS
(波状流路内乱流の DNS)

大阪大学工学部機械工学科 太田 貴士 (Takashi Ohta)
梶島 岳夫 (Takeo Kajishima)
三宅 裕 (Yutaka Miyake)

1 はじめに

ここ数年，数値流体力学の実用性が増し，工業的ニーズにも応えることができるようになりつつある．多くの場合，その手軽さから，レイノルズ平均モデル（渦粘性モデル）が用いられることが多い．ところで，工学的応用と同時に，モデル計算ではさらに，モデル化精度の改善に力が注がれてきた．既存モデルの検証，改善に直接数値シミュレーション (DNS) によって得られたデータベースが用いられるようになったのは，ここ数年のことである．これにより，実験では得られることのできなかった流れ場全域での運動量，エネルギー収支等を厳密に考察することができるようになった．

検証のために最もよく用いられる流れ場の一つに，平行平板間流れがある．スペクトル法を効率よく適用でき，基本的な流れ場であることから，これまでに信頼性の高いデータベースがいくつか構築されて，実際のモデル検証に適用されてきた．この直接シミュレーションは，膨大な計算量を必要とし，高性能な計算機への依存が大きい．それだけでなく，これまでは限られた計算スキームで，また，そのスキーム自身にかなりの制約を伴うことが多いため，一般的な流れ場への拡張が行なわれることが少なかった．

ところが，一様せん断流れ，平行平板間流れなど，主として 1 せん断成分 $(\partial\overline{u}/\partial y)$ のみが支配的な流れ場において確立され，検証された乱流

モデルの多くは，より複雑な形状の流れ場において，破綻する例はしばしば報告されている．そのような流れ場における乱流構造の考察と乱流モデルの検証のための DNS 手法としては，高次精度の差分法が最適であると考えられる．著者らはその目的で，整合性の高い差分解法を開発してきた．

ここで，片側の壁が波状の平板間流れ（波状流路流れ）をとりあげる．波状壁の振幅を変化させることによって，単純な平行平板間流れから大規模な剥離を伴う流れまでリニアに考察することができ，モデル検証のために適度に複雑であり，それであって高精度な計算が期待できる．

一般座標系におけるコロケーション格子に拡張された補間法を対流項に適応し，さらに圧力項の扱いにも注意を払いつつ得られたスキームを示し．波状流路における乱流場の直接シミュレーションに適用した結果を示す．

2 波状流路内流れ

図 1に示すような片側が平板 $(y=0)$ で，幅が次のように変化する波状流路内における十分に発達した乱流を考え，流れ方向に 1 周期，横断方向に有限領域を切り取り，各方向に周期条件を適用してた領域を計算対象とした．

$$H(x)=\overline{H}\left(1+a\cos(\frac{2\pi}{x/L})\right) \tag{1}$$

ここで，$\overline{H}$ は平均流路幅，a は波状壁の平均流路幅に対する振幅比，L は波形の周期を表す．

3 基礎方程式

一般曲線座標系での連続の式と非圧縮 Navier-Stokes 式はそれぞれ次のように表される．直角成分表示された運動方程式を変換して，反変成分表示を得ることができる．

- 連続の式

$$\frac{\partial JU^i}{\partial \xi^i} = 0$$

- 運動方程式
  - 直角成分表示

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + U^k \frac{\partial u^i}{\partial \xi^i} = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\frac{\partial p}{\partial \xi^k} + \frac{1}{R}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^j}\frac{\partial u^i}{\partial \xi^l}\right)$$

  - 反変成分表示

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j U^i\Big|_j = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^k}\frac{\partial p}{\partial \xi^j} + \frac{1}{RJ}\frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(J\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m}\frac{\partial U^i}{\partial \xi^k}\right)$$

ここで，u_i は直角座標系 x_i での速度成分，U^k は一般曲線座標系ξ^k での反変速度成分，J は変換の Jacobian を表す．

4 数値計算法

4.1 対流項

対流項については，運動量が保存される発散型 $\partial(u_j u_i)/\partial x_j$ と勾配型 $u_j(\partial u_i/\partial x_j)$ は，連続の式$\partial u_j/\partial x_j = 0$ にもとで，互換である．同様に，差分近似式においてもこの関係が成り立つためには，勾配型対流項に補間法 [1] を適用すればよい．今回は，一般曲線座標系に拡張された補間法 [2] を用いる．

発散型対流項の差分は

$$\frac{1}{J}\left(\delta_\xi(JU\overline{u_i}^\xi) + \delta_\eta(JV\overline{u_i}^\eta) + \delta_\zeta(JW\overline{u_i}^\zeta)\right) \tag{2}$$

であり，勾配型対流項を補間法に基づいて差分すると

$$\frac{1}{J}\left(\overline{JU\delta_\xi u_i}^\xi + \overline{JV\delta_\eta u_i}^\eta + \overline{JW\delta_\zeta u_i}^\zeta\right) \tag{3}$$

となる．δ は添字方向の中心差分，$\overline{}$は添字方向の半格子分ずれた格子列からの補間を表す．2 次精度差分の場合，式 (2) と式 (3) の差は，

$$u_i(\delta_\xi(JU) + \delta_\eta(JV) + \delta_\zeta(JW)) \tag{4}$$

であり，これは差分化された連続の式が精度よく満たされれば無視できる．ただし，4 次精度差分の場合には，局所的な互換性は成り立たないが，全域的な一致が保たれる．

しかし，勾配型対流項の差分を，従来使用されている形式

$$\overline{U}^\xi \delta'_\xi u_i + \overline{V}^\eta \delta'_\eta u_i + \overline{W}^\zeta \delta'_\zeta u_i \tag{5}$$

とすると，式 (2) とは整合しない．

4.2 時間進行法

時間進行は，連続の式と運動方程式の圧力項を陰的に，その他の項を 2 次精度の Adams-Bashforth 法により陽的に扱う．具体的な手順を以下に示す．

(1) 格子中心で対流項と粘性項を求め，陽的に部分段階 (Fractional step) 速度 u_i^* を求める．ただし，H_i は 対流項と粘性項の和である．

$$u_i^* = u_i^n + \frac{\Delta t}{2}(3H_i^{(n)} - H_i^{(n-1)})$$

(2) 反変成分に変換してから，スタガード位置に補間して U_j^* とする．

$$U_j^* = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} u_i^*$$

(3) 反変成分 $U_j^{(n+1)}$が連続の式を満たすように圧力を決める．

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(J \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \xi^k}\right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (JU_j^*)}{\partial \xi_j}$$

(4) U_j^* を圧力勾配にて更新し，連続の式を満たす速度場の反変成分を得る．

$$U_j^{(n+1)} = U_j^* - \Delta t \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \xi^k}$$

以上を繰り返すことによって新たな時間進行を行なう．その際，F_iを求めるために，直角座標成分 u_iが必要である．その時の速度の反変成分 U_jはすでに求まっている．上の手順 (3) の反変成分への変換・補間の逆演算を行なって，反変成分から直角座標成分を求めることができる．ところが，この逆演算を非定常計算の各時間進行に行なうことは，実用的ではない．ここでは，圧力を用いて直角座標成分 u_jを求めることにする．

(5) 反変成分と同様に圧力場で速度の直角座標成分 u_i^*を修正する．

$$u_j^{(n+1)} = u_j^* - \Delta_t \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \xi_k} \tag{6}$$

5 計算条件

レイノルズ数を $Re_\tau (= Q\overline{u_\tau} u/\overline{H}\nu) = 300$ である．，流路形状を $L = 3.84\overline{H}$，横断方向に $1.92\overline{H}$，$a = 0.05$ とする．格子数を 64^3として，上の壁も平板 $(a = 0)$ のとき，格子解像度は$h_x^+ = 18$，$h_y^+ = 0.93 \sim 9$，$h_z^+ = 9$ となった．計算格子は，図 7に示すようなコロケーション格子を用いた，格子の中心点で速度の直角座標成分，圧力を定義し，格子の境界上で反変成分を配置する．速度の境界条件は壁面上ですべりなし，主流 (x) および横断 (z) 方向には周期条件を適用する．無次元化された主流方向の運動方程式に圧力勾配 2 を加えれば，変動圧力だけを解くことになり，これにも周期条件を適用できる．微分演算は全て 4 次精度で中心差分で近似する．

6 計算結果

上の計算スキームにしたがって，波状壁の振幅比 $a/\overline{H}$ が 3%, 4%, 5%, 6%, 7%, 8% のそれぞれの場合の直接シミュレーションを行ない，特に

5%での各統計値を示す．すべてのシミュレーションにおいては，すでに得られている平行平板間乱流場を用い，緩やかに波状壁に振幅を与えて，流量，乱流エネルギー等を調べつつ，十分に安定したことを確認した流れ場を，定常における時間平均計算のための初期値として用いた．

各振幅比での波状壁面上の瞬時のせん断応力分布の等値線図を図3に示す．流れ方向は左から右で，平板側から波状壁側を見た様子である．等値線はτ_wで1.0刻であり，太実線で$\tau_w = 0$を表し，その内側は剥離領域である．これらの図より3%,4%では，壁に沿った流れであるが，5%以上では，流路幅拡大部において剥離領域が存在し，波形振幅が増すにつれ，剥離領域が拡大していることがわかる．特に，振幅比5%では，図3より部分的に剥離が生じているが，アンサンブル平均では壁に沿ったながれに見られる．8%では，スパン方向のあらゆる位置で剥離が観察され，平均流れにも剥離泡がみられるようになる．

以下では，波状壁の振幅比が5%の場合の各統計量の計算結果を示す．図4は流れ方向，壁に垂直方向の平均速度分布と平均圧力分布である．流れは，各図の右上から左下方向であり，手前が波状壁，奥が平板側となる．流路幅の縮小，拡大にともない，流れが加速，減速を繰り返していることが流れ方向の平均速度分布からわかる．また，流路幅縮小部で，波状壁に流れが衝突している．平均圧力分布も同様に，周期的な変動を繰り返しているが，流路形状から若干位相がずれた分布になっている．

レイノルズ応力分布を図5に示す．いずれも平行平板間乱流の場合に対応する分布になっているが，特に波状壁付近では，流路幅の変化にともなって，流れ方向に変化している．これは，$u'_{\rm rms}$のように，流路形状に対する位相のずれだけでなく，$v'_{\rm rms}$の流路拡大部のように2方向以上の変化が同時に起こる，より複雑な分布である．

最後に，図6は一周期間の上下壁面摩擦応力と波状壁面上の静圧の流れ方向成分$\tau_{x({\rm flat})}$，$\tau_{x({\rm wavy})}$，$p_{x({\rm wavy})}$である．これらの和の一周期分の平均が無次元平均圧力勾配2につりあっている．各壁面上とも位相がずれた分布になっている．それぞれのせん断応力τ_xは異なった分布になっている

ものの，一周期期間の平均ではほぼ同じ配分になっている．また，平均化された結果，波状壁面上では剥離部分がないことがこの図からわかる．

7　結　論

一般曲線座標を用いて，波状流路内乱流の直接シミュレーションを行ない，周期的圧力勾配，上流履歴，波形振幅を増やした剥離の影響下にある乱流場のデータが得られた．このとき，微分演算を 4 次精度の中心差分とし，運動方程式の対流項に一般曲線座標に拡張された補間法を適用し，圧力項に比較的整合性の高いスキームを適用した．

さらに，実際のシミュレーション結果を示した．特に，レイノルズ応力は，これまでの平行平板間乱流では存在しなかった，流れ方向に変化のある分布になっている．これらは，これまで困難であったレイノルズ平均モデルの流れ方向のモデル化の精度の検証のために有用なデータベースになり得る．

文 献

[1] 梶島, 日本機械学会論文集 B 編 **60**-574, pp.2058–2063 (1994).

[2] 梶島・太田・三宅, 第 9 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.161–162 (1995).

[3] 梶島, 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.301–304 (1994).

[4] 太田・梶島・三宅, 第 9 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.175–176 (1995).

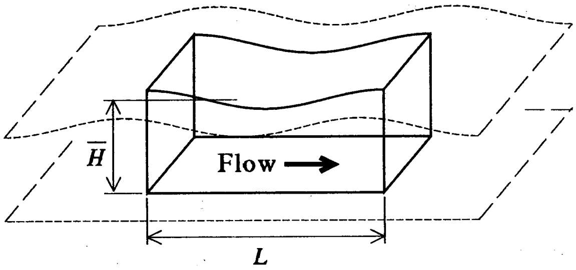

図 1: Wavy channel

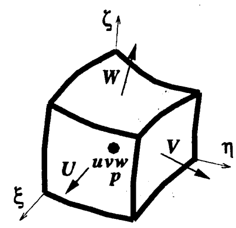

図 2: Collocation grid

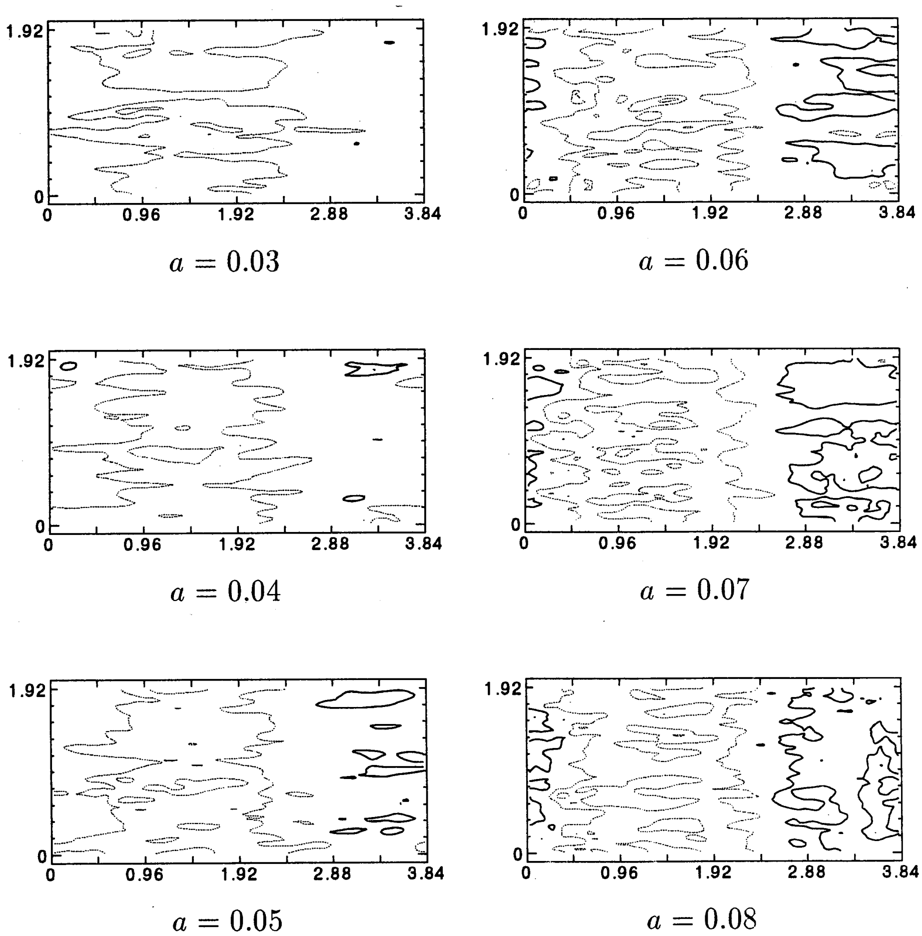

図 3: Iso-contours of wall shear stress on wavy wall with variant amplitude

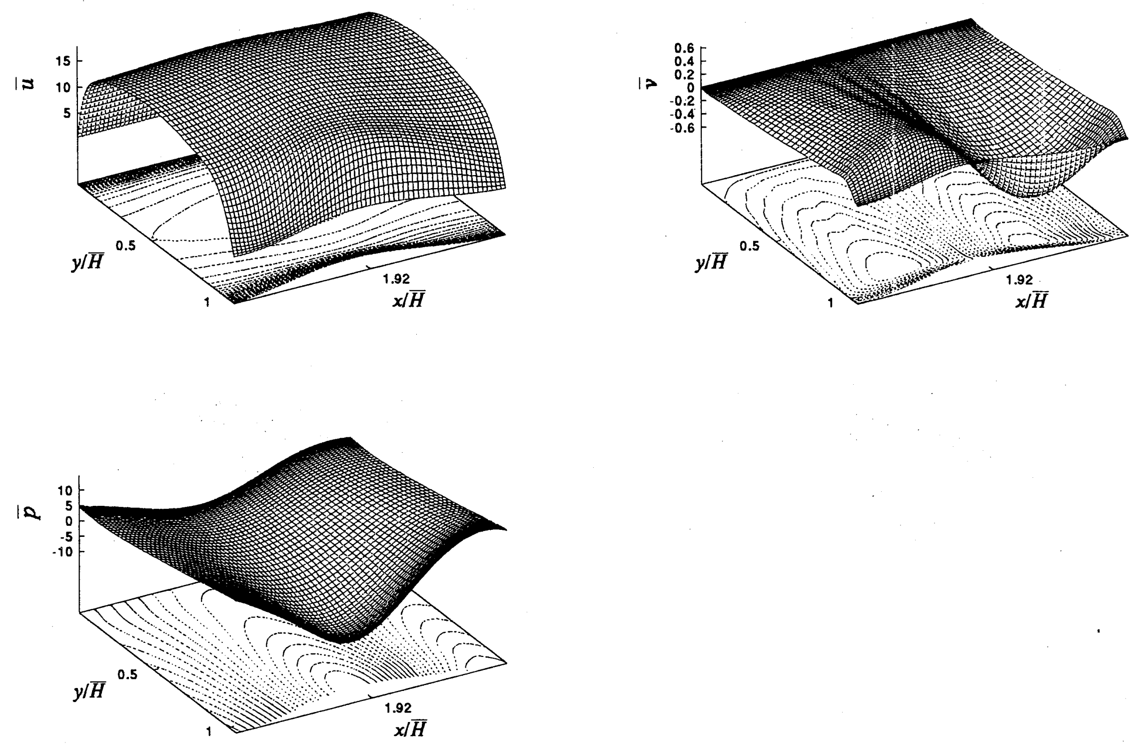

図 4: Mean velocity and pressure (Grid : 64^3 Amp. : 5%)

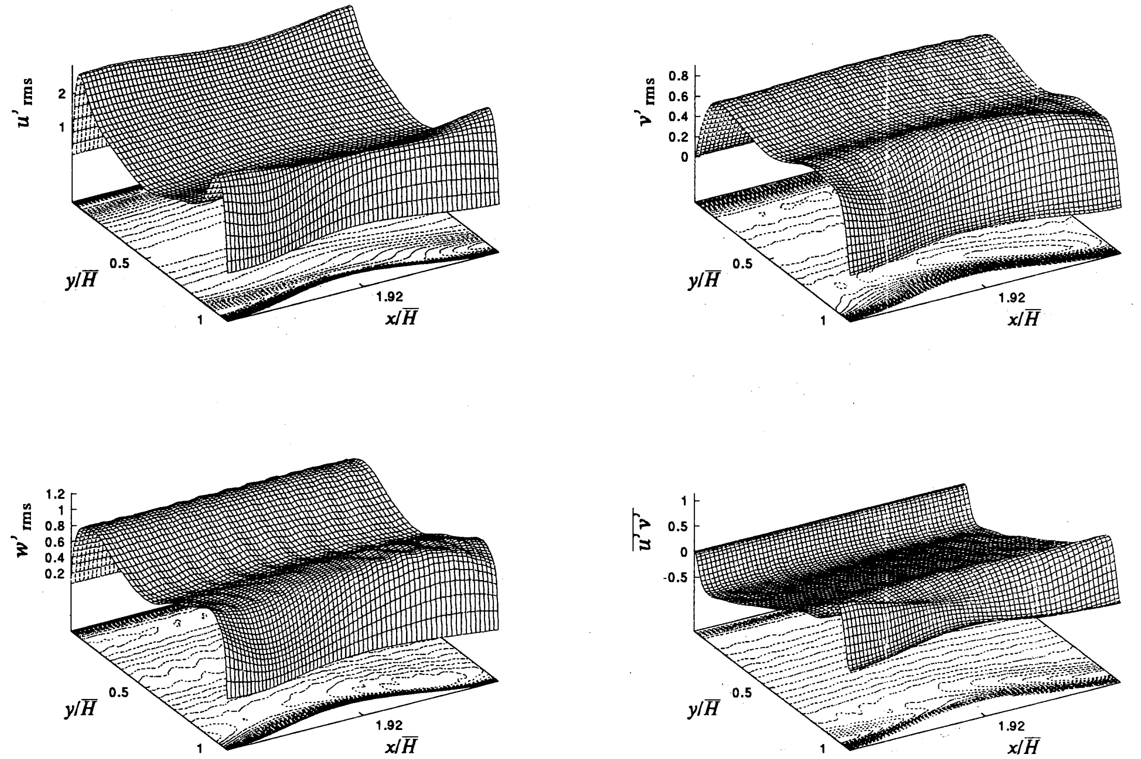

図 5: Reynolds stress (Grid : 64^3 Amp. : 5%)

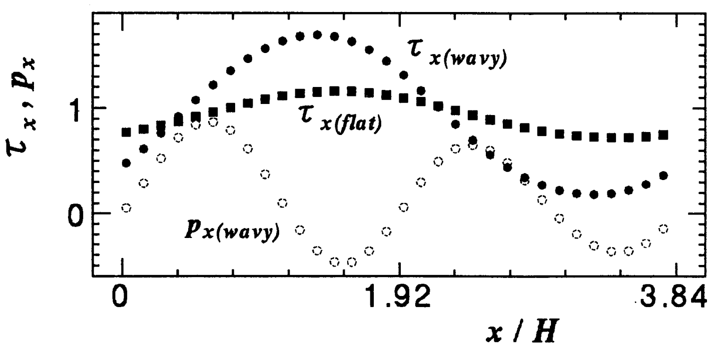

図 6: Force(shear stress, pressure) on walls in x