

# Taylor-Green 渦のエンストロフィーの逐次近似

広島大学総合科学部 大木谷 耕司 (Koji OHKITANI)

## I. はじめに

渦度の引き伸ばし効果は乱流中の小スケールの構造や、完全流体において発生する可能性のある自発的な特異性の形成において重要な役割をすると考えられる。特に後の方の、完全流体の渦度が有限時間に無限に引き伸ばされることがあるか否か、という問題は未解決の難問である。すなわちエネルギー有限の滑らかな初期条件で爆発が起きるようなものは1つも知られていないし、また、解の大域的な存在も証明されていない。

最近の理論的研究によれば強い渦度の付近の幾何学的構造が、非線形性の増長ないし抑制をコントロールすることがわかってきている [1]。しかし、これらの方法を具体的な流れに適用し、例えば上の問題について確定的な結論を得ることは難しい。そこで、本稿では、できる限り簡単な初期条件を取り上げ、その渦度場のグローバルな特徴であるエンストロフィーの時間発展について厳密な制限を課すことを試みる。具体的には、それが満たす常微分方程式の関数形を部分的に決定する。

エンストロフィーを扱う理由には、解析的なアプローチによって流れを取り扱うとき、渦度場そのものよりもその空間積分量を取り扱う方が便利であるからである。また、もし、物理的な動機としては、ある時刻にある点の渦度が無限大になったとすると、その時と同時に（もしくは少し遅れて）エンストロフィーも無限大になると期待されることがあげられる。そうでなければ、粘性流体のエネルギー散逸率が高レイノルズ数の極限でゼロになってしまうからである。

第2章で、方法の説明のため、Burgers 方程式をとり扱い、第3章で Euler 方程式への適用をおこなう。最後の章は結びで今後の課題にふれる。本稿では方法、および結果のあらましを紹介し、詳しい計算などは [2] にゆずることにする。式変形にあたっては、随所で数式処理を援用した。特に、式 (27) は本質的に数式処理によっていることを注意しておく。

Taylor-Green 渦とは 3 次元 Euler (ないし Navier-Stokes) 方程式の周期境界条件の下での

特殊解である。その速度の初期条件は

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \sin z \\ -\sin x \cos y \sin z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

である。Taylor と Green [3] はこの流れの時間発展を時間についての巾級数展開で追跡し、エンストロフィーに関しては  $O(t^4)$  まで計算した。その後、Morf, Orszag および Frisch [4] は数値計算によって級数展開を  $O(t^{44})$  まで押し進め、その結果を有限時間における発散が存在する証拠と解釈した。しかし、同じグループ Brachet 他 [5] が数年後、数値計算を  $O(t^{80})$  までおこなったところ、彼らの以前の解釈は支持することができなかった。といっても、大域的な解の存在は不明であり、特異性の有無は今もってわかっていない。このように、初期条件の見かけ上の簡単さに比べ Taylor-Green 渦の時間発展問題はたいそう複雑である。

## II. BURGERS 方程式

この研究の方法を説明するため、非粘性の 1 次元 Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

を  $[0, 2\pi]$  での周期境界条件の下で考える。初期条件は

$$u(x, 0) = -A \sin kx \quad (3)$$

とする。ここで  $A, k$  は初期速度の振幅および波数である。波数  $k$  はあとで  $k=1$  とおく。

この流れの 'エンストロフィー' を

$$Q(t) = \frac{1}{2} \langle w^2(x, t) \rangle \quad (4)$$

で定義する；ただし角括弧は  $[0, 2\pi]$  での空間平均である。Burgers 方程式は厳密に解けるため、 $Q_0 = (kA)^2/4$  を初期のエンストロフィーとして簡単な計算からエンストロフィーが

$$Q(t) = \frac{2Q_0}{\sqrt{1-4Q_0t^2}(1+\sqrt{1-4Q_0t^2})} \quad (5)$$

となる。 $A = k = 1$  の場合、速度勾配が  $\infty$  になるため時刻  $t_* = 1$  で解は爆発する。このとき同時に  $(t_* - t)^{-1/2}$  のように  $Q(t)$  も発散する (一般的には [6] を参照)。

## A. エンストロフィー方程式

今後は  $k = 1$  の場合を考えて、エンストロフィーを

$$Q = Q(t, A) \quad (6)$$

とかく。これを  $t$  で逐次微分して

$$Q^{(2)} = Q^{(2)}(t, A), \quad (7)$$

$$Q^{(4)} = Q^{(4)}(t, A) \quad (8)$$

とかく。これらの式から  $t, A$  を消去すると  $Q(t)$  を支配する常微分方程式 (以下、ODE) :

$$\frac{d^4 Q}{dt^4} = F(Q, Q^{(2)}) \quad (9)$$

が得られる [7]。ここで  $F$  は  $t$  に依らないある関数である。

さて、ここで厳密解法がわかっておらず、また、エンストロフィーの発散も知られていないと仮定しよう。ただし、エンストロフィーの時間についての Taylor 展開係数が  $A$  をパラメータとして、いくつかわかっているとす。このとき  $Q(t)$  の振舞いを '近似' あるいは推測するにはどうすればよいだろうか?

(5) から検算できることだが、ここでは、

$$\begin{cases} Q^{(2)}(0) = 6Q_0^2, \\ Q^{(4)}(0) = 240Q_0^3, \\ Q^{(6)}(0) = 25200Q_0^4, \end{cases} \quad (10)$$

が与えられたとする。言うまでもなく、パラメータ  $A$  がなければ (10) は知りようがない。なお、奇数階の微分係数はもちろんすべてゼロである。このとき、次のようにして ODE (9) の関数形を部分的に決定することができる。

1. まず、(9) は自励系であり、 $Q_0$  は任意の正数なので、関数  $F$  は次の恒等式:

$$F(Q, 6Q^2) = 240Q^3 \text{ for all } Q \geq 0 \quad (11)$$

を満足する。

2. 次に、非粘性 Burgers 方程式は時間  $t$  に関する相似変換  $t \rightarrow \alpha^2 t$  で不変である。したがって  $F$  は

$$F(\alpha Q, \alpha^2 Q^{(2)}) = \alpha^3 F(Q, Q^{(2)}) \text{ for all } \alpha > 0 \quad (12)$$

を満たす。

このようにして  $Q(t)$  に対する ODE は部分的に決定された。平面  $(Q, Q^{(2)})$  全体で  $F$  がわかれば、問題は解けたことになるのだが、上の 1. から関数  $F(Q, Q^{(2)})$  の挙動は、曲線  $Q^{(2)} = 6Q^2$  に沿ってだけわかっている。この曲線を '参照曲線' と名づける。初期には点  $(Q, Q^{(2)})$  は参照曲線の上であり、しばらくの時間その近くにとどまる。時間が経つにつれてこの曲線からはなれていく (Fig.1)。

ここで 2. より  $Q(t)$  は、関数  $F(Q, Q^{(2)})$  の原点  $(Q, Q^{(2)}) = (0, 0)$  近傍の振舞だけによって決まることに注意しておく。ちなみに、厳密解 (9) をもちいて調べると、原点は  $F$  の特異点 (分岐点) となっていることがわかる。

### B. 逐次近似

最低次とともに第 1 次近似までを導入するためには、参照曲線上での  $F_Q$  と  $F_{Q^{(2)}}$  に対する表現が必要となる。これは次のようにして求めることができる。まず (11) を  $Q$  について参照曲線に沿って微分する：

$$F_Q + 12Q F_{Q^{(2)}} = 720Q^2. \quad (13)$$

つぎに (9) を  $t$  について 2 度微分し、 $t = 0$  とおけば、奇数次の係数は 0 となるので

$$Q^{(6)}(0) = F_Q Q^{(2)}(0) + F_{Q^{(2)}} Q^{(4)}(0) \quad (14)$$

を得る。(10) に注意して、これらを  $F_Q$ 、 $F_{Q^{(2)}}$  について解くことによって

$$\begin{cases} F_Q = -\frac{5400}{7} Q^2 (< 0), \\ F_{Q^{(2)}} = \frac{870}{7} Q (> 0) \end{cases} \quad (15)$$

と求まる。(15) から、参照曲線の近傍では  $F$  は、この曲線の左上の領域のほうが右下の領域より値が大きいことがわかる。逐次近似を導入するため、ODE の右辺を参照曲線に沿って従属変数に関して Taylor 展開する。

(a) パラメータ  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) を用いて (9) を

$$Q^{(4)} = F(Q, 6Q^2 + \lambda(Q^{(2)} - 6Q^2)) \quad (16)$$

とかけば  $\lambda = 1$  が Burgers 方程式に、また、 $\lambda = 0$  が最低次近似に対応する。そこで、右辺を曲線  $Q^{(2)} - 6Q^2 = 0$  ( $Q > 0$ ) に沿って展開すれば、ODE の第 1 次の近似までが以下のようになれる:

$$\begin{aligned} Q^{(4)} &\approx F(Q, 6Q^2) + \left. \frac{\partial F}{\partial Q^{(2)}} \right|_{\lambda=0} (Q^{(2)} - 6Q^2) \\ &= \underbrace{240Q^3}_{a_0} + \underbrace{\frac{870}{7}Q(Q^{(2)} - 6Q^2)}_{a_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

これらを  $a_0$  (第 0 近似) および  $a_1$  (第 1 近似) と呼ぶ。この第 1 近似式を  $t$  について 2 回微分して、 $t = 0$  とおけば (つまり、5 階微分係数までの厳密な値を代入すれば)  $Q^{(6)}(0)$  が (10) の厳密な値と一致することが確かめることができる。なお、 $Q^{(8)}(0)$  以降は一般に厳密な値と一致しない。

(b) さらに、すべての時間で  $Q^{(2)} > 0$  となることを仮定すれば、別の近似も可能である。

このときは

$$Q^{(4)} = F\left(\sqrt{\frac{Q^{(2)}}{6}} + \lambda\left(Q - \sqrt{\frac{Q^{(2)}}{6}}\right), Q^{(2)}\right)$$

と書いて、同様に右辺を展開すれば

$$\begin{aligned} Q^{(4)} &\approx F\left(\sqrt{\frac{Q^{(2)}}{6}}, Q^{(2)}\right) + \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_{\lambda=0} \left(Q - \sqrt{\frac{Q^{(2)}}{6}}\right) \\ &= \underbrace{\frac{40}{\sqrt{6}}(Q^{(2)})^{3/2}}_{b_0} - \underbrace{\frac{900}{7}Q^{(2)}\left(Q - \sqrt{\frac{Q^{(2)}}{6}}\right)}_{b_1} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。この場合も、第1近似は  $Q^{(6)}(0)$  までを正しく与える。以上で近似方程式が得られたので、あとはこれらを、厳密解と同じ初期条件  $Q(0)$ ,  $Q'(0)$ ,  $Q^{(2)}(0)$ ,  $Q^{(3)}(0)$ ,  $Q^{(4)}(0)$  を与えて Runge-Kutta 法によって数値的に解く。その結果は Fig.2 に厳密解 (5) および'参照解'とともにプロットした。参照解とは

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = 6Q^2 \quad (20)$$

をやはり同一の初期条件  $Q(0)$ ,  $Q'(0)$  の下で解いたものである。計算の結果、これら4つの近似および参照解すべてが有限時間で爆発することがわかった。その爆発時間を Table I にまとめてある。今のところ、この方法では真の解との誤差評価ができていないため、真の解の爆発の有無を直接には議論できない。しかし、2つの近似 (a),(b) 共に、近似次数が高くなるほど、爆発時間が厳密解のものに近付いていくことがわかる。この意味で、今の近似法から、あるとすればおよそどの時刻で起こりそうか、という点について示唆を得ることができる。一方、近似解の爆発は、すべて  $\alpha(t_* - t)^{-2}$  であるため、爆発があるとしても特異性の強度については何らヒントが得られない。

### III. 3次元 EULER 方程式

#### A. より一般的な Taylor-Green 渦

3次元 Euler 方程式に対して、上で行なったのと同様の近似を行なうためにはいくつかのパラメータを含んだ初期条件を用いる必要がある。そうでなければ、微分方程式の関数形について何も知り得ない。ここでは、次のような速度  $u$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A \cos x \sin y \sin z \\ B \sin x \cos y \sin z \\ C \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix} \quad (20)$$

を初期条件とする流れを考える。これは、もともと Taylor と Green によって考えられていたものの一種である。パラメータ  $A, B, C$  は非圧縮性から  $A + B + C = 0$  を満たす。初期の渦

度は

$$\omega = \begin{pmatrix} (C - B) \sin x \cos y \cos z \\ (A - C) \cos x \sin y \cos z \\ (B - A) \cos x \cos y \sin z \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる。

### B. エンストロフィー方程式

今考えている初期条件のクラスから発展する流れのもつエンストロフィーを

$$Q = Q(t, A, B) \quad (22)$$

とかいて、 $t$  で逐次微分を行なうと、

$$Q^{(2)} = Q^{(2)}(t, A, B), \quad (23)$$

$$Q^{(4)} = Q^{(4)}(t, A, B), \quad (24)$$

$$Q^{(6)} = Q^{(6)}(t, A, B) \quad (25)$$

を得る。これらより、 $t, A, B$  を消去して

$$\frac{d^6 Q}{dt^6} = F(Q, Q^{(2)}, Q^{(4)}) \quad (26)$$

を考える [7]。以下でこの ODE の関数形を部分的に決定し、それに基づいて近似を導入する。

注意：言うまでもなく、 $Q(t)$  に対する ODE の書き下し方には無数の可能性がある。例えば、ある関数  $G$  に対して  $Q^{(3)} = G(Q, Q', Q'')$  を考えることもできる。しかしながら、今のアプローチでは  $G$  の関数形を部分的にすら決定することはできない。

$F$  の関数形をある程度拘束するため、エンストロフィーの Taylor 展開係数を *Mathematica* の数式処理によって求めた。非常に重い計算の結果、第 6 階微分係数までは最終的に次のようになる：

$$\begin{cases} Q(0) = c_1(A^2 + AB + B^2) \\ Q^{(2)}(0) = c_2(A^2 + AB + B^2)^2 \\ Q^{(4)}(0) = c_3(A^2 + AB + B^2)^3 - c_4 A^2 B^2 (A + B)^2 \\ Q^{(6)}(0) = -c_5(A^2 + AB + B^2)^4 + c_6 A^2 B^2 (A + B)^2 (A^2 + AB + B^2) \end{cases} \quad (27)$$

ここで数値定数は、厳密に

$$c_1 = \frac{3}{8}, c_2 = \frac{5}{64}, c_3 = \frac{25}{352}, c_4 = \frac{351}{2816},$$

$$c_5 = \frac{471951}{4708352}, c_6 = \frac{7121727}{4708352} \quad (28)$$

と与えられる。微分係数のパラメータ  $A, B$  の依存性が  $A^2 + AB + B^2, A^2B^2(A+B)^2$  という2つの組合せだけを通じて入ってくるのが注目に値する。 $A = -B = 1$  の場合に [5] において4倍精度の浮動小数点演算によって計算されている結果と比較し、 $c_3, c_5$  が完全に一致することを確認した。なお、2階微分までなら、もう少し多くのパラメータを含んだ初期条件に対してさえ手計算で求めることもできる。しかしながら、計算量が莫大になるため、数式処理によっても8階微分係数はいまだに求めることができていない。

さて、 $F$  についてわかることはつぎの通りである。

1. (26) は自励系であるから関数  $F$  は次の恒等式:

$$F(c_1X, c_2X^2, c_3X^3 - c_4Y) = -c_5X^4 + c_6XY, \quad (29)$$

を満たす。ここで簡単のため

$$X \equiv A^2 + AB + B^2, Y \equiv A^2B^2(A+B)^2 \quad (30)$$

とおいた。変数  $A$  および  $B$  は実数であるため、 $X, Y$  はつぎのような不等式

$$\begin{cases} X \geq 0, \\ \frac{4}{27}X^3 \geq Y \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

を満たすことが示される (くわしくは [2] 参照)。1. から3次元空間  $(Q, Q^{(2)}, Q^{(4)})$  で定義されている  $F$  の関数形は、'参照曲面'  $Q^{(2)} = \frac{5}{9}Q^2$  上の (31) の領域で完全にわかっている。以下では、より一般的に参照曲面上すべての  $X, Y \geq 0$  に対して (29) が成り立つと仮定する (例えば、 $F$  がこの曲面上に限り解析的とすると十分)。

2. 3次元 Euler 方程式の時間に関する相似性から、恒等式

$$F(\alpha Q, \alpha^2 Q^{(2)}, \alpha^3 Q^{(4)}) = \alpha^4 F(Q, Q^{(2)}, Q^{(4)}) \text{ for all } \alpha > 0 \quad (32)$$

が成り立つ。



## C. 第0近似

さて Burgers 方程式のときと同様に逐次近似が導入できる (Fig.3)。簡単のため、本原稿ではもっぱら第0近似に話を限ることとする。

(a) 式 (29) で  $X = Q/c_1$  とおくと、次の近似が得られる：

$$\begin{aligned} Q^{(6)} &= F\left(Q, \frac{5}{9}Q^2 + \lambda\left(Q^{(2)} - \frac{5}{9}Q^2\right), Q^{(4)}\right) \\ &\approx F\left(Q, \frac{5}{9}Q^2, Q^{(4)}\right) \\ &= \frac{279709022}{7262541} Q^4 - \frac{791303}{24453} QQ^{(4)} \end{aligned} \quad (33)$$

(b) あるいは、 $Q^{(2)} > 0$  を仮定して  $X = \sqrt{Q^{(2)}/c_2}$  とおくと

$$\begin{aligned} Q^{(6)} &= F\left(c_1\sqrt{\frac{Q^{(2)}}{c_2}} + \lambda\left(Q - c_1\sqrt{\frac{Q^{(2)}}{c_2}}\right), Q^{(2)}, Q^{(4)}\right) \\ &\approx F\left(c_1\sqrt{\frac{Q^{(2)}}{c_2}}, Q^{(2)}, Q^{(4)}\right) \\ &= \frac{279709022}{2241525} (Q^{(2)})^2 - \frac{791303}{8151\sqrt{5}} \sqrt{Q^{(2)}} Q^{(4)} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。

こうして得られた第0近似の ODE を厳密解の  $Q(0)$ ,  $Q^{(2)}(0)$ ,  $Q^{(4)}(0)$  (奇数階は0) を初期条件として解き、得られた結果を Fig.4 にプロットした。このグラフには、参照解のほかに Brachet らのフーリエスペクトル法による高精度 ( $864^3$ ) の直接数値計算結果 [8] を '厳密解' とみなして比較のため描き加えてある。数値結果によれば、参照解も2つの近似解もすべて、有限時間で爆発することがわかり、それらの爆発時間は Table II としてまとめてある。なお、不等式 (31)  $t = 1$  付近で少し満たされなくなる、つまり  $27Y/4X^3$  が1をすこし越えるため、上で述べた (29) の成立範囲についての仮定が要る。

Fig.4 から、特に、近似  $a_0$  が Brachet ら結果に近いことが注目になる。このことは、厳密解の軌道が、少なくとも彼らの数値計算がカバーしている時間帯においては参照曲面に近いところを通っていることを示唆している。このことだけからは特異性の存在ないし非存在に関して結論はできないが、もし爆発が起こるなら、 $t_* \approx 6$  あたりが候補になると推測される。

## IV. むすび

Taylor-Green 渦という特殊な初期条件をとりあげ、3次元 Euler 方程式のエンストロフィーを支配する常微分方程式の関数形を部分的に決定し、それに基づいて逐次近似を導入した。第0近似方程式の解は有限時間で爆発する。また、この近似解を直接数値計算結果と比較したところ、数値計算でカバーされている時間帯で、両者は近いことがわかった。しかし、今の近似は時間的にローカルな性格をもつため、これだけからは真の解が爆発するかどうかは不明である。実際、Burgers 方程式の場合でさえエンストロフィーが爆発することは厳密解の知識をまったく用いずには証明できていない。今後の理論的な課題としては、どのような条件を  $F$  に課せば爆発が起きるか、を考察することがあげられる。

なお、8階微係数も  $X$  および  $Y$  の組合せで表せると仮定すると、その形は

$$Q^{(8)}(0) = c_7 X^5 - c_8 X^2 Y, \quad (35)$$

に限られる ( $c_7$  は数値的に既知 [5]、 $c_8$  は不明である)。このことから、第1近似の関数形が決めることができる。これについては、別の機会に議論する。

## REFERENCES

- [1] P. Constantin, "Geometric statistics in turbulence," SIAM Rev. **36**, 73(1994)
- [2] K. Ohkitani, "Partial determination and successive approximation of the enstrophy equation of a class of 3D Euler flows," preprint.
- [3] G. I. Taylor and A. E. Green, "Mechanism of the production of small eddies from large ones," Proc. Roy. Soc. London A **158**, 499(1937).
- [4] R. H. Morf, S. A. Orszag and U. Frisch, "Spontaneous singularity in three-dimensional inviscid incompressible flow", Phys. Rev. Lett.**44**, 572(1980).
- [5] M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf and U. Frisch, "Small-scale structure of the Taylor-Green vortex", J. Fluid Mech. **130**, 411(1983).
- [6] J.-D. Fournier et U. Frisch, "L'équation de Burgers déterministe et statistique," J. de Méc. Théor. Appl.(Paris) **2**, 699(1983).
- [7]  $t, A$  を独立変数とみなせば、(6)～(8) から  $f(Q, Q^{(2)}, Q^{(4)}) = 0$  となる関数  $f$  が存在する。これが  $Q^{(4)}$  について解けると仮定する。これを仮定しないなら、以下で行なう ODE の関数形を拘束する議論はすべて陰関数の形で行なえばよい。[27] についても同様。
- [8] K. Ohkitani and S. Kishiba, "Nonlocal nature of vortex stretching in an inviscid fluid," Phys. Fluids **7**, 411(1995)
- [9] M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano and P. L. Sulem "Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows", Phys. Fluids A**4**, 2845(1992).

## TABLES

TABLE I. Burgers 方程式のエンストロフィーの近似が爆発する時刻  $t_*$ 

a1	exact	b1	b0	a0	ref
0.81	1	1.11	1.60	2.05	2.43

TABLE II. Euler 方程式のエンストロフィーの近似が爆発する時刻  $t_*$ 

b0	a0	exact	ref
5.94	6.26	?? <sup>a</sup>	6.51

<sup>a</sup> $\infty$  かも知れない

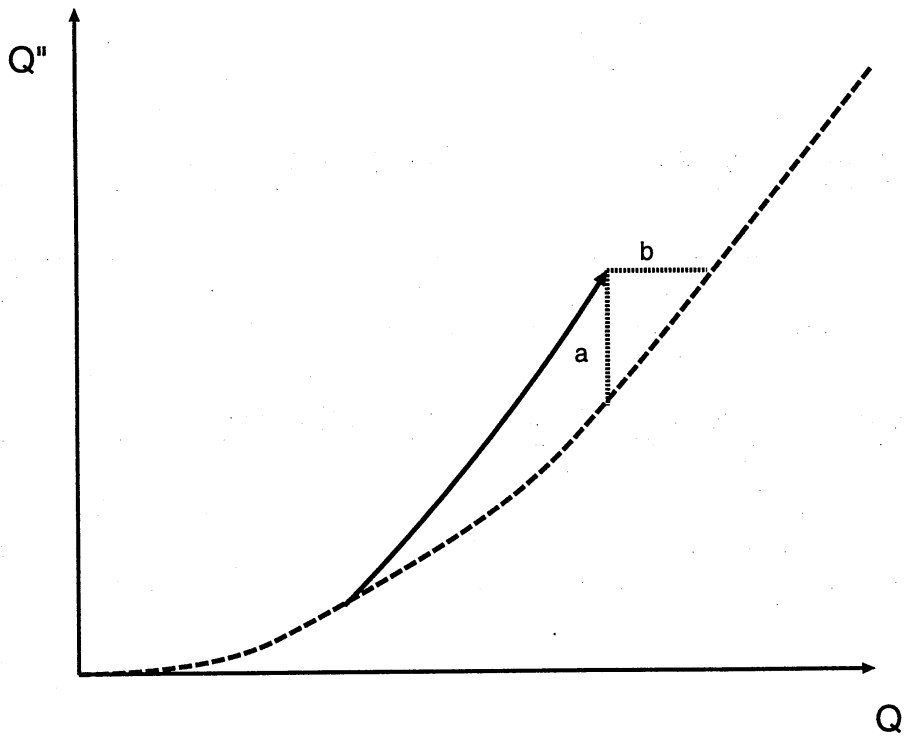


Fig. 1

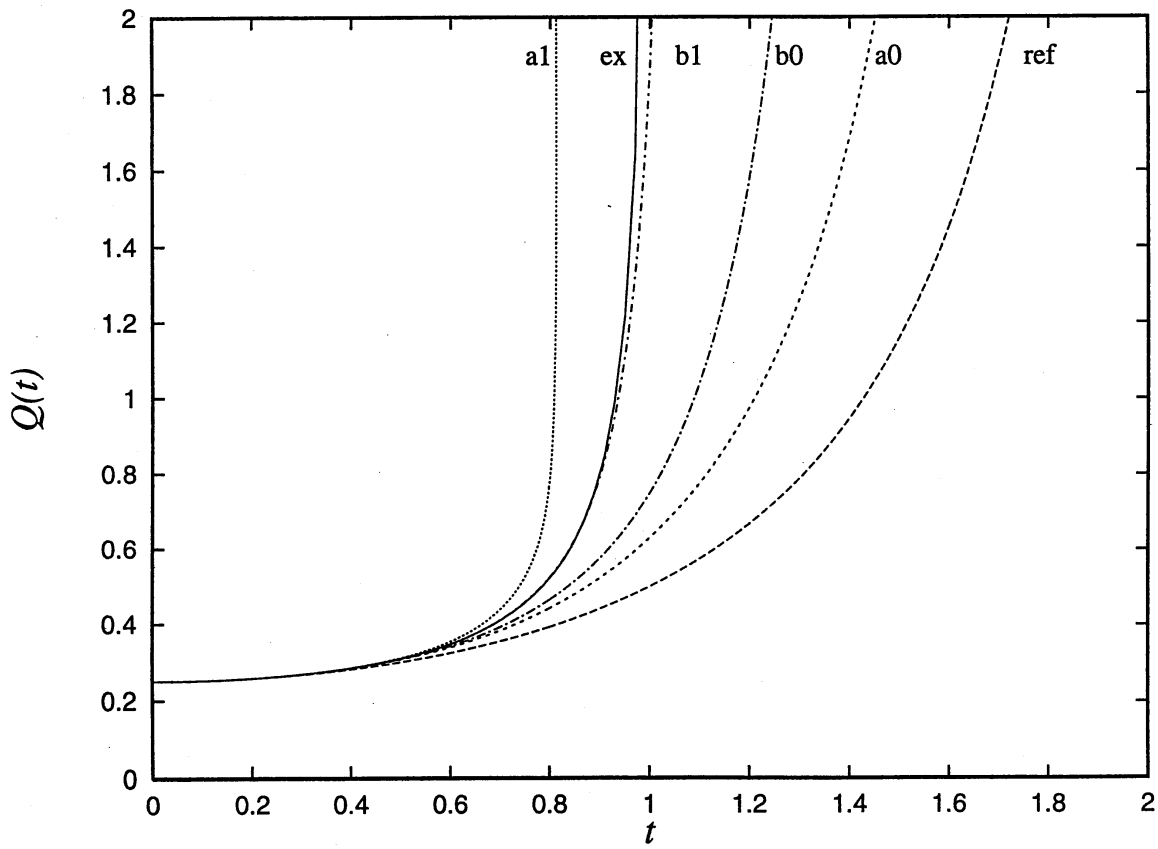


Fig.2 : K. Ohkitani

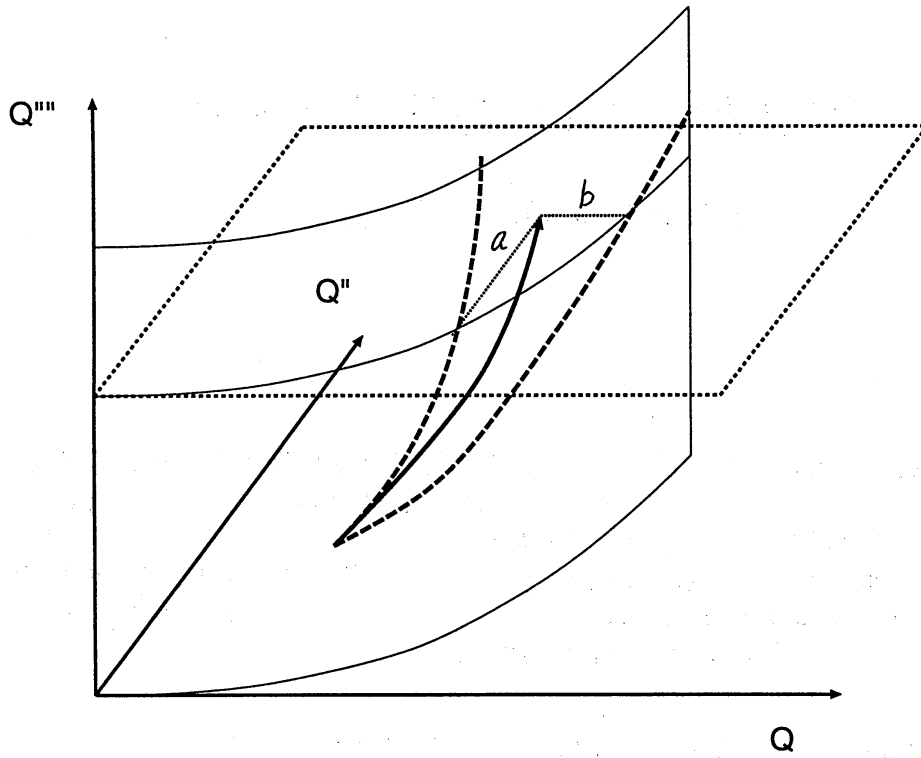


Fig. 3

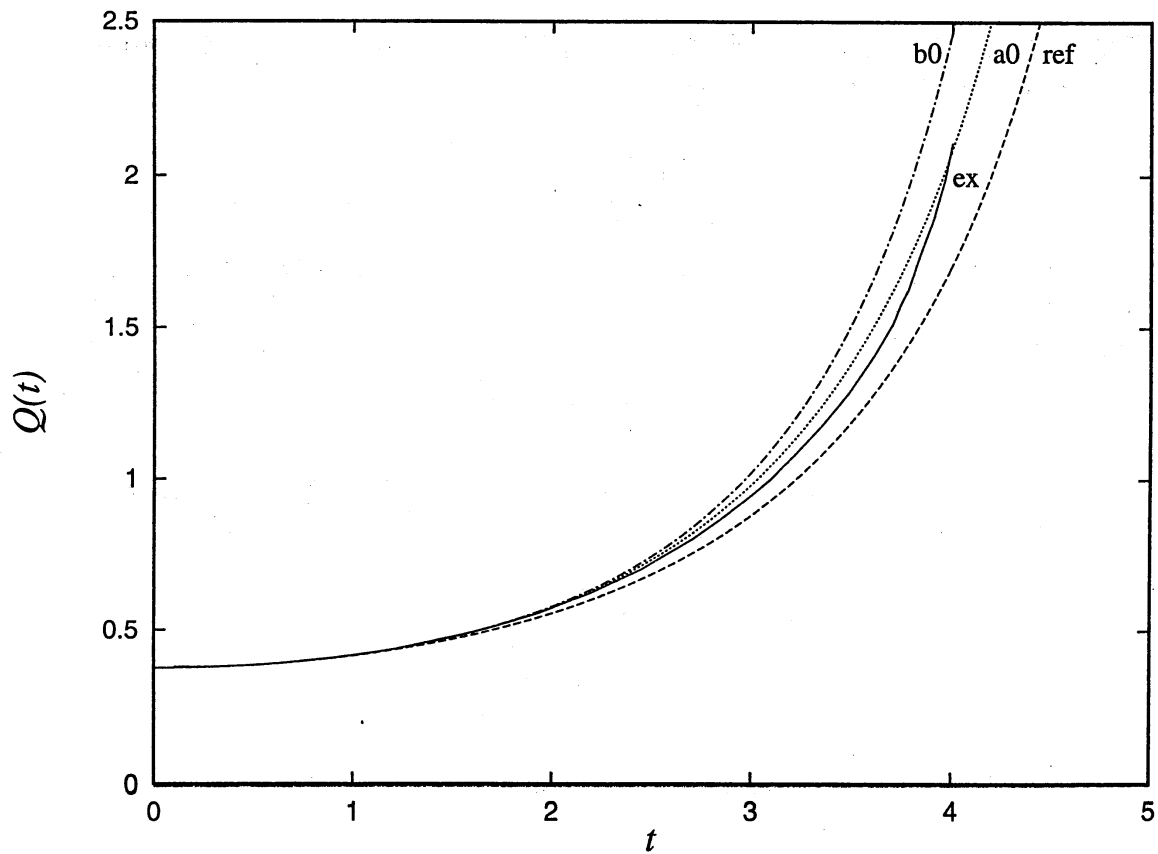


Fig.4 : K.Ohkitani