数理解析研究所講究録
974巻 1996年 242-247

二次元ブシネスク磁場対流における分岐

日大工　戸次　直明　（　Naoaki Bekki　）
日大工　唐木沢　孝夫（　Takao Karakisawa　）

I. 序論

外部磁場のあるベナール対流を磁場対流［1］と呼ぶことにすると、磁場対流は、太陽黒点付近のグラニュールの運動や磁場閉じ込め方式による高温プラズマの異常輸送現象［2］等と密接に関係していると考えられる。又、磁場対流は、電子（イオン）温度勾配によるプラズマ乱流［3］のみならず、抵抗性インターチェインジモードによる乱流［4］、化学反応系［5］、回転流体系［6］、二成分混合溶液の対流［7］、等と類似点が多い。一般に、これらは、多くのパラメータと非線形過程を含む非線形偏微分方程式系で記述される。しかしながら、これらの非線形偏微分方程式系を、任意の初期値と境界条件のもとで、解析的に解くことはほとんど不可能と言える。磁場対流の場合は、２次元ベナール対流の場合と違って、磁気プランドル数が小さいとき、静止解からの Hopf 分岐（線形周期解）が存在する。自由エネルギー源である不安定化の要因による力（レイリー数：r）と磁場の強さに比例する安定化の要因による力（チャンドラセカール数：q）との間に位相差が生じて、静止解からの線形周期解が存在しうる。　この点がローレンツモデル［8］と本質的に異なる。確かに、カオスの発生には、必ずしも基本に線形周期解が存在する必要はない。しかし、このことが強調されるあまり、線形周期解と関連した周期解からカオスへの分岐という重要な点が見落とされてきたきらいがある。従って、磁気プランドル数が小さい条件のもとで、ブシネスク磁場対流の振る舞いを調べることは重要なことである。

磁場対流を記述する非線形偏微分方程式系を，Hopf 分岐点近くで摂動展開して，非線形項を含む５モード常微分方程式系（fifth - order - system）に逓減できる［１、９］。この切断５モード常微分方程式系（TODE's）は、磁場無しの極限で、ローレンツ（Lorenz）モデルになる。磁場対流の場合は､基礎方程式に於けるローレンツ(Lorentz)力の項のためローレンツモデルにローレンツ力が加わった形の系になっている。Shil'nikov ［１０］は、非常に大きなレイリー数に対するローレンツモデル、Shimizu - Morioka［１１］モデル、を使って、ローレンツ型アトラクターの分岐を調べ、Rucklidge ［１２］は、小さいアスペクト比の磁場対流の場合に於けるローレンツ型アトラクターの分岐を調べた。　我々は、ローレンツ型アトラクターの分岐よりも周期解からカオスへの分岐という点に興味があるので、磁気プランドル数は十分小さい場合を考える。更に、この場合、切断５モード常微分方程式系を余次元２分岐点近くで摂動展開すると、Takens［１３］や Bogdanov［１４］達が調べた余次元２分岐にお

ける標準形方程式に帰着できる。余次元２分岐点の近くでは Melnikov の方法［１５］がその標準形方程式に適用できる。実際、我々は、最近、磁気プランドル数が十分小さい場合、 fifth - order - system を数値的に積分して得られた結果が Melnikov の方法によって求めた理論で定性的に説明できることを示した［１６］。また、間欠性カオスに関連したサドル・ノード分岐について調べた。 ポモウ・マネビル［１７］達は、サドル・ノード分岐（局所的）［１５］と層流回帰過程〔大域的）［１８］という二つの概念を使って、ローレンツモデルによる間欠性カオスを見事に説明した。それは、非常に大きなレイリー数に対する、カオスの海の中の窓［１５］の周期軌道のサドル・ノード分岐である。しかしながら、サドル・ノード分岐と層流回帰過程という概念は本来別々のもののはずである。 層流回帰過程を伴わないサドル・ノード分岐からカオスを示す良いモデルが今までなかった。我々のモデルは、層流回帰過程を伴わないサドル・ノード分岐からのカオスを示し、サドル・ノード分岐点に近いパラメータに対してスケーリング則が成り立つことも示した［１９］。 また、あるパラメータ領域において、 TODE's がトーラスからカオスへの分岐も示す ことを数値的に初めて見い出したので、ここで、報告する。 ローレンツモデルにはトーラスからカオスへの分岐は存在しないし、少数自由度の常微分方程式系におけるトーラスからカオスへの分岐を示す例は、ブラッセレータ結合系［２０、２１］を除いて、今までほとんどなかった。 我々のモデル（TODE's）は、レイリー・ベナール対流の実験データ［２２］が示すトーラスのＢ構造を再現し、トーラスからカオスへの分岐を示す。

II. 基礎方程式

簡単のため、空間は２次元のブシネスク流体に対して垂直上方に印加磁場がある場合を考える。磁場対流を記述する偏微分方程式系（PDE's）をコンシステントに切断５モード常微分方程式系（TODE's）に逓減する導出は、文献 ［１６］ によって初めて与えられた。 類似の TODE's モデル を、Knobloch と Proctor（ＫＰ）［１］が導出しているけれども、定常解の固有関数が間違っており、ＫＰの固有関数を使ったガラーキン近似ではＫＰの TODE's モデルを得ることができないという自己矛盾があった［１６］。 しかし、 ＫＰのモデルは固有関数が間違っているにもかかわらず、我々のモデルとＫＰのモデルは数学的に等価であるということがわかった［２３、２４］。 ここでは、その詳細については文献［１６、２３、２４］に譲るとして、我々の TODE's は

$$\dot{a}(t) = \sigma\left[-a(t) + rb(t) - qd(t)\left(1 + \frac{w(3-w)}{\varsigma^2(4-w)}e(t)\right)\right]、$$

$$\dot{b}(t) = -b(t) + a(t) - a(t)c(t)、$$

$$\dot{c}(t) = w[-c(t) + a(t)b(t)]、 \tag{1}$$

$$\dot{d}(t) = -\varsigma[d(t) - a(t)] - \frac{w}{\varsigma(4-w)}a(t)e(t)、$$

$$\dot{e}(t) = -\varsigma(4-w)[e(t) - a(t)d(t)]、$$

で与えられる。 ただし、$a(t)$は速度の１次摂動、 $b(t)$と$c(t)$は温度の１次摂動と２次摂動、 $d(t)$と$e(t)$は磁場の１次摂動と２次摂動に、それぞれ、対応している。また、t は特徴的な時間スケールで規格化された時間を表わし、ドットはその時間に関する微分を表わす。５つのパラメータ（ σ, ς, r, q, w）は、それぞれ、粘性プランドル数、磁気プランドル数、規格化されたレイリー数、規格化されたチャンドラセカール数、アスペクト比に関係した幾何学的な定数、である。

切断５モード常微分方程式系（TODE's）は、ローレンツ方程式と同じように、重要な対称性を持っている。即ち、 TODE's は、変換：

$$(a,b,c,d,e) \to (-a,-b,c,-d,e)\ 、 \tag{2}$$

に対して不変である。また、 TODE's の位相空間における流れの発散は、式（１）より

$$\frac{\partial}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial}{\partial b}\dot{b} + \frac{\partial}{\partial c}\dot{c} + \frac{\partial}{\partial d}\dot{d} + \frac{\partial}{\partial e}\dot{e} = -[1 + \sigma + w + \varsigma(5-w)]、 \tag{3}$$

となり、常に負である。このことは、 TODE's が散逸系であることの当然の帰結であり、式（１）の解（軌道）が最終的には位相空間上の測度ゼロの集合に吸引されることを意味する。規格化された熱流束の大きさを知る目安として、ヌッセルト数：

$$Nu = 1 + 2c(t)、 \tag{4}$$

を導入すると便利である。

一方、定常解は、式（１）より

$$b = \frac{a}{1+a^2}、\ c = \frac{a^2}{1+a^2}、\ d = \frac{\mu a}{\mu + a^2}、\ e = \frac{\mu a^2}{\mu + a^2}、$$

$$r = 1 + a^2 + \frac{\varsigma^2(4-w)^2(1+a^2)(a^2+\varsigma^2/w)}{w\{a^2+\varsigma^2(4-w)/w\}^2}q、 \quad (5)$$

となる。ただし、 $\mu = \zeta^2(4-w)/w$ とする。特に、$q=0$（磁場なし）のとき、式（5）より

$$a = \pm\sqrt{r-1}、 \quad (6)$$

となって、ローレンツモデルの定常解と一致する。この定常解の安定性は、定常解（5）の回りについて、式（1）を線形化すれば、得られる（ $\propto \exp[st]$ ）：

$$s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + d_4 s + d_5 = 0、 \quad (7)$$

ただし、 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 は、5つのパラメータと式（5）と結び付いている振幅 a を含む多少複雑な係数である。サブクリティカル分岐点 r_H は、解析的な表式はやや複雑であるけれども、$s = \pm i\omega$ を式（7）に代入することによって得られる。特に、$q=0$（磁場なし）のときは、

$$r_H = \frac{3+\sigma+w}{\sigma-1-w}\sigma、 \quad (8)$$

となって、ローレンツモデルの場合と一致し、$r_H \le r$ に対して、定常解は安定ではなくなり、ストレンジ・アトラクターが唯一の安定なアトラクターになる［8］。

III. 結果と考察

磁場対流を記述する偏微分方程式系（PDE's）は勿論、切断5モード常微分方程式系（TODE's）を 任意の初期値に対して解析的に解くことは不可能である。したがって、ここでは、式（1）を数値積分することにより、数値解を調べることにする。数値積分は4次のルンゲ・クッタ法を使う。パラメータのうち磁気プランドル数については、ローレンツ型アトラクターの分岐よりも周期解からカオスへの分岐という点に興味があるので、磁気プランドル数が小さい場合（ $\zeta<1$ ）を考える。このとき、不安定化の要因による力（r）と安定化の要因による力（q）との間に位相差が生じて、周期解が存在しうる（必要条件）。他の4つのパラメータのいろいろな値に対して、十分時間が経過したとき（非線形段階）、式（1）の解はどのように振る舞うであろうか？この問に対する答えは文献[16]に譲るとして、ここでは、トーラスからカオスへの分岐が生じうるパラメータを選ぶことにする［25］。レイリー数を除いて、

他の４つのパラメータは固定する。トーラスからカオスへの分岐が存在するとき、レイリー数を徐々に大きくしていくと、$r^{(o)} \le r$ に対して、静止解から Hopf 分岐を通してリミットサイクル（線形周期解）が現われる（ $r^{(o)} \equiv (\sigma+\zeta)\left(\frac{1+\zeta}{\sigma}+\frac{\zeta}{1+\sigma}q\right)$ ）。したがって、$0 \le r \le r^{(o)}$ に対しては、静止解だけが安定であり、対流は起こらない。レイリー数をさらに大きくしていくと、$r \le r_{SN}$ に対して、非線形効果が多少あるにもかかわらず、リミットサイクルは安定である。サドル・ノード分岐点に近いレイリー数（$r_{SN} \le r$）に対して、層流回帰過程を伴わないサドル・ノード分岐からのカオスを発見し、層流回帰過程を伴うサドル・ノード分岐の場合［１７］は勿論のこと、いまの場合でさえ、スケーリング則が成り立つことを見い出した［１９］。続いて、レイリー数を大きくしていくと、$r_{SN} \le r \le r_C$ に対して、カオスが現われる。このとき、最大リヤプノフ数はいつも正の値になっている。更に、レイリー数を大きくしていくと、$r_C \le r \le r_T$ に対して、カオスは消え去り、代りに、トーラスが現われ、レイリー・ベナール対流の実験データ［２２］が示すトーラスのＢ構造を再現する。これは、トーラスのＢ構造が出現するパラメータに対して、第２高調波が大きくなった為である。このとき、リヤプノフスペクトルの符号は、（ 0.000, 0.000, −,−,− ）となる。また、回転数を調べてみると、ファレイ樹に関連した振動数同期を繰り返してT^2トーラスからカオスに分岐することがわかった［２５］。更に、レイリー数を大きくしていくと、$r_T \le r \le r_H$ に対して、リミットサイクル（非線形周期解）が現われ、$r_H \le r$ に対して、定常解は安定なアトラクターになる。ただし、r_H は、サブクリティカル分岐点におけるレイリー数である。 レイリー数 $r^{(o)}$とr_H は解析的に求めることができるけれども、目下のところ、r_{SN}, r_C, r_T は数値計算に依らなければ求めることができない。以上のような分岐は、ローレンツモデルの場合と非常に異なっている。たとえば、$r_H \le r$ に対しては、ローレンツモデルの場合、定常解は安定でなく、ストレンジ・アトラクターが唯一の安定なアトラクターになっている。残されている課題は多いけれども、トーラスに関連しているアーノルド写像［２６］と我々のモデルとの相違点を明らかにしていきたい。

文献

1. E. Knobloch and M.R.E. Proctor, J.Fluid Mech. 108 , 291(1981).
2. S. Hamaguchi, Phys. Fluids B1 , 1416(1989).
3. W. Horton, B.G. Hong, T. Tajima, and N. Bekki, Comments Plasma Phys.Controlled Fusion 13 , 207(1990).
4. N. Nakajima and S. Hamaguchi, Phys. Fluids B2 , 1184(1990).

5. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
6. G. Veronis, J. Fluid Mech. 5, 401(1959).
7. L.N. da Costa, E. Knobloch, and N.O. Weiss, J. Fluid Mech. 109, 25(1981).
8. E.N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20, 130(1963).
9. G. Veronis, J. Fluid Mech. 4, 545(1966).
10. A.L. Shil'nikov, Physica D 62, 338(1993).
11. T. Shimizu and Morioka, Phys. Lett. A76, 201(1980).
12. A.M. Rucklidge, Physica D 62, 323(1993).
13. F. Takens, Publ. Math. IHES, 43, 47(1974).
14. R.I. Bogdanov, Functional Analysis and Its Applications, 9(2), 144(1975).
15. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York, 1986).
16. N. Bekki and T. Karakisawa, Phys. Plasmas 2, 2945(1995).
17. Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. 74, 189(1980).
18. S. Wiggins, *Global bifurcations and Chaos* (Springer, New York, 1988).
19. N. Bekki, T. Karakisawa and I. Shimada, Fall Meeting of J.P.S.J. (1995).
20. I. Schreber and M. Marek, Phys. Lett. 91A, 263(1982).
21. M. Sano and Y. Sawada, Phys. Lett. 97A, 73(1983).
22. P. Berge, Y. Pomeau and C.Vidal, *Order within Chaos* (Wiley, New York, 1984).
23. E. Knobloch, M. Proctor, A. Rucklidge and N.O. Weiss, Phys. Plasmas 3, 2475(1995).
24. N. Bekki and T. Karakisawa, Phys. Plasmas 3, 2477(1996).
25. N. Bekki and T. Karakisawa, to be published.
26. V.I. Anold, Trans. Am. Math. Soc., 2nd Ser. 46, 213(1965).