数理解析研究所講究録
975 巻 1996 年 116-122

On the Nakamura-Schweitzer-Kantrovich inequality*

東邦大学理学部 塚田 真 (Makoto Tsukada)
山形大学工学部 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

1 Kantrovich の不等式とは

$0 < m \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq M$、および$\sum_{i=1}^n p_i = 1$ を満たす $p_1, p_2, \ldots, p_n \geq 0$ が与えられたとき、不等式

$$1 \leq \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

が成立する. 左側の不等式は, Schwarz の不等式からの直接の帰結である. 右側の不等式のことを, Kantrovich の不等式という ([3]).

Schwarz の不等式がそうであるように, Kantrovich の不等式も積分で書き下すことができる ([9],[5]). 即ち, $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ を確率測度空間とするとき, $0 < m \leq X \leq M$, a.s. を満たす確率変数 X に対して,

$$\int X dp \int \frac{1}{X} dp \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

が成立する.

期待値を条件付期待値に一般化することは可能である. 更に, 確率変数が複素数に値をとる場合まで拡張しておく.

定理 1 $\mathcal{G}$を$\sigma-$部分集合体とし, Y, Zを $\mathcal{G}-$可測な確率変数とするとき, 複素数値確率変数 Xが $0 < Y \leq |X| \leq Z$, *a.s.* を満たすならば

$$\left| E(X|\mathcal{G}) E(\frac{1}{X}|\mathcal{G}) \right| \leq \frac{(Y+Z)^2}{4YZ}, \ a.s.$$

を満たす.

---

*研究集会の発表時に於ける表題は On the Schweitzer-Kantrovich inequality であった. Kantrovich 不等式は, P. Schweitzer により Riemann 積分に, M. Nakamura により Stieltjes 積分および Lebesgue 積分まで拡張されたものであるので, 講究録に採録に際し表題を変更することとする.

$\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$ のとき，積分形の不等式になる．証明の核心部分は，よく知られた相加相乗平均の関係と，実数 a,x が $0<a^{-1}\leq x\leq a$ の関係にあるとき

$$x+x^{-1}\leq a+a^{-1}$$

が成立するという事実である ($y=x+x^{-1}$のグラフの形からわかる)．$0<Y\leq X\leq Z$, a.s. の仮定より

$$0<\sqrt{\frac{Y}{Z}}\leq\frac{|X|}{\sqrt{YZ}}\leq\sqrt{\frac{Z}{Y}},\ \text{a.s}$$

であるので，

$$\frac{|X|}{\sqrt{YZ}}+\frac{\sqrt{YZ}}{|X|}\leq\sqrt{\frac{Z}{Y}}+\sqrt{\frac{Y}{Z}},\ \text{a.s}$$

である．従って，Y,Zの $\mathcal{G}-$可測性や相加相乗平均の関係等を用いて

$$\begin{aligned}
\left|E(X|\mathcal{G})E(\frac{1}{X}|\mathcal{G})\right| &= |E(X|\mathcal{G})|\left|E(\frac{1}{X}|\mathcal{G})\right| \\
&\leq E(|X|\,|\mathcal{G})E(\left|\frac{1}{X}\right|\,|\mathcal{G}) \\
&= E(\frac{|X|}{\sqrt{YZ}}|\mathcal{G})E(\frac{\sqrt{YZ}}{|X|}|\mathcal{G}) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(E(\frac{|X|}{\sqrt{YZ}}|\mathcal{G})+E(\frac{\sqrt{YZ}}{|X|}|\mathcal{G})\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}E(\frac{|X|}{\sqrt{YZ}}+\frac{\sqrt{YZ}}{|X|}|\mathcal{G})^2 \\
&\leq \frac{1}{4}E(\sqrt{\frac{Z}{Y}}+\sqrt{\frac{Y}{Z}}|\mathcal{G})^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Z}{Y}}+\sqrt{\frac{Y}{Z}}\right)^2 \\
&= \frac{(Y+Z)^2}{4YZ}
\end{aligned}$$

が a.s. で成立することが示される．

2 等号成立条件について

この節では，上で述べた複素数値確率変数に関する不等式の積分形において，等号の成立条件を調べる (正値確率変数に対しては既に [2],[5] の結果がある)．

定理 2 $(\Omega,\mathcal{F},p)$ を確率測度空間とするとき、複素数値可測関数Xが$0<m\leq|X|\leq M$, *a.s.* を満たすならば、

$$\left|\int X dp\int\frac{1}{X}dp\right|\leq\frac{(m+M)^2}{4mM}$$

が成立する．等号が成立するための必要十分条件は、$0 \le \theta < 2\pi$が存在して、

$$p(X = me^{i\theta}) = p(X = Me^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (if\ m < M) \\ 1, & (if\ m = M) \end{cases}$$

証明. 等号が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} \int \frac{|X|}{\sqrt{mM}} dp \int \frac{\sqrt{mM}}{|X|} dp &= \frac{1}{4}\left(\int \left(\frac{|X|}{\sqrt{mM}} + \frac{\sqrt{mM}}{|X|}\right) dp\right)^2 \\ &= \frac{(m+M)^2}{4mM} \end{aligned}$$

が成立していなければならない．従って，

$$\int \frac{|X|}{\sqrt{mM}} dp = \int \frac{\sqrt{mM}}{|X|} dp = \frac{m+M}{2\sqrt{mM}}$$

即ち

$$\begin{aligned} \int |X| dp &= \frac{m+M}{2} \\ \int \frac{1}{|X|} dp &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \end{aligned}$$

でなければならない．また，

$$\frac{|X|}{\sqrt{mM}} + \frac{\sqrt{mM}}{|X|} \le \sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}, \text{ a.s.}$$

であり，一方

$$\int \left(\frac{|X|}{\sqrt{mM}} + \frac{\sqrt{mM}}{|X|}\right) dp = \sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}$$

でなければならなので，

$$\frac{|X|}{\sqrt{mM}} + \frac{\sqrt{mM}}{|X|} = \sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}, \text{ a.s.}$$

が示される．よって

$$(|X| - M)(|X| - m) = 0, \text{ a.s.}$$

であり，$|X|$ の値は a.s. で m または M であることが示される．従って

$$p(|X| = m) = p(|X| = M)$$

であることが，簡単な計算によってわかる．

$m < M$ の場合を考える．

$$X(\omega) = \begin{cases} me^{i\theta_m(\omega)}, & (\text{if } |X(\omega)| = m) \\ Me^{i\theta_M(\omega)}, & (\text{if } |X(\omega)| = M) \end{cases} \qquad \text{a.s.}$$

として,

$$\alpha = \int_{|X|=m} e^{i\theta_m} dp, \quad \beta = \int_{|X|=M} e^{i\theta_M} dp$$

とおくと，$|\alpha|, |\beta| \leq 1/2$ であることに注意する．

$$\begin{aligned}
\frac{(m+M)^2}{4mM} &= \left|\int X dp \int \frac{1}{X} dp\right| \\
&= \left|\left(\int_{|X|=m} m e^{i\theta_m} dp + \int_{|X|=M} M e^{i\theta_M} dp\right)\left(\int_{|X|=m} \frac{e^{-i\theta_m}}{m} dp + \int_{|X|=M} \frac{e^{-i\theta_M}}{M} dp\right)\right| \\
&= \left|(m\alpha + M\beta)\left(\frac{\overline{\alpha}}{m} + \frac{\overline{\beta}}{M}\right)\right| \\
&= \left||\alpha|^2 + |\beta|^2 + \frac{m}{M}\alpha\overline{\beta} + \frac{M}{m}\overline{\alpha}\beta\right| \\
&\leq \frac{1}{4}\left|2 + \frac{m}{M} + \frac{M}{m}\right| \\
&= \frac{(m+M)^2}{4mM}
\end{aligned}$$

より $|\alpha| = |\beta| = 1/2$ が言える．即ち

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|X|=m} e^{i\theta_m} dp\right| &= \frac{1}{2}, \\
\left|\int_{|X|=M} e^{i\theta_M} dp\right| &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

が言える．ここで上の式の左辺を，$e^{i\theta_m}$ と 1 の内積の絶対値，および $e^{i\theta_M}$ と 1 の内積の絶対値と見ることにより，Schwarz の不等式において等号が成立している状況にある．従って，$e^{i\theta_m}$ および $e^{i\theta_M}$ はそれぞれ集合 $|X| = m$ および $|X| = M$ 上で定数関数でなければならない．しかも，それらが同じ値でなければならないことは簡単な計算でわかる．

$m = M$ の場合は,

$$\left|\int X dp \int \frac{1}{X} dp\right| = 1$$

であるので，Schwarz の不等式の等号成立条件より明らか．

3 正規作用素の場合

Kantrovich 不等式を作用素へ拡張することは，[1] 等により始められた．前節で述べた結果は，正規作用素に対してスペクトル分解を考えることにより次のように書き換えることができる．

定理 3 Xを複素 *Hilbert* 空間 H上の正規作用素とする。このとき，$0 < m \le |X| \le M$を満たすならば，$||\phi|| = 1$ に対して

$$|\langle X\phi|\phi\rangle\langle X^{-1}\phi|\phi\rangle| \le \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

が成立する．等号が成立するための必要十分条件は，$0 \le \theta < 2\pi$が存在して，$me^{i\theta} \in \sigma(X)$ かつ $Me^{i\theta} \in \sigma(X)$ であり

$$\omega_\phi(\{me^{i\theta}\}) = \omega_\phi(\{Me^{i\theta}\}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (\text{if } m < M) \\ 1, & (\text{if } m = M) \end{cases}$$

ここで ω_ϕ は，$\{1, X\}$ が生成する可換 C^*代数上の *vector state* $\langle\,\cdot\,\phi|\phi\rangle$ に対応する，スペクトル集合 $\sigma(X)$ 上の測度。

4　$0 < A^{-1} \le X \le A \Rightarrow X + X^{-1} \le A + A^{-1}$?

最後に，A, Xをヒルベルト空間上の作用素とするとき，$0 < A^{-1} \le X \le A$ であるが，$X + X^{-1} \le A + A^{-1}$が言えない例を挙げておく．例は 2 次元空間で構成できる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

とする。また，

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, U^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とする。

$$A^{-1} < \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} < A$$

であるので，

$$A^{-1} < \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \le U^* \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} U \le \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} < A$$

となる。ここで，$\lambda \ge 1$ に対して，

$$X_\lambda = U^* \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\lambda} \end{pmatrix} U$$

として

$$\begin{aligned} f_\lambda(\phi) &= \langle (A - X_\lambda)\phi|\phi\rangle, \\ g_\lambda(\phi) &= \langle (X_\lambda - A^{-1})\phi|\phi\rangle \end{aligned}$$

とおく。X_λはエルミート行列なので，f_λ, g_λは実数値関数である。また，f_1, g_1は非負の関数で，0 をとるのは原点においてのみなので，単位球面上で正の最小値をとる．一方，f_λ, g_λ

はそれぞれ，$\lambda \to 1$ で f_1, g_1 に単位球面上で一様に収束する．このことから，λを十分1に近くとれば

$$A^{-1} < X_\lambda < A$$

とすることができる．ところが，

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$\langle (A + A^{-1})\phi | \phi \rangle = 2 + \frac{1}{2}$$

であるが，

$$\langle (X_\lambda + X_\lambda^{-1})\phi | \phi \rangle = 2\lambda + \frac{1}{2\lambda}$$

となる．ここで

$$(2\lambda + \frac{1}{2\lambda}) - (2 + \frac{1}{2}) = (\lambda - 1)(2 + \frac{1}{2\lambda}) > 0$$

であるので，

$$X_\lambda + X_\lambda^{-1} \not\leq A + A^{-1}$$

ということが示される．

参考文献

[1] W. Greub and W. Rheinbold, On a generalization of an inequality of V. Kantrovich, Proc. Amer. Math. Soc.10(1954), 407-415.

[2] P. Henrici, Two remarks on the Kantrovich inequality, Amer. Math. Monthly, 68(1961), 904-906.

[3] L. V. Kantrovich, Functional analysis and applied mathematicas(in Russian), Uspechi Mat. Nauk, 3(1948), 89-185.

[4] D. S. Mitrinovic, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Ber-lin, Heiderberg, 1970.

[5] M. Nakamura, A remark on a paper of Greub and Rheinboldt, Proc. Japan Acad., 36(1960), 19-196.

[6] N. Ozeki and K. Ozeki, Introduction to Inequalities (Japanese), Kindai Kagakusha, Tokyo,1987.

[7] V. Ptak, The Kantrovich inequality, Amer. Math. Monthly, 102(1995), 820-821.

[8] B. C. Rennie, An inequality which includes that of Kantrovich, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 982.

[9] P. Schweitzer, An inequality concerning the arithmetic mean, Hugarian Math. Phys. Lapok, 23(1954), 257-261.