数理解析研究所講究録
975 巻 1996 年 123-131

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN p-STABLE CYLINDRICAL MEASURES AND THE SUFFICIENT SAZONOV TOPOLOGY

お茶の水女子大学理学部 前田 ミチエ (Michie Maeda)

1 序

Eを実可分 Banach 空間とし、E'を Eの位相的双対とする。有限次元空間上の Bochner の定理の拡張として次の命題が考えられる。

「 E'上で定義された複素数値関数ϕが次の条件 $(*)$ を満たすときにϕを特性関数とする E上のシリンダー測度μは Radon 拡大可能になる。又μが Radon 測度ならばその特性関数ϕは条件 $(*)$ を満たす。

$(*)$ (1) $\phi(0)=1$、 (2) ϕは正型、 (3) ϕは (E',τ) で連続。」

ここでτは E'上に定められたベクトル位相である。このようなτが存在する場合はτを Sazonov 位相 (S-位相) といい、空間 Eを S-空間という。またμが Radon 拡大可能になるために、条件 $(*)$ が十分条件になるときτを十分 Sazonov 位相 (SS-位相) と言い、必要条

件になるときに必要Sazonov位相(NS-位相)と言う。

$1 \leq p \leq 2$ なる p に対して p' を conjugate index(i.e.,$1 < p \leq 2$ の場合は $1/p' + 1/p = 1, p = 1$ の場合は $p' = +\infty$) とする。このとき $L^{p'}$(p=1 のときは L^∞ の代わりに $\sigma(L^\infty, L^1)$ を考える) 上に次のようなシリンダー測度が存在する。 それは特性関数が $\exp(-\|\xi\|^p)$ ($\xi \in L^p$) となるもので、このシリンダー測度を canonical p-stable シリンダー測度といってΓ_pで表す。

この小論ではある条件を付けたSS-位相がΓ_p-可測な seminorm を用いて定義できることを示す。

(注意) p-stable シリンダー測度は $0 < p \leq 2$ の範囲で定義されるがここでは特にことわらない限りは $1 \leq p \leq 2$ で考えることにする。

2 準備と記法

まず初めに測度の order、シリンダー測度の type, cotype について説明する ([9,10])。

定義 E は 1 と同様に Banach 空間で、λは E 上の Radon 確率測度とする。

$\|\lambda\|_p = \{\int_E \|x\|^p d\lambda(x)\}^{1/p}$ $(-\infty < p < \infty, p \neq 0)$

$\|\lambda\|_\infty = ess.sup\|x\|$ (λ に関して本質的上限)

$\|\lambda\|_0 = \exp \int_E \log \|x\| d\lambda(x)$

とする。このとき $\|\lambda\|_p < +\infty$ であれば λは order p であるという。

$p < 0$ のときは常に $\|\lambda\|_p < +\infty$ となる。λ が order p であるならば、$q < p$ なる qについても order qであると言える。

定義　μ がシリンダー測度のとき $\xi \in E'$ に対して$\mu_\xi = \xi(\mu)$ とする。

$\|\mu\|_p^\star = \sup_{\|\xi\|\leq 1}\{\int_R |t|^p d\mu_\xi(t)\}^{1/p}$ $(-\infty < p < \infty, p \neq 0)$

$\|\mu\|_\infty^\star = \sup_{\|\xi\|\leq 1} ess.sup|t|$ (μ_ξ に関して本質的上限)

$\|\mu\|_0^\star = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \exp \int_R \log|t| d\mu_\xi(t)$

とする。

このとき $\|\mu\|_p^\star < +\infty$ であるならば μは type p であると言う。

μ が Radon 測度 ならば $\|\mu\|_p \geq \|\mu\|_p^\star$となる。

R 上の canonical p-stable 測度 (**R** 上では Radon 測度になっている) をγ_pで表すとγ_p は order q $(\forall q < p, p = 2$ の場合は $\forall q < +\infty)$ であり $\|(\Gamma_p)_\xi\|_q = \|\xi\|\|\gamma_p\|_q$となるので$\Gamma_p$は type q $(\forall q < p, p = 2$ の場合は $\forall q < +\infty)$ であることが解る。

次にシリンダー測度の cotype について述べる。

定義　μ がシリンダー測度のときに

$$\|\mu\|_p^{\star\star} = [\inf_{\|\xi\|\geq 1}\{\int_R |t|^p d\mu_\xi(t)\}^{1/p}]^{-1}$$

として $\|\mu\|_p^{\star\star} < +\infty$ のとき μは cotype p であると言う。

$q > p$ でμ が cotype p であるならばμ は cotype q で $\|\mu\|_q^{\star\star} \leq \|\mu\|_p^{\star\star}$ である。

$\|\Gamma_p\|_q^{\star\star} < +\infty$ も上と同様にして求められるのでΓ_pは cotype q $(\forall q < p, p = 2$ の場合は $\forall q < +\infty)$ でもある。

次に Dudley-Feldman-Le Cam による可測ノルムの定義について述べよう。

定義　μ が E 上のシリンダー測度とする。E 上で定義された seminorm $|\cdot|$ が μ－可測であるとは $\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists G \in FD(E)$ ($FD(E)$ は Eの有限次元部分空間の全体) で、$F \in FD(E'), F \perp G$ なる Fについては

$$\mu(\{x; |x - F^{\perp}| < \epsilon\}) \geq 1 - \epsilon$$

が成り立つことである。

上の定義で $F^{\perp} = \{y \in E; < x, y >= 0 \ for \ \forall x \in F\}$ とする。

E の seminorm $|\cdot|$ に関する associated Banach 空間 を $E_{|\cdot|}$で表し $E \rightarrow E_{|\cdot|}$ への canonical map を i とする。このとき $i(\mu)$ が $E_{|\cdot|}$上で Radon 拡大可能になるための必要十分条件が、$|\cdot|$ がμ-可測であるということである。

この章の締めくくりとしてシリンダー測度μに対して定まる linear random function について述べる。μ が E上のシリンダー測度であるときに $E' \rightarrow L^0(\Omega, P)$ への次のような線形写像 T が対応する。

$$\mu_{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n}(Z) = P\{\omega \in \Omega; (T(\xi_1)(\omega), T(\xi_2)(\omega), \cdots, T(\xi_n)(\omega)) \in Z\}$$

特にμ が type p $(p \geq 0)$ のときは Tは $E' \rightarrow L^p(\Omega, P)$ への連続な写像として定まる。この T をμに対する linear random function と言う。

3　位相 $\mathrm{M_p}$と L^p空間の SS-位相

まず最初に S-位相について今まで知られている結果を述べよう。

(1)　Bochner の定理

$\mathbf{R}^n$ は S-空間 でS-位相 は $\mathbf{R}^n$ 上に定まる canonical ベクトル位相。

(2) 無限次元 Hilbert 空間については 1958 年に Sazonov([8]) により S-空間であることが示された (これが Sazonov 位相と命名された由来である)。この時の S-位相は Hilbert-Schmidt 作用素を用いて定義された。これをτ_{HS}と表わす。更にこのτ_{HS}は最弱の S-位相であることも解っている。その後 Gross([1,2]), Kuo([3]) によりτ_{HS} より 真に強い Sazonov 位相の存在が示されている。これは Gross により定義された可測ノルム (Dudley-Feldman-Le Cam のものとは異なる) を用いているので τ_m で表わす。

(3) 無限次元 Banach 空間はすべてが S-空間であるとは言えない。 Mouchtari([6]) により S-空間ならば L^0に埋め込み可能で且つ cotype 2 であることが示された。更に Mouchtari は 1975 年に、Banach 空間が L^0の中に埋め込み可能で metric approximation property(m.a.p.) を持つならば S-空間であることを示した (例えば $L^p, 1 \leq p \leq 2$)。この時の S-位相は decomposed 作用素をすべて連続にする最弱位相として定義され、τ_0 と表わされる。Linde([4]) により L^p の S-位相τ_0はτ_q $(0 \leq q < p)$ に等しい。τ_q とは Λ_q作用素をすべて連続にする最弱位相である。(Λ_q 作用素については後述する。)

(4) Banach 空間がすべて S-空間とはいえないことから SS-位相、NS-位相に分けて考える必要性が生じた。最弱 NS-位相は前述のτ_0であることが知られているが最強の SS-位相についてはまだ解っていない。すべての Banach 空間に対する SS-位相で今まで知られている中で 1 番強いものとしては位相 $\mathbf{M}$ ([5]) がある。

以上の結果を踏まえてここではまず $L^{p'}$ 上に位相 $\mathbf{M}_p$を次のように定義する。

定義 $1 < p \leq 2$、p'は p の conjugate index とする。

$$\mathbf{N} = \{|\cdot|; L^{p'}\text{上で定義された連続で}\Gamma_p - \text{可測な } seminorm\}$$

とする。N に属するすべての seminorm を連続にするような最弱位相を $\mathbf{M}_p$ とする。

このとき次の定理が成り立つ。

定理 1 $L^{p'}$上に定義された位相 $\mathbf{M}_p$は L^p の type $q(1 \leq q < p)$ なるシリンダー測度全体に対する SS-位相になる。

[証明の概略] μを L^p上の type q $(1 \leq q < p)$ なるシリンダー測度とする。対応する linear random function を Tとすると Tは $L^{p'} \to L^q(\Omega, P)$ への線形写像で位相 $\mathbf{M}_p$ に関して連続になる。$\mathbf{M}_p$ の定義から Tは次のように分解される。

$$T = \phi \circ i;\ i : L^{p'} \to L^{p'}_{|\cdot|};\ \phi : L^{p'}_{|\cdot|} \to L^q$$

ここで $|\cdot| \in \mathbf{N}$ である。

ここで Schwartz の定理 ([9]) を紹介する。

「Schwartz の 定理 」 E, G は Banach 空間、u は E から G への連続線形写像とし、$p > 1$ とする。ρが$\sigma(G', G)$ 上の cotype p のシリンダー測度で $u'(\rho)$ は$\sigma(E', E)$ 上の order p の Radon 測度であるとする。このとき u は p-summing map である。

この定理から i の双対作用素 i' は q-summing map となる。$1 \leq q < p \leq 2$ であるから i' は q-Radonifying map になる。従って $L^q \to L^q$ への恒等写像に対応するシリンダー

測度をνとすると$\phi'(\nu)$はϕに対応するシリンダー測度になってこれはtype qになる。更に$i'(\phi'(\nu))=\mu$となってRadon測度になることが導かれる。以上が証明の概略である。

Linde([4]), Okazaki([7])により、$L^{p'}$上に位相τ_qを考えるとこれがS-位相であることが示されている。そこで次の系を得る。

系 $\mathbf{M}_p$はL^pのtype q $(1 \leq q < p)$のシリンダー測度全体に対するS-位相である。

τ_qというのはΛ_q-作用素をすべて連続にする最弱位相である。Banach空間E上のシリンダー測度でその特性関数が$\exp(-\|Tx\|^q)$ (ここでTは$E' \to L^q$への線形写像で$\|\cdot\|$はL^q-normとする)となるものをq-stableシリンダー測度という。このq-stableシリンダー測度の中でRadon測度になっている場合のTをΛ_q-作用素と言うのである。

系の証明はL^pがstable type qのBanach空間であるから$\tau_0=\tau_q$であり、また$\mathbf{M}_p$はτ_qより強いので$\mathbf{M}_p$がNS-位相になることから得られる。

(注意) 上述の定理1及び系においてtype $q(1 \leq q < p)$という条件を外すことが可能ならばHilbert空間L^2の場合のS-位相τ_{HS}とτ_mに対応する拡張になるのであるが未だ不明のままである。

4 一般のBanach空間上への位相$\mathrm{M_p}$の拡張

次に一般のBanach空間上に位相$\mathbf{M}_p$を拡張することを考える。

定義 Eを実可分Banach空間とする。E上のp-stableシリンダー測度μについて、Eの最初の位相に関して連続で、かつμ-可測なseminormの全体を考える。これらをす

べて連続にする最弱位相を $\mathbf{M}_p(\mu)$ とする。

(注意) 前節における定義 $\mathbf{M}_p$ は ここでの表現に従えば $\mathbf{M}_p(\Gamma_p)$ となる。

前と同様にして次の結果を得る。

定理 2 E は実可分 Banach 空間、 μ は E' 上の p-stable シリンダー測度とする。 このとき位相 $\mathbf{M}_p(\mu)$ は E上の type $q(1 \leq q < p)$ のシリンダー測度全体に対する SS-位相になる。

これに関連しては Takahashi([11]) の次の結果がある。

「Eを実可分 Banach 空間とし、$|\cdot|$ をすべての連続な p-stable シリンダー測度に関して可測な seminorm とする。Eから $E_{|\cdot|}$への canonical map は p-summing map になる。」

参考文献

[1] L.Gross, Measurable functions on Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 372-390.

[2] L. Gross, Harmonic analysis on Hilbert space, Mem. Amer. Math. Soc. 46 (1963).

[3] H. H. Kuo, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463, Springer-Verlag, New York, 1975.

[4] W. Linde, Probability in Banach spaces - Stable and Infinitely Divisible Distributions, Wiley, New York, 1983.

[5] M. Maeda, Some remarks on the Sazonov topology, Proceedings of the Fourteenth Symposium on Applied Functional Analysis (1995), 82-87.

[6] D. H. Mouchtari, Certain general questions of the theory of probability measures in linear spaces, Theor. Probab. Appl. 18 (1973), 64-75.

[7] Y. Okazaki, Harmonic analysis in a Banach space, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 34 (1980), 27-69.

[8] V. V. Sazonov, On characteristic functionals, Theor. Verojatnost. i Primenen 3 (1958), 201-205.

[9] L. Schwartz, Cylindrical probabilities and p-summing and p-Radonifying maps, Seminar Schwartz, Notes on Pure Mathematics 7 (1973), 1-64.

[10] L. Schwartz, Geometry and Probability in Banach Spaces, Lecture Notes in Math. 852,Springer-Verlag, New York, 1981.

[11] Y. Takahashi, Some results on Bochner-type theorems, 数理解析研究所講究録 887 「無限次元空間上の測度論、無限次元群の表現および関連した話題」 (1994), 121-140.