

## When does the local density theorem imply the global one?

福田 亮治 大分大工  
 佐藤 坦 九大数理

$(E, d)$  を可分距離空間、 $\lambda$  を  $E$  上の Borel 測度で、任意の閉球  $B(x, r)$  ( $x \in E, r > 0$ ) の測度  $\lambda(B(x, r))$  が有限であるものとする。また  $\mathcal{M}(E)$  で  $E$  有限 Borel 測度全体を表すことにする。この  $(E, \lambda)$  が全ての  $\mu \in \mathcal{M}(E)$  に対して

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\lambda(B(x, r))} = \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \quad \lambda\text{-a.e.}$$

を満たすとき、local density theorem (以下 LDT) を満たすという。ここに  $\frac{d\mu}{d\lambda}(x)$  は Lebesgue 分解の絶対連続部分の密度関数とする。

$(E, \lambda)$  がルベーグ測度空間の場合、LDT が成り立つことが知られているが、Calderón and Zygmund [1] はこの LDT を用いて、次の性質を導いた。

— Calderón and Zygmund [1] の Global density theorem. —

$E$  を Euclid 空間、 $\lambda$  を Lebesgue 測度  $\phi$  を  $\mathbf{R}^+$  上の関数で次の (F1)~(F3) を満たすものとする。

(F.1)  $\phi$  は非増加で  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$  を満たす。(一般には  $\phi(0+) = \infty$  でもよい。)

(F.2)  $\phi(r) > 0$  となる  $r > 0$  が存在する。

(F.3)  $\int_E \phi(d(x, y))\lambda(dy) < \infty \quad \lambda\text{-a.e.},$

各  $T \geq 1$  に対して

$$C_x(T) = \int_E \phi(Td(x, y))\lambda(dy)$$

と置くと、 $\lambda$  に関して絶対連続な任意の  $\mu \in \mathcal{M}(E)$  に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{C_x(T)} \int_E \phi(Td(x, y))\mu(dy) = \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \quad \lambda\text{-a.e.} \quad (1)$$

を満たす。

この性質は、絶対連続性がない一般の  $\mu \in \mathcal{M}(E)$  に対して容易に拡張されるが、その場合  $\phi$  として  $1_{[0,1]}$  をとると LDT になる。

一般の  $(E, \lambda)$  と非増加関数  $\phi$  に対して、(1) が任意の  $\mu \in \mathcal{M}(E)$  に対して成り立つとき、 $(E, \lambda, \phi)$  は Global density theorem (以下 GDT) を満たすという。本報告では、(F.1) ~ (F.3) を満たす  $\phi$  に対して、LDT から GDT が導かれるための必要十分条件を与え、その応用として  $\lambda$  が doubling condition を満たす場合に、GDT が成り立つための十分条件を与える。ここに、 $\lambda$  が doubling condition を満たすとは

$$\beta(x) = \sup_{r>0} \frac{\lambda(B(x, 2r))}{\lambda(B(x, r))} < \infty, \quad \lambda\text{-a.e.} \quad (2)$$

を満たすことであり、(2) を仮定すれば LDT が成り立つことが知られている (Federer [2])。さらに、 $(E, \lambda)$  が doubling condition を満たす場合に、 $\phi(r) = \frac{1}{1+r^\alpha}$  ( $\alpha > \log(\beta)/\log(2)$ ) に関する GDT が佐藤 [3] により直接証明されている。ここで報告する結果はその一般化である。

— GDT の必要十分条件 —

定理 1  $\phi$  を (F1)~(F3) と満たす非増加関数とし、 $(E, \lambda)$  が LDT を満たすことを仮定すると、次の (1) ~ (3) は同値。

(1)  $(E, \lambda, \phi)$  が GDT を満たす。

(2) 全ての  $\delta > 0$  に対して次が成り立つ。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{C_x(T)} \int_{B(x, \delta)^c} \phi(Td(x, y)) \lambda(dy) = 0, \quad \lambda\text{-a.e.} \quad (3)$$

(3) 次の (A1), (A2) が成り立つ。

(A.1) 任意の  $r > 0$  に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi(rT)}{C_x(T)} = 0, \quad \lambda\text{-a.e.}$$

(A.2) (3) を満たす  $\delta > 0$  が存在する。

補足 定理 1 で、さらに  $\lambda(E) < \infty$  を満たす場合は (3) の (A1) が GDT を満たすための必要十分条件になり、 $\lambda$  が doubling condition を満たす場合は (2) と (3) の (A2) が同値になる。

証明の概略 (1)  $\Rightarrow$  (3)  $\delta_z \in \mathcal{M}(E)$  ( $x \in E$  の point mass) を考えると、 $\frac{d\delta_z}{d\lambda} = 0$ ,  $\lambda$ -a.e. を満たす  $z \in E$  が十分にたくさんある。 $r = d(z, x)$  とおくと、 $\int_E \phi(Td(x, y))d\delta_z(dy) = \phi(Tr)$  であること、及び  $\phi$  の単調性を用いて (A1) を得る。

$\mu$  を  $\mathcal{M}(E)$  の任意の元とし  $m_x(r) = \mu(B(x, r))$ ,  $\gamma_x(r) = \lambda(B(x, r))$  と置く。このとき GDT より、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{C_x(T)} \int_{[0, \infty)} \left( m_x\left(\frac{r}{T}\right) - \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \gamma_x\left(\frac{r}{T}\right) \right) d\phi(r) = 0 \quad (4)$$

が成り立つことが分かる。LDT 及び (A1) を用いると任意の  $\delta > 0$  に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{C_x(T)} \int_{[0, T\delta)} \left( m_x\left(\frac{r}{T}\right) - \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \gamma_x\left(\frac{r}{T}\right) \right) d\phi(r) = 0 \quad (5)$$

が成り立つ。また (A1) より、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{C_x(T)} \int_{[T\delta, \infty)} m_x\left(\frac{r}{T}\right) d\phi(r) = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。(4) ~ (6) より

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{C_x(T)} \int_{[T\delta, \infty)} \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \gamma_x\left(\frac{r}{T}\right) d\phi(r) = 0 \quad (7)$$

を得る。 $\mu$  として特に  $\lambda$  と互いに絶対連続なものをとると、(A1) を用いて (7) から任意の  $\delta$  にたいして (3) (3) が導かれる。

(3)  $\Rightarrow$  (2) 上の (1)  $\Rightarrow$  (3) の証明の後半部分より明か。

(2)  $\Rightarrow$  (1) (4) を示せば良い。仮定より (3) の (A1) を導くことができる。(5) に対応する部分の収束は LDT から、(6) に対応する部分の収束は (A1) から、残りの部分は仮定からそれぞれ対応する収束が得られ求める結果を得る。■

ルベーク測度の場合 定理 1 の (2) または (3) の性質が、 $\phi$  に関する性質 (F3) より導くことができるが、これは一般には成立せず、 $\mathbf{R}^3$  上のルベーク測度を閉球の上に制限した測度で反例得ることができる。

— doubling condition の下での GDT の十分条件 —

$\lambda$  が doubling condition を満たすとき、次の条件を満たせば 定理 1 の (2) の条件を満たすことが示され、GDT が成り立つことが分かる。

定理 2  $\lambda$  は (2) を満たすとし、 $H(x) = \frac{\log \beta(x)}{\log 2}$  に対して

$$- \int_E r^{H(x)} d\phi(r) < \infty, \quad \lambda\text{-a.e.}$$

が成り立つことを仮定する。このとき  $(E, \lambda, \phi)$  は GDT を満たす。

## References

- [1] A. P. Calderón and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, **88** (1967), 85–139.
- [2] H. Federer, *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.
- [3] Hiroshi Sato, Global Density Theorem for a Federer Measure. *Tôhoku Math. J.*, **44** (1992), 581–595.