数理解析研究所講究録
975巻 1996年 202-219

ファジイ測度と主観的評価問題

九州工大情報工 本田 あおい (Aoi Honda)
九州工大情報工 岡崎 悦明 (Yoshiaki Okazaki)
九州工大情報工 山口 真司 (Shinji Yamaguchi)

概要: 本稿では[1], 3.3, で提唱されたファジイAHP法において, ファジイ測度の同定の改良を試る。評価者の評価度(=ファジイ測度)は確率から導かれるものと仮定して評価尺度の同定を行う。[1]では評価尺度はλ-ファジイ測度であると仮定されている。確率から導かれるファジイ測度のクラスで考えると, 同定はかなり自由に行える。

1 序論 本稿ではファジイAHP(階層化意志決定法)による主観的評価問題について考察する([1], 3.3). 評価項目$x_1, x_2, \cdots, x_n$からなる有限集合をΩとする。評価事象とはΩの部分集合のことである。評価事象全体のなす集合族(Ωの部分集合全体)を2^Ωで表す。主観的評価問題において, 価値判断の尺度は2^Ω上のファジイ測度として定式

化される。その際，価値判断の尺度そのものは評価者自身も知らないものと考えられる。このためまず評価者自身の価値判断の尺度を何らかの方法で同定しなければならない。このための方法として，AHP理論における一対比較行列の固有ベクトル法が提案されている。この方法を実行するには 2^{Ω} の要素である任意の二つの評価事象について互いの重視度をアンケート調査することになり，調査項目数が膨大なものとなって現実的ではない。現実的な方法として，一部の評価事象族 $\mathfrak{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subset 2^{\Omega}$ について A_i と A_j の一対比較を考える。A_i の A_j に対する重視度の比を a_{ij} とし一対比較行列 (a_{ij}) をつくる。(a_{ij}) の最大固有値に対する固有ベクトルで，座標成分の最大値を1に正規化したものを $(w_1, w_2, \cdots, w_n)^t$ とするとき，この評価者は評価事象 A_i を尺度 w_i で評価しているものとみなされる。この手続きにより評価尺度（＝ファジイ測度）が部分族 $\mathfrak{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 上では決定される。最終的な評価値は評価者が与える各評価項目 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の評価度 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$（これは Ω 上の評価関数 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ として与えられる）を評価尺度（＝ファジイ測度）により（ファジイ）積分をし，その積分値として最終評価値が与えられる。このためには，部分族 $\mathfrak{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 上で決定されたファジイ測度を 2^{Ω} 全体

へ拡張しなくてはならない。これがファジイ測度の同定問題である。この同定問題については[1], 3.3, において λ-ファジイ測度のクラスを用いる方法が提案され, [2]において確率から導かれるファジイ測度のクラスを用いる方法が提案されている。

2 確率から導かれるファジイ測度

定義　Ω を有限集合とし, 2^{Ω} で Ω の部分集合全体を表す。$g : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ がファジイ測度とは次の条件:

1. $g(\phi) = 0$, $g(\Omega) = 1$,
2. $E \subset F \Rightarrow g(E) \leqq g(F)$ (単調性)

がみたされること。

定義　$P : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ が確率とは次の条件:

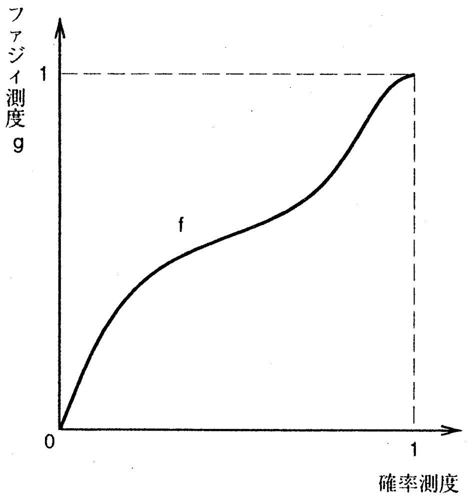
1. $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
2. $E \cap F = \phi \Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

がみたされること。

定義　ファジイ測度 $g : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ について, ある確率 $P : 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ と, ある非減少関数 $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ が存在して, $g(A) = f(P(A))$, $A \in 2^{\Omega}$, と表せるとき, g は確率から導かれる(admissible)という。このとき, $g = f \circ P$ と表す。

(注) 一般にファジイ測度μに対して，非減少関数 $f: [0,1] \to [0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, により $g(A) := f(\mu(A))$ とおくとgは再びファジイ測度となる。

確率から導かれるファジイ測度は，確率Pという均質的（あるいは線形的）な尺度が基本にあり，その均質的尺度が非減少関数fを通して若干ゆがめられた尺度といえよう。このfがいわゆる主観に相当するものであろう（もちろんPとfとが完全に独立というわけではなく，Pにも主観が入っていよう）。このクラスは確率という扱い易い尺度が基本にあり，ファジイ測度の中では比較的良い性質をもつであろうことが期待される。確率から導かれるファジイ測度のクラスは[3]で考察された。



確率から導かれるファジイ測度

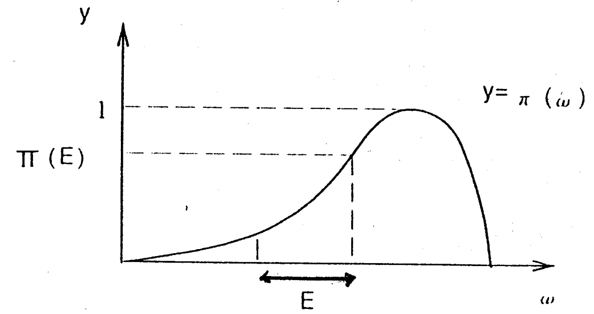


図 2.3: 可能性分布関数 π

定義 ファジイ測度 g に対して $g^d(A) := 1 - g(A^c)$ で与えられるファジイ測度 g^d を g の双対とよぶ。

定義 $\Pi : 2^\Omega \longrightarrow [0,1]$ が可能性測度とは，関数 π : $\Omega \longrightarrow [0,1]$, $\sup_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$, が存在して

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega) \quad , A \in 2^\Omega$$

となること。π を可能性分布関数とよぶ。

定義 可能性測度の双対を必然性測度とよぶ。

例（[3]）

(1) 確率から導かれるファジイ測度 g の双対 g^d は確率から導かれる。

(2) 可能性測度，必然性測度は確率から導かれる。

(3) Ω が2点集合ならばすべてのファジィ測度は確率から導かれる。

(4) Ω が3点集合ならば確率から導かれないファジイ測度が存在する。

確率から導かれるファジイ測度のクラスを特定する条件については今の所全く未知である。今ファジイ測度 $g : 2^\Omega \longrightarrow [0,1]$ が確率から導かれているとする。このとき次の性質がなりたつ：

(*) $g(A) \leqq g(B)$, $A \cap C = \phi$, $B \cap C = \phi \Rightarrow g(A \cup C) \leqq g(B \cup C)$

逆に (*) が成立すれば g は確率から導かれるであろうか？ Ω が3点 または 4点集合であれば正しい。Ω が

3点集合であれば，ファジイ測度は本質的に8種存在し，うち2種が確率から導かれる。Ω が4点集合であれば，ファジイ測度は本質的に70016種存在し，うち確率から導かれるものは14種である。3点集合の場合を定理として述べる。

定理　$\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ とし，ファジイ測度 g は $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\})$ をみたすものとする。このとき，2^Ω の各事象 A に対する値 $g(A)$ の大小関係により g は次の8種のうちのいずれかである：

(1) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\})$

(2) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\})$

(3) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_2, x_3\})$

(4) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_2\})$

(5) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_3\})$

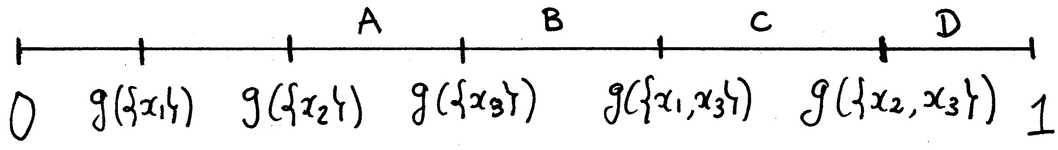
(6) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_2, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_3\})$

(7) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_1, x_3\})$

(8) $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_1, x_2\})$

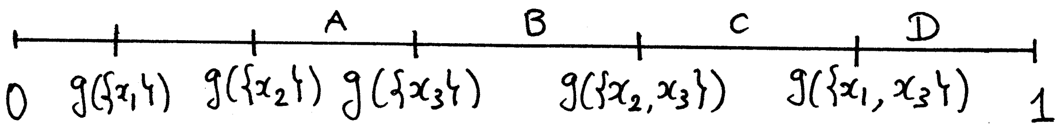
このうち確率から導かれるのは(1)と(2)のクラスである。

証明　(1°) 単調性より $g(\{x_2, x_3\})$, $g(\{x_1, x_3\})$ は $g(\{x_3\})$ より小さくはない。$g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\})$ とする。



このとき $g(\{x_1, x_2\})$ の値は上図区間の A, B, C, D の4ヶ所に入れることができる((1)〜(4))。

(2°) $g(\{x_1, x_3\}) \geqq g(\{x_2, x_3\})$ の場合。



このとき $g(\{x_1, x_2\})$ は上図区間の A, B, C, D の4ヶ所に入れることができる((5)〜(8))。

(3°) g が確率から導かれるとすると $g(\{x_1\}) \leqq g(\{x_2\}) \leqq g(\{x_3\})$ なることと条件(*)より $g(\{x_1, x_2\}) \leqq g(\{x_1, x_3\})$ かつ $g(\{x_1, x_3\}) \leqq g(\{x_2, x_3\})$ でなければならない。これらをみたすのは (1), (2) である。

(4°) (1) の g は確率から導かれること。
今 $P(\{x_1\}) = \frac{1}{7}$, $P(\{x_2\}) = \frac{2}{7}$, $P(\{x_3\}) = \frac{4}{7}$ で確率 P を与えると, P は (1) のクラスに属し,

$P(\{x_1\}) < P(\{x_2\}) < P(\{x_1, x_2\}) < P(\{x_3\}) < P(\{x_1, x_3\}) < P(\{x_2, x_3\})$

となる。今, $f(P(A)) := g(A)$, $A \in 2^\Omega$, とおき, 他では点 $(P(A), g(A))$, $A \in 2^\Omega$, を直線で補間して $f: [0,1] \to [0,1]$ を定める。f は非減少かつ $g = f \circ P$。

(5°) (2) の g は確率から導かれることも (4°) と同様にしていえる。

3 ファジイ積分(Choquet 積分) $\Omega=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ とし, $f:\Omega\longrightarrow[0,\infty)$ とする。fのとりうる値を $r_1<r_2<\cdots<r_N$ とし, $D_i:=\{x\in\Omega \mid f(x)=r_i\}$ とおく。このとき, 関数fのファジイ測度gに関するファジイ積分(Choquet 積分)は

$$(C)\int_\Omega f\,dg := \sum_{i=1}^{N}(r_i-r_{i-1})\,g(A_i)$$

$$A_i = D_i \cup D_{i+1} \cup \cdots \cup D_N\ ,\quad r_0=0,$$

と定義される。同等な記法で表せば

$$(C)\int_\Omega f\,dg = \int_0^\infty g(\{x \mid f(x)\geqq r\})\,dr$$

dr は $[0,\infty)$ 上のルベーグ積分

と表せる。

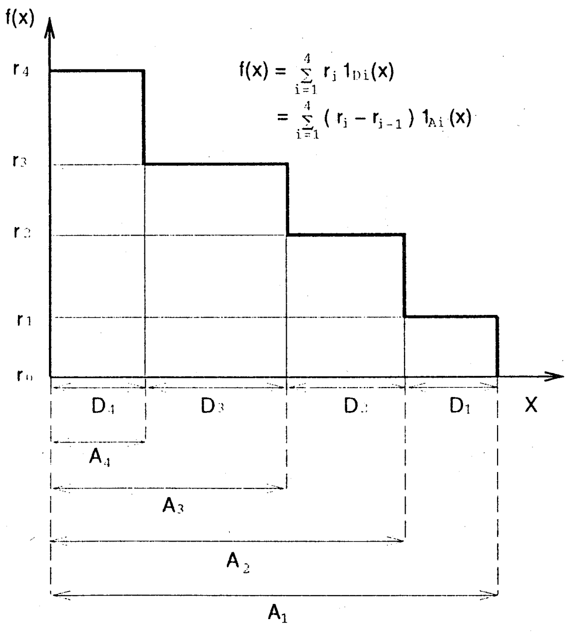


図 2.4: 単関数 f

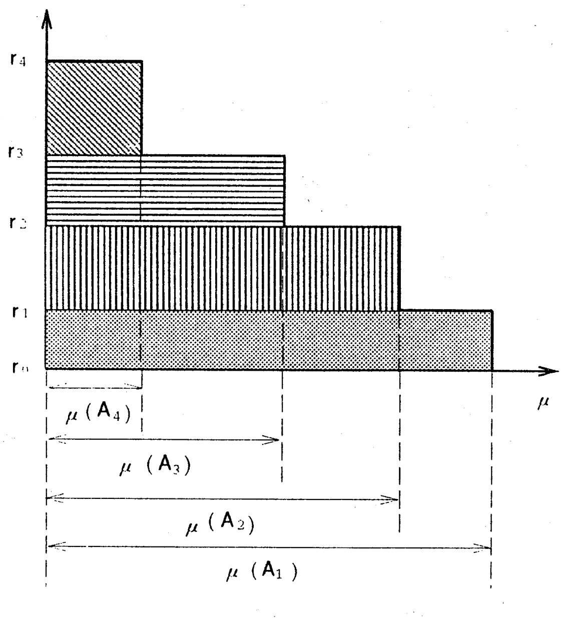


図 2.5: 単関数 f のショケ積分

4　一対比較行列による評価尺度の決定　k個の評価事象$A_1, A_2, \cdots, A_k$についてその評価度$w_1, w_2, \cdots, w_k$が確定しているとする。即ち，評価者の評価尺度gが$\mathcal{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$上で完全に決定されていて$g(A_i)=w_i$とする。このとき，$A_i$の$A_j$に対する重視度の比$a_{ij}$は$a_{ij}=w_i/w_j$である。行列$(a_{ij})$は$a_{ij}=1/a_{ji}$をみたし，最大固有値は$k$，対応する固有ベクトルは$(w_1, w_2, \cdots, w_k)^t$である。即ち評価度$w_1, w_2, \cdots, w_k$を成分とするベクトルは$(a_{ij})$の最大固有値に対する固有ベクトルとして出現する。

逆に評価事象A_iとA_jの重視度の比a_{ij}を（評価者へのアンケートにより）調査し，一対比較行列(a_{ij})をつくり，その最大固有値に対する固有ベクトルの成分値w_iでA_iの評価度とする方法が提案されている（[1], 3.1 − 3.3）。今評価事象$A_1, A_2, \cdots, A_k$（$A_k=\Omega$とする）を考える。A_iのA_jに対する重視度の比a_{ij}を次の整数値で与える：

1 … 同程度重要　　3 … 少し重要

5 … かなり重要　　7 … 非常に重要

（2, 4, 6, 8 は中間の場合に用いる）。

$a_{ii}=1$，$a_{ij}=1/a_{ji}$である。但しA_iとA_jの重視度の比が答え難い場合は$a_{ij}=a_{ji}=0$とし，各行の0の個数を対角成分に加えておく。こうしてできる一対比較行列

(a_{ij}) の最大固有値に対する固有ベクトルの成分を $w_1, w_2, \cdots, w_k$ (但し $w_k = 1$ と正規化しておく) とするとき，評価事象 A_i の評価度は w_i とされる。これで評価者の評価度 g (=ファジイ測度) が部分族 $\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subset 2^\Omega$ 上で定まる。2^Ω のすべての事象に対して評価度を定めるには任意の $A, B \in 2^\Omega$ について一対比較調査の必要があり，膨大な調査となり現実的でない。部分族 $\mathfrak{F} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 上で決定された尺度 g を何らかの方法で 2^Ω 全体へ拡張することが考えられている (ファジイ測度の同定問題)。

例　アンケートで　$a_{14} = 3$，$a_{24} = 4$，$a_{32} = 3$，$a_{34} = 7$ のみ答えたとする。$a_{ij} = 1/a_{ji}$ より次の不完全一対比較行列ができる (行列 (1))。第1行にはブランク (評価者が比較できないとした部分) が2個，第2，3行にはブランクが1個あるので，ブランクには0を記し，対角要素にブランクの個数を加える (行列 (2))。

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & * & * & 3 \\ * & 1 & 1/3 & 4 \\ * & 3 & 1 & 7 \\ 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1/3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

5 ファジイ測度の同定　$\mathfrak{F} \subset 2^\Omega$ とし，ファジイ測度 g は部分族 $\mathfrak{F}$ 上での値 $g(A)$, $A \in \mathfrak{F}$, は既知とする。$A \notin$

$\mathcal{F}$に対しても $g(A)$ の値を定めたい。換言すれば 2^Ω 上のファジイ測度 g' で，$\mathcal{F}$ 上では g と一致するものを構成したい。もちろんこのような g' は多数存在するであろう。一般には $\mathcal{F}$ 上でぴったりと g に一致するものを構成するのは難しいこともあろう。この場合次善の方法として，$\mathcal{F}$ 上で g に"近い"ファジイ測度 g' の構成を考えることになる。例えば [1], 3.3, では g' を λ－ファジイ測度のクラスに属するものと仮定し，このクラスの中で $\mathcal{F}$ 上では g に"近い"ものを選択している。本節では g' を確率から導かれるファジイ測度と仮定して同定を試る。

ファジイ測度 g の同定を考えるにあたって，問題を次のように定式化する。

問題　g を 2^Ω 上のファジイ測度とし，部分族 $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ 上での値は既知とする。このとき，2^Ω 上の確率から導かれるファジイ測度 g' で $g'(A) = g(A)$, $A \in \mathcal{F}$, なるものを構成せよ。

この問題を解くには $g(A) = f(P(A))$, $A \in \mathcal{F}$, となる確率 $P : 2^\Omega \longrightarrow [0,1]$ と，非減少関数 $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ を見出せばよい。確率 P についてはその加法性により同定は比較的容易であるし，非減少関数 f は値 $P(A)$ と値 $g(A)$ を対応させるように決めればよい。

定理　$\mathcal{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ ($A_k=\Omega$) とし，$g(A_1) \leqq g(A_2) \leqq \cdots \leqq g(A_k)=1$ とする。今 2^Ω 上の確率 P で

$$(**)\quad P(A_1)<P(A_2)<\cdots<P(A_k)=1$$

をみたすものが構成できたとする。このとき g は確率 P から導かれるファジイ測度で同定できる。

証明　(**) をみたす確率 P に対して，点 $(0,0), (P(A_1), g(A_1)), \cdots, (P(A_k), g(A_k))=(1,1)$ を直線で補間した関数を f とおく。$f:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ は非減少であり，$g(A_i)=f(P(A_i))$，$i=1,2,\cdots,k$ をみたす。

一般には $\mathcal{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 上で定まる g は，一対比較アンケート調査により決定されるものであるから，正確にはファジイ測度ではないかも知れない（アンケート誤差などのため）。このときは確率から導かれるファジイ測度 g' で，$\mathcal{F}$ 上で g に"近い"ものを取らねばならない。この"近さ"の基準については今のところ確たるものはない。一つの提案として，g の $\mathcal{F}$ 上での値の大小関係

$$g(A_1) \leqq g(A_2) \leqq \cdots\cdots \leqq g(A_k)=1$$

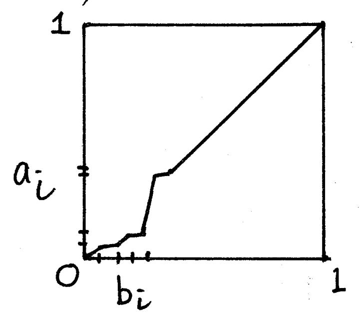
をなるべくそのまま保存する $g'=f \circ P$，即ちなるべく

$$g'(A_1) \leqq g'(A_2) \leqq \cdots \leqq g'(A_k)=1$$

の順序になる g' を g に"近い"ものとしてはどうだろうか。

もし順序が同一であれば非減少関数 f を変形してぴったりと $f(P(A_i)) = g(A_i)$ にできる（定理）。例えばファジィ測度であるためには $g'(A_2) \leqq g'(A_1)$ でなければならないときは，$g(A_1) = g(A_2)$ とみなすこととする（調査結果の $g(A_1) \leqq g(A_2)$ は誤差とみる）。

例 $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ とし $\mathcal{F} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \cdots, \{x_n\}\}$ とする。g を 2^Ω 上のファジィ測度で $\mathcal{F}$ 上での値 $g(\{x_i\}) = a_i$ は既知とする。このとき 2^Ω 上の確率から導かれるファジィ測度 g' で $g'(\{x_i\}) = a_i$ なるものを次の様に構成できる。一般性を失うことなく $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ とする。$b_i = a_i / \sum_{k=1}^n a_k$ とし，確率 P を $P(A) = \sum_{i : x_i \in A} b_i$ とおく，即ち，$P = \sum_{i=1}^n b_i \delta_{x_i}$（$\delta_{x_i}$ は点 x_i の Dirac 測度）。f として $f(b_i) = a_i$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$ なる任意の非減少関数をとれば $g(\{x_i\}) = f \circ P(\{x_i\})$ となる。f としては例えば $f(b_i) = a_i$ とし点 (b_i, a_i) の間を直線で補間する。この例の $\mathcal{F}$ では $P(\{x_i\})$ の値が区間 $[0, 1]$ の 0 に近い方に集中し，関数 f は g をうまく同定しているとは言い難い。



ファジイ測度の同定をするにあたっては，一対比較アンケート調査の評価事象 $\mathcal{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ をうまく選んでおかねばならない。確率 P を与えたとき値 $P(A_i)$, $i=1,2,\cdots,k$, が $[0,1]$ 区間にかたよりなく分布する様になっているのが理想的である。

例（[1], 3.3） $\Omega=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\mathcal{F}=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}$。一対比較法により

$$\left.\begin{array}{ll} g(\{x_1\})=0.051, & g(\{x_2\})=0.098, \\ g(\{x_3\})=0.127, & g(\{x_4\})=0.191 \end{array}\right\} (1)$$

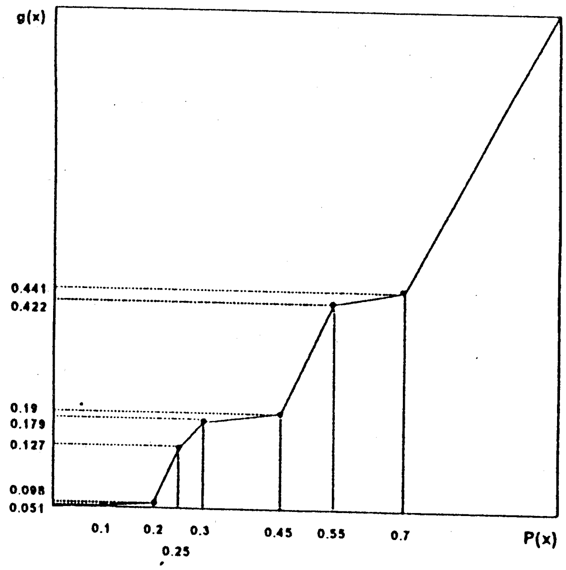
$$\left.\begin{array}{ll} g(\{x_1, x_2\})=0.179, & g(\{x_3, x_4\})=0.441 \\ g(\{x_1, x_2, x_3\})=0.422 & \end{array}\right\} (2)$$

を得たとする。今 $g=f\circ P$ と表せるものとする。$\mathcal{F}$ の中に一点集合がすべて入っているので $P(\{x_i\})$, $i=1,2,3,4$ を定めれば確率 P は完全に決定される。f, P のきめ方はかなりの自由性があるが，$P(A)\leqq P(B) \Rightarrow g(A)\leqq g(B)$ となる様に定めなければならない（f は非減少だから）。データ(1)より $g(\{x_1\})<g(\{x_2\})<g(\{x_3\})<g(\{x_4\})$ なので，$P(\{x_1\})<P(\{x_2\})<P(\{x_3\})<P(\{x_4\})$ なる様に P を定める。データ(2)より同様に $P(\{x_1\})+P(\{x_2\})<P(\{x_3\})+P(\{x_4\})$, $P(\{x_1\})+P(\{x_2\})+P(\{x_3\})<P(\{x_3\})+P(\{x_4\})$ なる様に P を定めよう。まとめると，データ値 $g(A)$, $A\in\mathcal{F}$, の大小関

係が f を通して P にも遺伝しているはずであるから,

$$P(\{x_1\}) < P(\{x_2\}) < P(\{x_3\}) < P(\{x_1\}) + P(\{x_2\})$$
$$< P(\{x_3\}) + P(\{x_4\}) < P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + P(\{x_3\})$$

をみたす様に P を与える。ただし $P(\{x_4\})$ の値をどこに入れるかは任意性がある。例えば $P(\{x_1\}) = 0.1$, $P(\{x_2\}) = 0.2$, $P(\{x_3\}) = 0.25$, $P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) = 0.3$, $P(\{x_4\}) = 0.45$ と与え, $(P(A), g(A))$, $A \in \mathcal{F}$, を直線で補間し f とおく。



6 例題

[評価項目が3個の場合]

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ とする。3点集合上のファジイ測度は各評価事象 $A \in 2^\Omega$ の値 $g(A)$ の大小順序で分類すれば8種存在し, うち2種が確率から導かれる(2節, 定理)。

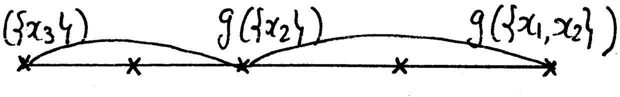
今4種類のノートパソコンA, B, C, Dの中から最良のものを選びたい。評価項目として性能(x_1), 携帯性(x_2), および価格(x_3)の三項目を考える。これらの評価項目に対して, ある評価者はA, B, C, Dに次の評点を与えたとする。

	性能 x_1	携帯性 x_2	価格 x_3
A	90	65	60
B	70	80	70
C	65	85	70
D	80	70	75

一対比較のための評価事象として $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \Omega$ を採用する。評価者の一対比較の結果は次の通りであった。

$$
\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1, x_3 \\ x_1, x_2, x_3
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1/3 & 1/3 & 1/5 & 1/9 \\
3 & 1 & 3 & 1/3 & 1/6 \\
3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/6 \\
5 & 3 & 3 & 1 & 1/3 \\
9 & 6 & 6 & 3 & 1
\end{pmatrix}
$$

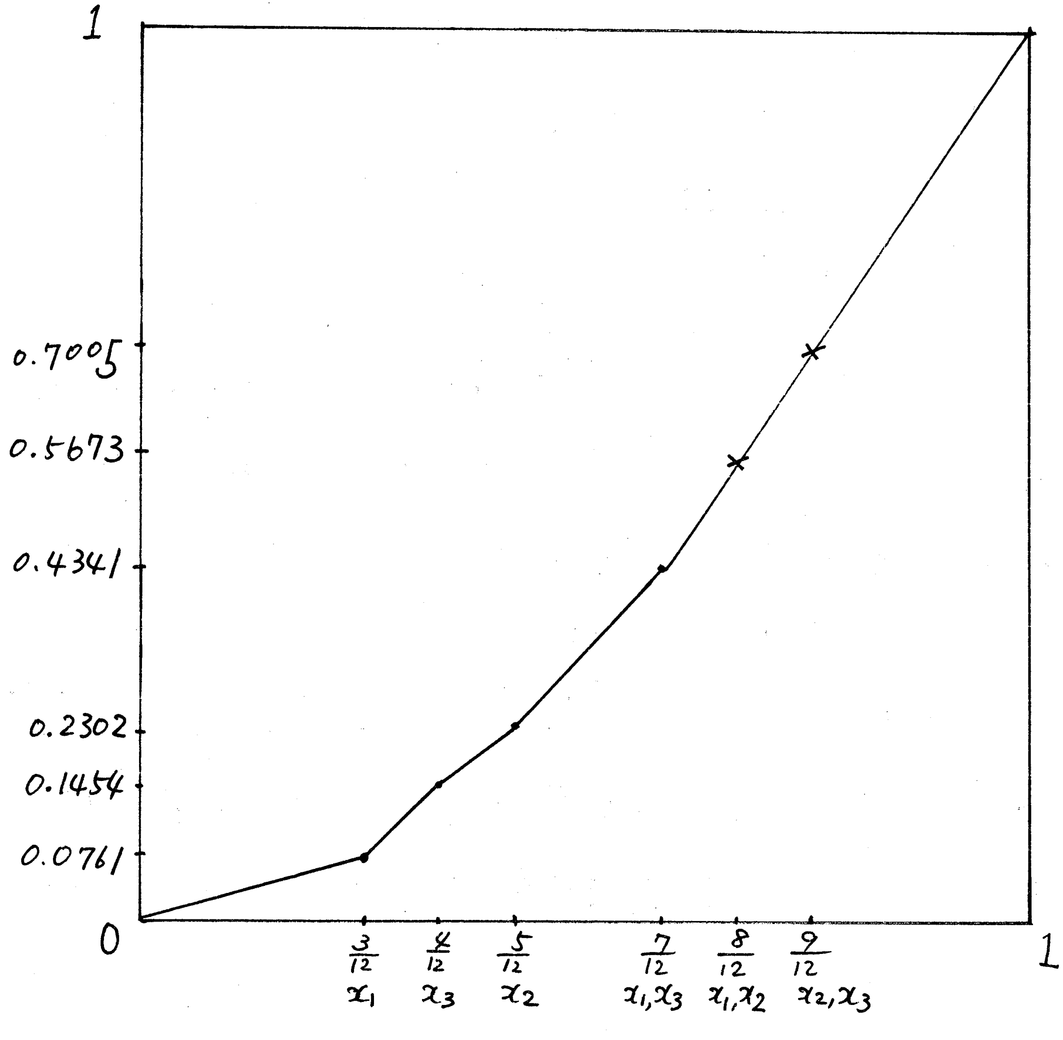
(注) 一対比較行列の左上 3×3 の部分から $g(\{x_1\}) < g(\{x_3\}) < g(\{x_2\})$ らしいことがわかる。g が確率から導かれたとすると2節定理により $g(\{x_3\}) < g(\{x_2\}) < g(\{x_1, x_2\}) < g(\{x_2, x_3\})$ であり, $g(\{x_1, x_3\})$ は次図の区間のいずれか一方に入る:



従って $g(\{x_1, x_3\})$ の位置を定めることが重要であり, このために $\{x_1, x_3\}$ を評価事象に入れておくのが良いであろう。

一対比較行列の最大固有値は $\lambda_{max} = 5.2411$ であり，固有ベクトルは $(0.0761, 0.2302, 0.1454, 0.4341, 1)$ となる。従って $g(\{x_1\}) = 0.0761$, $g(\{x_2\}) = 0.2302$, $g(\{x_3\}) = 0.1454$, $g(\{x_1, x_3\}) = 0.4341$ であり $g(\{x_2\}) < g(\{x_1, x_3\})$ である。従って確率から導かれるものとすれば $g(\{x_2\}) < g(\{x_1, x_3\}) < g(\{x_1, x_2\}) < g(\{x_2, x_3\})$ となり $g(A)$, $A \in 2^{\Omega}$, の大小順序は決定された。

確率 P を $P(\{x_1\}) = \frac{3}{12}$, $P(\{x_2\}) = \frac{5}{12}$, $P(\{x_3\}) = \frac{4}{12}$ と与える。値 $P(A)$, $A \in 2^{\Omega}$, が区間 $[0, 1]$ になるべく均等に分布する様与えることが望ましい。



未知の$g(A), A \notin \mathcal{F}$，はグラフから $g(\{x_1, x_2\}) = f(P(\{x_1\}) + P(\{x_2\})) = f(\frac{8}{12}) \fallingdotseq 0.5673$, $g(\{x_2, x_3\}) = f(\frac{9}{12}) \fallingdotseq 0.7005$ と読みとる。

最終判定は評価者の評点（＝評価関数）をファジイ積分して積分値の大小で決定する。例えば A については評価関数は $h(x_1) = 90$, $h(x_2) = 65$, $h(x_3) = 60$ であり，

$$(c)\int_\Omega h\,dg = (90-65)\cdot g(\{x_1\}) + (65-60)\,g(\{x_2\}) + 60\cdot g(\Omega)$$

$= 64.7390$ となる。同様に $B = 72.302$, $C = 73.156$, $D = 72.249$ となり，この例では C が最良となる。

（注）評価項が3個の場合はファジイ測度そのものが本質的に8種しかなく，全事象比較により1種を直接同定することも可能であろう。

文献

[1] 浅居喜代治，ファジイ経営科学入門，オーム社，1992.

[2] 本田あおい，馬被健次郎，岡崎悦明，ファジイ測度の同定と決定問題，第12回 ファジイシステムシンポジウム，1996.

[3] 山口真司，本田あおい，岡崎悦明，確率から導かれるファジイ測度，第12回ファジイシステムシンポジウム，1996.