

Discrete Time Stochastic Processes on Finite Sets
and Stochastic Modules — II

有限集合上の離散時間確率過程と確率加群 — II

伊藤 尚史 (ITO Hisashi)

東邦大学理学部情報科学科

Department of Information Science

Faculty of Science, Toho University

E-mail: his@kuro.is.sci.toho-u.ac.jp

Abstract. The paper is the continuation of the previous work [5] and mainly treats linearly dependent processes with a module theoretic framework. It is investigated how a given, ‘complicated’ linearly dependent process is decomposed into a sum of ‘smaller’ or ‘simpler’ linearly dependent processes. A certain type of direct sum decomposition of the related module is proved to correspond to the decomposition of a linearly dependent process, and vice versa. This module theoretic approach leads us to propose a new, canonical decomposition, which differs from the one so far discussed by A. Heller [2]. Our canonical decomposition yields the connected component decomposition when the process is a Markov chain, and is finer than the ergodic decomposition in the case the linearly dependent process being stationary.

1. はじめに

有限集合 \mathcal{A} 上の離散時間確率過程 $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ (あるいは $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$) が, 確率的な振舞いをするための ‘仕掛け’ として, 有限次元線形空間を背後に持っている場合がある. 例えば, Markov 連鎖や陰 Markov 過程は, 推移確率行列が作用するような線形空間 (状態空間) を ‘仕掛け’ として持っている. 一般に, 有限次元線形空間を ‘仕掛け’ として背後に持っているような $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ (あるいは $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$) の事を線形従属過程と言う (正確な定義は後述する).

さて, 必ずしも簡単であるとは限らない 1 個の (工学的な, あるいは物理的な) システムが与えられたとき, それを丸のまま理解しようとするのではなく, もっと小さな (あるいは, 簡単な) システムにそれを分解しておいてから考えるという手法がある. ただし, 分解する際には, もとのシステムの ‘構造’ を破壊しないような, ‘意味のある’ 分解にしなければならないのはもちろんである.

本稿では, 線形従属過程が 1 個与えられた時に, それをもっと簡単な線形従属過程に分解するという問題を取り扱う. ここでは, 線形従属過程がその背後に線形空間という ‘仕掛け’ を持つということを考慮して, ‘和’ の形への分解を考えることにする (この形の分解が自然であろう).

つまり, 線形従属過程に対して

$$g(\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_k) := \text{Prob}\{X_0 = \alpha_0, X_1 = \alpha_1, \dots, X_k = \alpha_k\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \alpha_i \in \mathcal{A})$$

で同時分布 (の全てを表す) 関数 $g : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{R}$ を定義するとき, この g を, h 個の線形従属過程の同時分布 (の全てを表す) 関数

$$g_j : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{R} \quad (j = 1, 2, \dots, h)$$

の凸線形和の形

$$g = \sum_{j=1}^h c_j g_j \quad (c_j > 0)$$

に分解するという問題を考える訳である。ただし、分解した結果の g_j が元の g よりも複雑になってしまっ
ては面白くないので、

- ・ 各 g_j の表す線形従属過程の‘仕掛け’の線形空間の次元を n_j とする時、その和 $\sum_{j=1}^h n_j$ は元の線形従属過程の‘仕掛け’の線形空間の次元を超えないものとし、また、小さいシステムに分解できればそれに越したことはないので、
- ・ なるべく細かく、つまり、 g_j の個数 h をなるべく大きくするように分解することも目標とする。(問題の正確な記述は後です。)

この問題に関しては既に Heller の研究 [2] (線形従属過程に限らずごく一般に、有限集合上の離散時間確率過程の分解を研究しているもの) があるが、本稿ではそれとは違った分解を提案する。そして、線形従属過程の分解としては Heller の分解は無意味な分解になっており、ここで提案した分解の方にしか意味がないのだとも主張したい。

また、第 6, 7 節では、特に、定常な線形従属過程を取り扱い、我々が提案した線形従属過程の分解 (正準分解と名付けたもの) がエルゴード分解の細分になることも証明する。

2. 準備

まず、有限集合 \mathcal{A} の片側無限列上の確率測度の場合を取り扱おう。第 6, 7 節に至れば、 \mathcal{A} の両側無限列上の定常確率測度に、全く同じ手法を適用するであろう。

有限集合 \mathcal{A} 上の線形従属過程 $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ は、一般性を失わずに、次のように定義できる ([5] の Theorem 3 とその証明における議論に依る)。

定義 1. \mathcal{A} 上の確率過程 $\{X_t\}$ が線形従属過程であるとは、

- ・ 実数の $n \times n$ 行列 A ,
- ・ 実数の n 次元横ベクトル p ,
- ・ 実数の n 次元縦ベクトル q ,
- ・ 実数の $n \times n$ 射影行列の組 $\Pi := \{\Pi(\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$
(ただし、 Π は $\Pi(\alpha)\Pi(\beta) = \delta_{\alpha\beta}\Pi(\alpha)$ かつ $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \Pi(\alpha) = I$ を満たすこと; $\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタ, I は単位行列)

を用いて、 $(X_0, X_1, \dots, X_k; k = 0, 1, \dots)$ の同時分布を

$$\text{Prob}\{X_0 = \alpha_0, X_1 = \alpha_1, \dots, X_k = \alpha_k\} = p\Pi(\alpha_0)A\Pi(\alpha_1)A \cdots A\Pi(\alpha_k)q$$

のように書くことができる時に言う。

この定義よりただちに、陰 Markov 過程や Markov 連鎖は線形従属過程であることが分かる。行列 A やベクトル p や q は非負でないかもしれないことに注意しよう。(本稿では触れないが、実際、線形従属過程ではあるが陰 Markov 過程ではない確率過程の例が知られており、その例においては、行列 A 等として非負な物を選ぶことが不可能である。)

逆に、一般に 4 つ組 (A, p, q, Π) が与えられた場合には、量

$$p\Pi(\alpha_0)A\Pi(\alpha_1)A \cdots A\Pi(\alpha_k)q \quad (k = 0, 1, \dots)$$

が、ある線形従属過程 $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の同時分布の性質を持つとは限らないのはもちろんである。

簡単な為に、

$$g(\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k; A, p, q, \Pi) := p\Pi(\alpha_0)A \cdots \Pi(\alpha_k)q$$

と書くことにする。 $g(\cdot; A, p, q, \Pi)$ は \mathcal{A}^* から実数 \mathbf{R} への関数であり、4 つ組 (A, p, q, Π) によって定まるようなものになっている(ただし、空列 $\Lambda \in \mathcal{A}$ における g の値は pq であると定義する)。

さて、この後の議論で必要になる事実を列挙しておこう:

事実 2. ([3], [5]) 関数 $g(\cdot; A, p, q, \Pi)$ が恒等的に零ではない 4 つ組 (A, p, q, Π) に関しては, 次の 2 つの条件 (P0'), (P0) は同値:

$$(P0') \quad g(\cdot; \tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi}) = g(\cdot; A, p, q, \Pi) \\ \Rightarrow \dim \tilde{A} \geq \dim A.$$

(P0) ['可制御性' と '可観測性']

$$\dim \text{span}\{p\Pi(\alpha_0)A \cdots \Pi(\alpha_k) \mid k = 0, 1, \dots; \alpha_i \in \mathcal{A}\} \\ = \dim \text{span}\{\Pi(\alpha_0)A \cdots \Pi(\alpha_k)q \mid k = 0, 1, \dots; \alpha_i \in \mathcal{A}\} = \dim A.$$

(ただし, 上で, 正方行列 A のサイズを $\dim A$ で表した.)

事実 2 より, 関数 $g(\cdot; \tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi})$ が恒等的に零ではない任意の 4 つ組 $(\tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi})$ に対して

$$g(\cdot; \tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi}) = g(\cdot; A, p, q, \Pi)$$

かつ (P0) を満たす 4 つ組 (A, p, q, Π) が存在することになる. 次の事実 3 で述べるようにこのような (A, p, q, Π) は一意でないが, その次元は一意に定まる.

$$\text{rank } g(\cdot; \tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi}) := \dim A$$

と定義し, $g(\cdot; \tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi})$ の階数と呼ぶ (ただし, 関数 g が恒等的に零の場合には $\text{rank } g = 0$ と定めることにする). これは, 文献 [5] で言う, 線形従属過程の rank_R に等しい. 一般に, 有限集合上の離散時間確率過程の測度 μ に対して階数 $\text{rank } \mu$ が定義できる. つまり, μ が線形従属過程の場合はその階数で, 線形従属過程ではない場合は $+\infty$ で定義するというわけである.

事実 3. ([3], [5]) 条件 (P0) を満たすような 2 個の 4 つ組 (A, p, q, Π) , $(\tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi})$ が

$$g(\cdot; A, p, q, \Pi) = g(\cdot; \tilde{A}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\Pi})$$

を満たすならば, $n (= \dim A)$ 次の正則行列 S が存在して

$$\Pi(\alpha)S = S\tilde{\Pi}(\alpha) \quad (\alpha \in \mathcal{A}), \\ AS = S\tilde{A}, \quad pS = \tilde{p}, \quad q = S\tilde{q}$$

が成り立つ.

事実 4. 正定数 c をうまくとれば, $cg(\cdot; A, p, q, \Pi)$ によって, ある線形従属過程 $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の同時分布を

$$\text{Prob}\{X_0 = \alpha_0, X_1 = \alpha_1, \dots, X_k = \alpha_k\} = cg(\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k; A, p, q, \Pi) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

のように表すことができる.

⇕

次の (P1), (P2) が成り立つ:

$$(P1) \quad (A - I)q = 0 \quad [\text{確率過程の整合性}], \\ (P2) \quad pq > 0, \quad g(\cdot; A, p, q, \Pi) \geq 0 \quad [\text{非負性}].$$

実数を成分とする n 次元縦ベクトルの空間を \mathbf{R}^n と書くことにする. \mathbf{R}^n はその加法に関して単位的半群をなしていると考えられることもできる. \mathbf{R}^n の空でない部分集合 C が凸錐であるとは,

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C; \lambda, \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in C$$

が成り立つことと定義する. 凸錐 C は, \mathbf{R}^n の, (加法に関する) 部分単位的半群でもある.

容易に分かるように, \mathbf{R}^n の任意の部分集合 D はそれを含むような最小の凸錐を持つ. この凸錐のことを $\text{cone } D$ で表す.

次の簡単な補題が, 後の議論で重要である.

補題 5. 4 つ組 $(A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi)$ に対して, (P2) の条件は次の 3 つの条件 (C1)–(C3) を満たすような $C \subseteq \mathbf{R}^n$ の存在と等価:

- (C1) $\mathbf{q} \in C, \mathbf{p}\mathbf{q} > 0,$
- (C2) $\mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{p}\mathbf{x} \geq 0,$
- (C3) $AC \subseteq C, \Pi(\alpha)C \subseteq C (\alpha \in A).$

証明: 4 つ組が (P2) を満たすと仮定する.

$$C := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g(\cdot; A, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \Pi) \geq 0\}$$

と置けば直ちに (C1), (C2) が分かる. (C3) は, 任意の $\mathbf{x} \in C$ について

$$g(\alpha_0 \cdots \alpha_k; A, \mathbf{p}, \Pi(\beta)\mathbf{x}, \Pi) = \delta_{\beta\alpha_k} g(\alpha_0 \cdots \alpha_k; A, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \Pi) \geq 0$$

と,

$$g(\alpha_0 \cdots \alpha_k; A, \mathbf{p}, A\mathbf{x}, \Pi) = \sum_{\alpha \in A} g(\alpha_0 \cdots \alpha_k \alpha; A, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \Pi) \geq 0$$

が成立することにより言える. 逆に 4 つ組に (C1)–(C3) を満たす C が存在と仮定すると, (C1), (C3) より, 任意の $\alpha_0 \cdots \alpha_k \in A^*$ に対し

$$\Pi(\alpha_0)A \cdots \Pi(\alpha_k)\mathbf{q} \in C$$

であり, ここで (C2) を使えば (P2) が導かれる. \square

A や $\Pi(\alpha)$ などは線形写像なので, C が (C1)–(C3) を満たすならば, $\text{cone } C$ も (C1)–(C3) を満たす. したがって, (C1)–(C3) を満たす C としては凸錐だけを考えることにすれば充分である.

3. 同時分布関数の分解と加群の直和分解

さていよいよ, 線形従属過程の分解とは一体何のことなのかを厳密に定義し, 本稿で考えたい問題を正確に述べることにしよう.

定義 6. (P1), (P2) を満たす 4 つ組 $(A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi)$ が与えられたとする (事実 3 によりこの 4 つ組はある線形従属過程を表している). (P1), (P2) を満たす, h 個の 4 つ組 $(A_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j, \Pi_j)$ ($j = 1, 2, \dots, h$) が

$$g(\cdot; A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi) = \sum_{j=1}^h g(\cdot; A_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j, \Pi_j), \quad (3.1)$$

$$\text{rank } g(\cdot; A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi) \geq \sum_{j=1}^h \dim A_j \quad (3.2)$$

を満たすとき, 式 (3.1) のことを $(A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi)$ の表す線形従属過程の分解と言う.

問題. 分解した結果の線形従属過程の個数 h をなるべく大きくしたい. 個数 h を最大にすることができるのか. できるとしたら, 個数最大の分解の仕方は (なんらかの意味で) 一意のか.

式 (3.1) と線形従属過程の階数の定義により,

$$\text{rank } g(\cdot; A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi) \leq \sum_{j=1}^h \text{rank } g(\cdot; A_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j, \Pi_j) \leq \dim \bigoplus_{j=1}^h A_j,$$

が成り立たねばならず, 一方, 式 (3.2) の条件があるので, 結局,

$$\text{rank } g(\cdot; A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi) = \sum_{j=1}^h \text{rank } g(\cdot; A_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j, \Pi_j)$$

が必要である.

すると, 事実 2 によって, (P0) をも満たすような 4 つ組だけに議論を限って構わないと分かる. つまり, (P0)–(P2) を満たすような 4 つ組 $(A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi)$ が与えられたとして, それを (P0)–(P2) を満たす, h 個の 4 つ組 $(A_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j, \Pi_j)$ ($j = 1, 2, \dots, h$) を使った和の形

$$g(\cdot; A, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \Pi) = \sum_{j=1}^h g(\cdot; A_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j, \Pi_j), \quad (3.3)$$

$$\dim A = \sum_{j=1}^h \dim A_j$$

に直すことだけを考えれば良いことになる.

一般に, たくさんの行列で記述されたシステムの分解を考える際には, 行列を作用とする加群を考えて分解すると, うまくいくことが知られている [4]. そこでこの節の以下の部分では, まず行列 A や $\Pi(\alpha)$ を作用とする加群を導入し, その後で同時分布関数に関する分解と加群の分解の関係を明らかにしよう. (なお, 加群に関する教科書としては [8] がある.)

定義 7. $M = \mathbf{R}^n$ を次のやり方で加群にする:

- $|A| + 1$ 個の非可換な不定元の集合を

$$\Sigma = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_\nu\}$$

とし, Σ の生成する自由単位的半群 (半群の演算は積で表す) を Σ^* とする. 例えば $z_0 z_1 z_0^2$ や A は Σ^* の元である. 単位的半群 Σ^* は \mathbf{R} 上の半群環

$$\mathbf{R}(\Sigma^*) := \left\{ \sum_{s \in \Sigma^*} c_s s \mid c_s \in \mathbf{R}, \text{有限個の } c_s \text{ 以外は } c_s = 0 \right\}$$

に拡張できる.

- $\mathbf{x} \in M$ への Σ^* の左作用を

$$\begin{aligned} z_0 \mathbf{x} &:= A \mathbf{x}, \\ z_\alpha \mathbf{x} &:= \Pi(\alpha) \mathbf{x} \quad (\alpha \in A) \end{aligned}$$

で定めると, M は自然に $\mathbf{R}(\Sigma^*)$ 加群とみなせる.

$R(\Sigma^*)$ 加群 M は行列 A と $\Pi(\alpha)$ で定まるので、そのことを強調するために $M(A, \Pi)$ と書くことにする。

ところで、文献 [5] では、有限集合上の離散時間確率過程に対して一般に「確率加群」というものを定義した。上で定義した加群は、一見すると、確率加群とは異なるように見えるが実は「確率加群が既約、かつ、実数上有限次元」という場合には「同じ」になることが次のようにしてわかる：確率加群 M に於いては、環 RA^* の作用は ([5] での記法と本稿での記法は少々異なるが、それは $I_\alpha = \Pi(\alpha)$, $P = A$ とすれば合う事に注意して)

$$\alpha x := \Pi(\alpha)Ax \quad (\alpha \in \mathcal{A}, x \in M)$$

として定まっていた。既約性より $\text{Ker } A = 0$ でなければならず、 A^{-1} が存在する。すると、有限性から Cayley-Hamilton の定理が成立し、 A^{-1} は A の多項式で書ける。これは、 $\Pi(\alpha)A$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) の多項式で A と $\Pi(\alpha)$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) が書ける事を意味し、逆も明らかにそうである。つまり、環 $R(\Sigma^*)$ の作用と RA^* の作用を (環の同型の意味で) 同一視できるということになる。この同一視において、文献 [5] に定義した加群とここで定義した加群は自然に同じものとみなせる。

さて、(P0)-(P2) を満たす 4 つ組 (A, p, q, Π) が与えられたとして、加群 $M = M(A, \Pi)$ を作る。 M の、零でない部分加群への直和分解

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_h \quad (3.4)$$

は、行列 A , $\Pi(\alpha)$ の同時ブロック対角化に対応する。対角ブロックを $A_j, \Pi_j(\alpha)$ ($j = 1, 2, \dots, h$) と書こう。直和分解 (3.4) に応じてベクトル p, q も自然に分解され、

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + \cdots + p_h, \\ q &= q_1 + q_2 + \cdots + q_h \end{aligned}$$

と書ける。

ここで得られた 4 つ組 (A_j, p_j, q_j, Π_j) が分解の式 (3.3) を満たすことは、事実 3 を使うことにより、分かる。また、元の (A, p, q, Π) が (P0), (P1) を満たすことから自動的に (P0), (P1) も満たすものになっている。逆に、(3.3) のような分解は必ず加群 $M(A, \Pi)$ の、零でない部分加群への直和分解に対応する。

以上の考察をまとめておこう：

補題 8. 直和分解から得られた (A_j, p_j, q_j, Π_j) が (P2) を満たすならば、同時分布関数の分解の 1 つが得られる。逆に、同時分布関数の分解は、4 つ組 (A_j, p_j, q_j, Π_j) で (P2) を満たすものが得られるような直和分解の 1 つに対応する。

上の補題 8 より、我々の問題を解くためには、ただ単に加群の直和分解を考えるというだけでは駄目であり、その上に (P2) の条件をも考慮する必要があることが分かった。(P2) の条件を加群という代数的枠組の中で捉えやすくするために、以降では加群の直和分解の中でも、「特別なもの」だけを考えることにする (例えば、群論の分野では、組成列を研究する際に、普通の組成列を考える以外にも、特別な組成列 (例えば、主組成列だとか特組成列) を考えたりする。そういうことに倣って、ここでの我々の理論を作っていると思っ貰うと分かりやすいのではないだろうか)。

分かりやすくするために、ここで一旦、問題から離れて、次のような抽象的状況を考える：

環 \mathcal{R} を左からの作用として持つ、零でない、長さ有限の加群 M があつたとする。 \mathcal{R} 加群 M は加法に關し単位的半群なので、 M の部分単位的半群 C を 1 つ固定する。さらに、点 $a \in C$ を 1 つ固定する。

M は、 C と C に含まれる定点 a があると言う“構造”を持った加群である。その“構造”を壊さないようにしながら M を細かく分解したいとする。そのためには、 M の直和分解の中でも特に次のような形の分解だけを考えることにすればよい。

定義 9. 加群 $\mathcal{M}(\neq 0)$ の直和分解

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_h$$

が半群直和分解であるとは、 $\mathcal{M}_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, h$) であり、かつ、この直和分解に沿う射影を \mathcal{M} の自己準同型

$$\text{proj}_j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M} \quad (j = 1, 2, \dots, h)$$

と考えて、任意の j について $\text{proj}_j(a) \in C$ が成り立つときに言う。本稿では、この形の直和分解を通常の直和 \oplus による分解と区別して

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \dot{+} \mathcal{M}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{M}_h$$

と書くことにする。上の直和因子 \mathcal{M}_j ($j = 1, 2, \dots, h$) を \mathcal{M} の半群直和因子と言う。

ここで再び、抽象論から離れて、もとの問題に戻ろう。

(P0)–(P2) を満たす 4 つ組 (A, p, q, Π) に対し、 $\mathbf{R}\langle \Sigma^* \rangle$ 加群 $M = M(A, \Pi)$ と (M の加法に関する) 部分単位的半群

$$C = \{x \in M \mid g(\cdot; A, p, x, \Pi) \geq 0\}$$

と C の点 q を考える。ここで定義した C のことを、それが A, p, Π に依存して定まることを強調するため、 $C(A, p, \Pi)$ とも書く。

$q \in C(A, p, \Pi)$ なる構造を考慮した、 M の半群直和分解を

$$M = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \cdots \dot{+} M_h$$

とし、この直和分解によって得られる 4 つ組を (A_j, p_j, q_j, Π_j) ($j = 1, 2, \dots, h$) とする。

次の定理が成り立つ:

定理 10. 半群直和分解から得られた 4 つ組 (A_j, p_j, q_j, Π_j) は同時分布関数の分解の 1 つを与える。逆に、同時分布関数の分解は半群直和分解の 1 つに対応する。

証明: 前半は、半群直和分解から得られた (A_j, p_j, q_j, Π_j) が (P2) を満たすことが言えよ。そのために、

$$C := C(A, p, \Pi) \cap M_j$$

が (C1)–(C3) を満たすことを言えよ。また、 $q_j \in C$, $p_j q_j \geq 0$ も明らかなので、 $p_j q_j = 0$ を仮定してみると、

$$0 \leq p_j \Pi_j(\alpha_0) A_j \cdots \Pi_j(\alpha_k) q_j \leq p_j q_j = 0$$

なので、 $M_j \neq 0$ に反する。

後半は、同時分布関数が分解できたとすると、4 つ組 (A_j, p_j, q_j, Π_j) には (C1)–(C3) を満たすような凸錐 C_j が必ず存在する。そして、 $C(A, p, \Pi)$ の定義から

$$q_j \in C_j \subseteq C(A, p, \Pi)$$

なので、確かに半群直和分解になっている。□

第 6, 7 節に於いては、(エルゴード分解のような) 確率空間としての分解と区別する為に、ここで定義した半群直和分解の事を“状態空間の直和分解”と呼ぶことがある。

4. 半群直和分解のなす上半束

前節の定理 1 で、同時分布関数の分解と半群直和分解が同じものであることがわかった。確率過程の正值性とか整合性とかの諸条件を、代数構造の中に取り込むことに成功したわけである。だから、これ以後は、もっぱら半群直和分解の性質を調べ、もともとの条件 (P0), (P1) 等をいちいち振り返らない。以下では、 $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Sigma^*)$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A, \Pi)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, p, \Pi)$, $a = q$ とし、抽象的に議論を進めることにする。

\mathcal{M} の半群直和因子 \mathcal{M}' が、2 個以上の半群直和因子の直和に書けないとき、半群直既約であると言う。 \mathcal{M} の半群直和分解

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \dot{+} \mathcal{M}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{M}_h$$

で、全ての \mathcal{M}_j ($j = 1, 2, \dots, h$) が半群直既約であるとき、半群直既約分解と言う。

同時分布関数の一番細かい分解を望む時、半群直既約分解から得られる分解こそそれにふさわしい。しかしながら、次の事実が知られている:

事実 11. \mathcal{M} に 2 つの半群直既約分解が存在するとき、同値であるとは限らない。(ただし、加群 \mathcal{M} の 2 つの直和分解

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_h,$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}'_1 \oplus \mathcal{M}'_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}'_{h'}$$

が同値であるとは、 $h = h'$ かつ $\{1, 2, \dots, h\}$ の置換 σ が存在して、

$$\mathcal{M}_j \simeq \mathcal{M}'_{\sigma(j)}$$

が成立することを言う(ただし、 \simeq は加群の同型を表す。)

事実 11 が述べているように、半群直既約分解は一意的でない(分解の長さ h すら一意的ではない)ので、同時分布関数の‘なるべく細かい分解’にもしも一意性を要請したいならば、残念ながら不適格となってしまう。

そこで以下では、半群直和分解の全体の構造を調べ、それが上半束をなすことをまず示し、その構造を利用することにより、半群直既約分解に替わる次善の分解(正準半群直和分解)を提案してみたい。(なお、束に関する教科書としては [1] がある。)

加群 \mathcal{M} の 1 つの半群直和分解

$$\Delta: \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \dot{+} \mathcal{M}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{M}_h$$

に同値な半群直和分解の全体を $\mathcal{E}(\Delta)$ と書く。

定理 12.

$$\mathcal{L} := \{\mathcal{E}(\Delta) \mid \Delta \text{ は } \mathcal{M} \text{ の半群直和分解}\}$$

に次のやり方で‘結び’の演算 \vee を定義すると上半束になる:

$\mathcal{E} \in \mathcal{L}$ は、 $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{L}$ の両方を細分として持つとする。そのような \mathcal{E} の中で一番細かいものを $\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2$ とする。(ただし、 $\mathcal{E} \in \mathcal{L}$ が $\mathcal{E}' \in \mathcal{L}$ の細分であるとは、ある $\Delta \in \mathcal{E}$ と $\Delta' \in \mathcal{E}'$ が存在して、

$$\Delta: \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \dot{+} \mathcal{M}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{M}_h,$$

$$\Delta': \mathcal{M} = \mathcal{M}'_1 \dot{+} \mathcal{M}'_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{M}'_{h'}$$

とするとき, $\{1, 2, \dots, h\}$ の置換 σ と $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{h'-1} \leq h$ をうまくとれば

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_1 &= \mathcal{M}_{\sigma(1)} \oplus \mathcal{M}_{\sigma(2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_{\sigma(s_1)}, \\ \mathcal{M}'_2 &= \mathcal{M}_{\sigma(s_1+1)} \oplus \mathcal{M}_{\sigma(s_1+2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_{\sigma(s_2)}, \\ &\vdots \\ \mathcal{M}'_{h'} &= \mathcal{M}_{\sigma(s_{h'-1}+1)} \oplus \mathcal{M}_{\sigma(s_{h'-1}+2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_{\sigma(h)}, \end{aligned}$$

が成立することを言う.)

証明: 上で定義した演算 \vee が well-defined であることを言えば良い.

加群 \mathcal{M} は長さ有限であることを仮定しているので, 直既約分解を持ち, 同値なものを同一視すれば, 直既約分解は一意的である (Krull-Remak-Schmidt の定理). したがって, \mathcal{M} の直和分解の全体は (同値な分解は同一視することにとすると) 分割束 (partition lattice) とみなすことができる. この分割束を $\tilde{\mathcal{L}}$ と書くと, $\mathcal{L} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$ である. $\tilde{\mathcal{L}}$ の '結び' の演算は \mathcal{L} 上では, さきほど定義した \vee に一致する. 従って演算 \vee は well-defined であり, \mathcal{L} は上半束になる. \square

上の事実を用いて, 次のように '正準半群直和分解' を定義しよう:

定義 13. (P0)-(P2) を満たす 4 つ組 (A, p, q, Π) に対し, $\mathbf{R}\langle \Sigma^* \rangle$ 加群 $M(A, \Pi)$, 部分単位的半群 $C(A, p, \Pi)$, 点 $q \in C(A, p, \Pi)$ を考える. $M(A, \Pi)$ の半群直既約分解が属する同値類全ての結び

$$\bigvee_{\Delta} \mathcal{E}(\Delta) \quad (\Delta \text{ は半群直既約分解全体を走る})$$

の元を, 正準半群直和分解 と呼ぶ.

定義より直ちに次のことがわかる:

- ・ 正準半群直和分解は (同値な分解を同一視するとき) 一意的である.
- ・ 半群直既約分解が一意的に定まる場合は, 正準半群直和分解と一致する.
- ・ 一般の場合には, 正準半群直和分解は必ずしも半群直既約分解ではない.

5. Heller の分解について

Heller は [2] において, 有限集合上の一般の離散時間確率過程の分解について論じている. この節では, Heller の結果を, 線形従属過程に対して応用し, 我々の記法で書いて見て, その意味するところを考察する.

定義 14. 左 $\mathbf{R}\langle \Sigma^* \rangle$ 加群 $M = M(A, \Pi)$ の部分集合 K が 順序づけ (ordering) であるとは, K が零でない線形空間を含まないような閉凸錐であるときに言う. 組 (M, K) のことを 順序づけられた加群 と呼ぶ.

2 つの順序づけられた加群 $(M, K), (\tilde{M}, \tilde{K})$ の間の射 (morphism) F を

$$\begin{aligned} F: M &\rightarrow \tilde{M} \quad (\text{加群の射}), \\ F(K) &\subseteq \tilde{K} \end{aligned}$$

を満たすものとして定義する. (つまり, 例えば, 自己準同型 (endomorphism) F は加群の自己準同型 $F: M \rightarrow M$ で, かつ, $F(K) \subseteq K$ を満たすもののであるし, 自己同型 (automorphism) E は加群の自己同型で, かつ, $E(K) = K$ を満たすものであることになる.)

定義 15. 順序づけられた加群 (M, K) の直和分解

$$(M_1, K_1) \oplus (M_2, K_2)$$

を

$$\begin{aligned} M &= M_1 \oplus M_2 \quad (\text{加群の直和}), \\ K &= K_1 \oplus K_2 := \{x + y \mid x \in K_1, y \in K_2\} \end{aligned}$$

で定義する. 零でない (M, K) が自明な直和分解以外の直和分解を持たないとき, 直既約であると言い, 全ての直和因子が直既約であるような分解のことを直既約分解と言う.

(P0) を満たす 4 つ組 (A, p, q, Π) から左 $\mathbf{R}\langle \Sigma^* \rangle$ 加群 $M = M(A, \Pi)$ を作る. さらに, 順序づけ $K \subseteq M(A, \Pi)$ を 1 つ固定する. このとき, 次の分解定理 (Heller は ‘Strong Krull-Schmidt Theorem’ と呼んでいる) が証明される:

定理 16. 順序づけられた $\mathbf{R}\langle \Sigma^* \rangle$ 加群 (M, K) の 2 つの直既約分解を

$$\begin{aligned} \Delta : (M, K) &= (M_1, K_1) \oplus (M_2, K_2) \oplus \cdots \oplus (M_h, K_h), \\ \Delta' : (M, K) &= (M'_1, K'_1) \oplus (M'_2, K'_2) \oplus \cdots \oplus (M'_{h'}, K'_{h'}) \end{aligned}$$

とすると, Δ と Δ' は同値, つまり, $h = h'$ であり, $\{1, 2, \dots, h\}$ の置換 σ が存在して

$$(M_j, K_j) = (M'_{\sigma(j)}, K'_{\sigma(j)})$$

が成り立つ.

証明は原論文を参照すれば良いので, 省略する (この定理の主張自体は疑いなく正しい).

Heller は [2] で上の定理を証明したあと, それを次のようにして確率過程の分解に応用した:

「(P0)-(P2) を満たす 4 つ組 (A, p, q, Π) に対し, 左 $\mathbf{R}\langle \Sigma^* \rangle$ 加群 $M = M(A, \Pi)$ を考え, さらに順序づけ K を

$$\begin{aligned} K &= \overline{\text{cone}\{\Pi(\alpha_0)A\Pi(\alpha_1)\cdots\Pi(\alpha_k)\mathbf{q}\}} \\ &\quad (k = 0, 1, \dots; \alpha_i \in \mathcal{A}) \end{aligned}$$

と置き, (M, K) を分解すればよい (ただし, $\overline{\quad}$ は閉包を表す.)

確かに, 上の方法によって, 線形従属過程を線形従属過程の和に分解することはできる. つまり, 詳しく言うと,

- ・ 順序づけられた加群の直既約分解によって, もとの線形従属過程を和のかたちに直すことができ, 分解された結果の 1 つ 1 つは, やはり線形従属過程になっている

と言える.

しかしながら, 定理 16 で言えた大切な内容のはずの “もうこれ以上分解できないようにできて, その分解の仕方は一意である” ということと, “線形従属過程の分解がもうこれ以上できない” ということは一般には関係がない. なぜなら, Heller の分解は, 凸錐

$$K = \overline{\text{cone}\{\Pi(\alpha_0)A\Pi(\alpha_1)\cdots\Pi(\alpha_k)\mathbf{q}\}}$$

を唯一無二の物として絶対視し、定義 15 により、その‘面に沿った’方向への直和分解だけを考えていることに相当するからである。

くどいかもしれないが、上のこの意味をもう少しだけ確認しておこう：上で用いる順序づけ K は確かに (A, p, q, Π) にとっては唯一の物（我々の言葉で言うと (C1)–(C3) を満たす最小の閉凸錐）である。しかし、線形従属過程 (A, p, q, Π) がもっと小さな線形従属過程の和に分解できるときに、この最小閉凸錐 K が自動的に閉凸錐の和に分解されるという保証はいったいどこにあるのだろうか？実は、そんな保証が一般にないことは例を作ってやると分かるのである。（この保証がないということは、(1) 「最小の閉凸錐の和は閉凸錐ではあるが、その際に最小性は遺伝しない」という比較的すぐに得られる事実からも納得できるであろうし、(2) 最小の閉凸錐 K よりも大きな閉凸錐 K' で (C1)–(C3) を満たす物がある場合に、順序づけられた加群 (M, K') の直和分解を作ってやるとそれは線形従属過程の分解の 1 つになってしまうことから分かるだろう。）

以上をまとめると、次の様になる。

事実 17. Heller の意味で直既約なのに、線形従属過程を（定義 6 の意味で）分解できるような例がある。

ちなみに、我々の分解は、(C1)–(C3) を満たす凸錐の中で一番大きな物 $C(A, p, \Pi)$ を考え、必ずしも $C(A, p, \Pi)$ の‘面に沿うとは限らない’（しかし、 $q \in C(A, p, \Pi)$ という構造は壊さない）分解を考えている事に相当する。この様に考えるということは、換言すれば、(C1)–(C3) を満たすような全ての凸錐を同時にうまく考慮に入れていることに他ならない（Heller 流の分解を (C1)–(C3) を満たすような任意の凸錐に関して全て考えて見たと言うことにも相当する）。

結論として、Heller の定理 16 は、 K を固定したときの順序づけられた加群の分解の一意性を示している定理としての意味はあるが、確率過程の分解という観点からは、最小の K というものに意味が見い出せない以上、全く役に立たない定理であると言える。

6. 定常線形従属過程の分解

A 上の離散時間確率過程 $\{X_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ が定常である時、その確率空間を幾つかのエルゴード確率空間の直和の形に一意に分解できる事（エルゴード分解）が良く知られている [6],[7]。本節では「定常な線形従属過程」のみを取り扱い、正準分解とエルゴード分解の関係を論ずる。

有限集合 A の要素の両側無限列の集合を

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} := \{\dots x_{-1}x_0x_1\dots \mid x_i \in A \ (i \in \mathbb{Z})\}$$

で表す。 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ の部分集合で

$$\{\dots x_{-1}x_0x_1\dots \mid x_{-k} = \alpha_{-k}, \dots, x_0 = \alpha_0, \dots, x_k = \alpha_k\} \\ (k = 1, 2, \dots; \alpha_{-k}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_k \in A)$$

と言う形の物（柱集合）の全体から生成される σ 加法族を \mathfrak{F}_A と書く。 σ 加法族 \mathfrak{F}_A 上に確率測度 μ を与えて定まる確率空間を $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A, \mu)$ とする。

定義 18. 確率空間 $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A, \mu)$ が定常であるとは、確率測度 μ が $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 上の推移変換 T の下で不変な時、すなわち、任意の $E \in \mathfrak{F}_A$ に対して $\mu(E) = \mu(TE)$ が成り立つ時に言う。

（ただし推移変換 T は、

$$\begin{cases} \dots \beta_{-1}\beta_0\beta_1\dots = T(\dots \alpha_{-1}\alpha_0\alpha_1\dots), \\ \beta_k = \alpha_{k-1} \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots) \end{cases}$$

で定義される変換である。）

以下、本稿の終りまでの議論で、確率空間と言えば定常な確率空間の事であるから、一々断らない。

定義 19. 確率空間 $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A, \mu)$ がエルゴード的であるとは、 $TE = E$ となる任意の $E \in \mathfrak{F}_A$ に対して $\mu(E) = 0$ または $\mu(E) = 1$ が成り立つ時に言う。

一般の線形従属過程の定義 (文献 [5]; Definition 4) より、線形従属過程に定常性を要請すると、次が成り立つことはすぐ分かる。

事実 20. 確率空間 $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A, \mu)$ が定常な線形従属過程であるとは、

- ・ 実数の $n \times n$ 行列 A と、
- ・ 実数の n 次横ベクトル p で $pA = p$ なる物と、
- ・ 実数の n 次縦ベクトル q で $Aq = q$ なる物と、
- ・ 実数の $n \times n$ 射影行列の組 $\Pi := \{\Pi(\alpha)\}_{\alpha \in A}$
(ただし Π は $\Pi(\alpha)\Pi(\beta) = \delta_{\alpha\beta}\Pi(\alpha)$ かつ $\sum_{\alpha \in A} \Pi(\alpha) = I$ を満たす事; $\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタ, I は単位行列)

を用いて、任意の柱集合

$$E = \{\dots x_{-1}x_0x_1\dots \mid x_{-k} = \alpha_{-k}, \dots, x_0 = \alpha_0, \dots, x_k = \alpha_k\}$$

$$(k = 1, 2, \dots; \alpha_{-k}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_k \in A)$$

の測度が

$$\mu(E) = p\Pi(\alpha_{-k})A \cdots \Pi(\alpha_0)A \cdots \Pi(\alpha_{k-1})A\Pi(\alpha_k)q$$

の様に見える時に言う。

上の様に定めた $\mu(E)$ が定義 18 の意味で定常である事は容易に確かめられる。以下、本稿が終るまでの議論では、線形従属過程 (あるいは、陰 Markov 過程や Markov 連鎖) といえば定常な物しか考えないので定常である事を一々断らない。

さて、確率空間 $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A, \mu)$ に事実 20 の条件を満たす A, p, q, Π が存在する時、さらに (P0) の条件をも満たす様な $n' (\leq n)$ 次元の A', p', q', Π' が存在することは、定常でない場合と全く同様である。

定常線形従属過程に関しても、定常でない (片側無限列上の) 線形従属過程と全く同様に、その分解を考えることができる。この際、新たに考慮すべき条件は、事実 20 に於ける定常性の条件 $pA = p$ だけであるが、この条件は、半群直和分解を考える際に、明らかに直和因子に遺伝するので、考慮する必要がないのである (従って、全く同様の議論が展開できることにもなるのだった)。

7. エルゴード分解と正準分解

定義 21. 区間 $[0, 1]$ 上の Lebesgue 確率測度 ν と、ほとんど全ての $x \in [0, 1]$ に対応して定まる確率空間 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ とで

$$\mu(E) = \int_{[0,1]} \nu_x(E \cap \Omega_x) d\nu(x) \quad (E \in \mathfrak{F}_A)$$

と書けた時、 $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A, \mu)$ は確率空間の直和に分解されたと言う。

(ただし、 $\Omega_x \subseteq \Omega$ であり、 \mathfrak{F}_x は \mathfrak{F}_A の Ω_x への制限、 $\Omega_x \cap \Omega_y = \phi$ ($x \neq y$) とする。また、確率空間 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ としては、ここでも定常な確率空間だけを考えている。つまり、 $\nu_x(\cdot \cap \Omega_x)$ を $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}_A)$ の確率測度と見做した時に定常であるとしている。)

以降で出てくる確率空間の直和分解については、ほとんど全ての直和因子 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ に関して成り立つ性質だけを常に問題にするので、一々「ほとんど全ての $x \in [0, 1]$ で」等と断らない。

次の定理は有名である。

定理 22. (エルゴード分解) 確率空間 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \mu)$ を確率空間 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ の直和に分解する時、一番細かい分解が本質的に 1 つ定まり、各 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ はエルゴード的。

確率空間 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \mu)$ が Markov 連鎖の時、定理 22 の積分は有限和になり、遷移グラフの強連結成分分解と同等である。

さて、定常線形従属過程の分解に関する基本的な結果を述べよう：

定理 23. 線形従属過程の確率空間の直和分解は状態空間の直和分解でもある。特に、確率空間の直和分解の式における積分は、有限和である。

証明: 線形従属過程 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \mu)$ の確率空間の直和分解を

$$\mu(E) = \int_{[0,1]} \nu_x(E \cap \Omega_x) d\nu(x) \quad (E \in \mathfrak{F}_A)$$

とすると、各 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ は線形従属過程でなければならない。何故なら、 $\nu(S) = 0$ なる任意の $S \subseteq [0, 1]$ に対し、 $y \notin S$ が存在して $\text{rank } \nu_y = +\infty$ が成立と仮定すると、 \mathfrak{F}_y の要素の無限列 U_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) が選べて $\nu_y(U_i)$ の全てを記述する様な有限次元の行列やベクトルが存在しない事になる。すると $\mu(U_i)$ の全てを記述する様な有限次元の行列やベクトルも存在しない事になり、 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \mu)$ が線形従属過程である事に反するからである。

また、 Ω_x が A^Z の分割に成っている事から、 $\text{rank } \mu$ は $\text{rank } \nu_x$ の和であり、したがって、積分は有限和以外ではあり得ない。すると直和因子 $(\Omega_x, \mathfrak{F}_x, \nu_x)$ を状態空間の直和因子 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \nu_x(\cdot \cap \Omega_x))$ と、自然なやり方で見做せる事になる。□

特に線形従属過程のエルゴード分解は、確率空間の直和分解の 1 つだから状態空間の直和分解であると分かる。

定理 23 の逆は一般に成り立たない。

補題 24. 状態空間の直和分解 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \mu_i)$ ($i = 1, 2, \dots, h$) が確率空間の直和分解でもあるための必要十分条件は、 $\mu_i(S_i) = 0$ なる $S_i \in \mathfrak{F}_A$ で $S_i^C \cap S_j^C = \phi$ ($i \neq j$) なる物が存在する事である。(ただし C は A^Z における補集合を表す。)

証明: 必要条件であることは確率空間の直和分解の定義より明らか。

逆に、補題の条件が成立とすると、 μ_i の台が交わらないので、 A^Z は S_i^C で分割される事になる。従って、 $\nu_i := \mu_i$, $\Omega_i := S_i^C$, \mathfrak{F}_i を \mathfrak{F}_A の S_i^C への制限とすれば、 $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, \nu_i)$ は確率空間の直和分解になっている。□

定理 25. 線形従属過程のエルゴード分解の定める状態空間の直和分解は、正準分解の粗分である。

証明: 線形従属過程 $(A^Z, \mathfrak{F}_A, \mu)$ の状態空間の直和分解の全体を \mathcal{L} と書く。 \mathcal{L} は上半束を成す (定理 12)。線形従属過程の確率空間の任意の直和分解

$$\mu(E) = \sum_x \nu(x) \nu_x(E \cap \Omega_x) \quad (\text{有限和})$$

の定める状態空間の直和分解が, \mathcal{L} の任意の極小元

$$\mu = \sum_{i=1}^h c_i \mu_i \quad (c_i > 0)$$

の粗分になっている事を示そう.

補題 24 の証明と同じ記号で, 各 μ_i の台を S_i^C と書く. 今, 或る Ω_x が S_i^C ($i = 1, 2, \dots, h$) の幾つかの合併で書けないとすると, S_j^C が存在して,

$$\begin{aligned} U_1 &:= \Omega_x \cap S_j^C, & U_1 &\neq \phi, \\ U_2 &:= \Omega_x^C \cap S_j^C, & U_2 &\neq \phi \end{aligned}$$

となる. 分割 $S_j^C = U_1 \cup U_2$ に対応して, μ_j も U_1, U_2 を台とする確率測度の凸線形和の形に書ける事に成るが, これは μ_j が \mathcal{L} の極小元の直和因子であると言う仮定に矛盾する. 従って, 任意の Ω_x は S_i^C の幾つかの合併で書け, 換言すれば, 確率空間の任意の直和分解は \mathcal{L} の任意の極小元の粗分と言う事になる. 特に, エルゴード分解は \mathcal{L} の任意の極小元の粗分でなければならない事になる.

すると, \mathcal{L} の極小元の共通粗分を正準分解と定義したのだから, エルゴード分解は正準分解の粗分でなければならない. \square

参考文献

- [1] M. Aigner, *Kombinatorik, I. Grundlagen und Zähltheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [2] A. Heller, "Probabilistic automata and stochastic transformations," *Math. Systems Theory*, vol. 1, pp. 197-208, 1967.
- [3] H. Ito, S. Amari and K. Kobayashi, "Identifiability of hidden Markov information sources and their minimum degrees of freedom," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, pp. 324-333, 1992.
- [4] H. Ito, S. Iwata and K. Murota, "Block-triangularizations of partitioned matrices under similarity / equivalence transformations," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 15, pp. 1226-1255, 1994.
- [5] H. Ito, "Discrete time stochastic processes on finite sets and stochastic modules," *Proc. of the Fourteenth Symposium on Applied Functional Analysis — Information Theory and Related Topics* — (Edited by H. Umegaki), pp. 99-112, 1995.
- [6] N. Kryloff et N. Bogoliouboff, "La Théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire," *Ann. of Math.*, vol. 38, pp. 65-113, 1937.
- [7] J. O. Oxtoby, "Ergodic sets," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 58, pp. 116-136, 1952.
- [8] 山崎圭次郎, 環と加群, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 東京, 1990.