数理解析研究所講究録
976 巻 1997 年 13-26

NDK における自然な証明についての考察

京産大理学部　八杉 満利子 (Mariko Yasugi)
京産大理学研究科　中田 昌宏 (Masahiro Nakata)

本稿は、[1] および [3] で提案された一階の古典論理の体系 NDK における自然な証明についての報告である。体系 NDK のひとつの特徴は、証明の短さにある。その状況は [3] で述べている。

大芝は、[2] において自動証明により得られた証明から、人にとって自然な証明への変換を与えた。これは、cut-free proof から、自然な場合分けによる証明を（元の証明の構造を保存するように）生成するものである。

また NDK においては、critical な推論と呼ばれる不自然な推論が行なわれることがある。そこで、大芝の着想にもとずく変換により、この様な推論を持つ deduction を自然な deduction へ変換することを目的とする。

1　The system of NDK

構成的論理 NJ の古典論理への１つの拡張として NDK を定義する。$A, B, \cdots$ で formula を、$\Gamma, \Delta, \cdots$ で formula 又は空なものを表す。また、deduction を表す記号として、$P_1, P_2, \cdots$ を用いる。

1.1　Disjunctive component

formula A の disjunctive component(d.c.) を次で定義する。

1. A が atomic のとき、A の d.c. は A 自身
2. A が $B \wedge C, B \supset C, \neg B, \forall x B, \exists x B$ のとき、A の d.c. は A 自身
3. A が $B \vee C$ のとき、A の d.c. は B の d.c. 及び C の d.c. 及び A 自身

1.2　Inference rule

NDK の推論規則を、次で与える。(I は introduction を、E は elimination を表す。) NDK では前提となる formula の d.c. の１つに推論規則を適用することができる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor A\lor\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor B\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor(A\land B)\lor\Delta}\land I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor(A_1\land A_2)\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor A_i\lor\Delta}\land E \quad (i=1,2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor A_i\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor(A_1\lor A_2)\lor\Delta}\lor I \quad (i=1,2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor(A\lor B)\lor\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}[A:a]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B:b]\\ \vdots\\ C\end{array}}{\Gamma\lor C\lor\Delta}(a,b)-\lor E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A:a]\\ \vdots\\ \Gamma\lor B\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor(A\supset B)\lor\Delta}(a)-\supset I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor A\lor\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Pi\lor(A\supset B)\lor\Lambda\end{array}}{\Gamma\lor\Pi\lor B\lor\Delta\lor\Lambda}\supset E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A:a]\\ \vdots\\ \Gamma\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor\neg A\lor\Delta}(a)-\neg I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor A\lor\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Pi\lor\neg A\lor\Lambda\end{array}}{\Gamma\lor\Pi\lor\Delta\lor\Lambda}\neg E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor A\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor\forall xA\lor\Delta}\forall I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor\forall xA\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor A[t/x]\lor\Delta}\forall E$$

(*eigenvariable condition*)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor A[t]\lor\Delta\end{array}}{\Gamma\lor\exists xA\lor\Delta}\exists I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\lor\exists xA\lor\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}[A:a]\\ \vdots\\ B\end{array}}{\Gamma\lor B\lor\Delta}(a)-\exists E$$

(*eigenvariable condition*)

特に$\Gamma,\Delta,\Pi,\Lambda$の全てが空ではない推論を classical な推論と呼ぶ。更に空な前提から任意の formula を導く contradiction rule を加える。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \hline \end{array}}{A}\,Con$$

この空な前提は classical でない推論$\neg E$によってのみ得られる。

1.3 Eigenvariable

NJ, NK と同様に、推論 $\forall I, \exists E$は次の eigenvariable condition を満たす。$\forall I$において、x は assumption 及びΓ, Δに自由に現れない。$\exists E$において、x は $[A : a]$ 以外 Bへの deduction の assumption 及び Bに自由に現れない。

2 Comparing NDK with NK

本節では、NDK と NK が論理的に同等となることを見る。NK は NDK の部分体系であることは明らかである。(排中律は$\neg I$を用いて演繹できる。) 以下で、NDK が NK の部分体系となることを見る。

2.1 Lemma

NK において $A \vee B$及び$\neg A$ がそれぞれ assumption の有限集合 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$から演繹されるとき、$B$を $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ より排中律を用いずに演繹することができる。

[証明]

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{A}_1\\ \vdots\\ A \vee B\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[A:1] \quad \begin{array}{c}\mathcal{A}_2\\ \vdots\\ \neg A\end{array}}{}}{B} \qquad [B:2]}{B}\ (1,2)$$

2.2 Theorem

NDK は NK の部分体系である。

[証明] NDK-deduction Pの最後の推論 $\mathcal{I}$に関する帰納法で示す。

$\mathcal{I}$が$\wedge I$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee B \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta}$$

と表すことができ、これは NK において次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta\\ \vdots\\ \Gamma \vee \Delta \vee A\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Gamma \vee \Delta : 1]\\ \vdots\\ \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta\end{array} \quad Q}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta}\ (1,3)$$

ただしQは次の deduction である。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vee B\vee\Delta\\ \vdots\\ \Gamma\vee\Delta\vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Gamma\vee\Delta:2]\\ \vdots\\ \Gamma\vee(A\wedge B)\vee\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{[A:3]\quad[B:4]}{A\wedge B}\\ \vdots\\ \Gamma\vee(A\wedge B)\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee(A\wedge B)\vee\Delta}\,(2,4)$$

$\mathcal{I}$が$\wedge E$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vee(A_1\wedge A_2)\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee A_i\vee\Delta}\quad(i=1,2)$$

と表すことができ、これはNK において次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vee(A_1\wedge A_2)\vee\Delta\\ \vdots\\ \Gamma\vee\Delta\vee(A_1\wedge A_2)\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Gamma\vee\Delta:1]\\ \vdots\\ \Gamma\vee A_i\vee\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{[A_1\wedge A_2:2]}{A_i}\\ \vdots\\ \Gamma\vee A_i\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee A_i\vee\Delta}\,(1,2)$$

$\mathcal{I}$が$\vee E$のとき、Pは

$$\dfrac{\Gamma\vee(A\vee B)\vee\Delta \quad \begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B:2]\\ \vdots\\ C\end{array}}{\Gamma\vee C\vee\Delta}\,(1,2)$$

と表すことができ、これはNK において次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vee(A_1\vee A_2)\vee\Delta\\ \vdots\\ \Gamma\vee\Delta\vee(A_1\vee A_2)\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Gamma\vee\Delta:3]\\ \vdots\\ \Gamma\vee C\vee\Delta\end{array} \quad \dfrac{[A\vee B:4] \quad \begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ C\\ \vdots\\ \Gamma\vee C\vee\Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}[B:2]\\ \vdots\\ C\\ \vdots\\ \Gamma\vee C\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee C\vee\Delta}\,(1,2)}{\Gamma\vee C\vee\Delta}\,(3,4)$$

$\mathcal{I}$が以上の外で$\supset I, \neg I, \forall I$以外のときも同様に行なう。

$\mathcal{I}$が$\neg I$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ \Gamma\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee\neg A\vee\Delta}\,(1)$$

と表すことができ、これはNK において排中律を用いることにより次のようにできる。

$$\dfrac{A\vee\neg A \qquad \begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ \Gamma\vee\Delta\\ \vdots\\ \Gamma\vee\neg A\vee\Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A:2]\\ \vdots\\ \Gamma\vee\neg A\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee\neg A\vee\Delta}\,(1,2)$$

$\mathcal{I}$が$\supset I$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ \Gamma\vee B\vee\Delta\end{array}}{\Gamma\vee(A\supset B)\vee\Delta}\,(1)$$

と表すことができ、これはNK において Lemma 2.1 と排中律を用いることにより次のようにできる。

$$\dfrac{\Delta\vee\neg\Delta \qquad \begin{array}{c}[\Delta:2]\\ \vdots\\ \Gamma\vee(A\supset B)\vee\Delta\end{array} \qquad \dfrac{\Gamma\vee\neg\Gamma \qquad \begin{array}{c}[\Gamma:4]\\ \vdots\\ \Gamma\vee(A\supset B)\vee\Delta\end{array} \qquad \Pi}{\Gamma\vee(A\supset B)\vee\Delta}\,(4,5)}{\Gamma\vee(A\supset B)\vee\Delta}\,(2,3)$$

ここでΠは次の deduction である。

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{array}{c}\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ \Gamma\vee B\vee\Delta\end{array} \quad [\neg\Gamma:5]\\ \vdots\\ B\vee\Delta\end{array} \qquad [\neg\Delta:3]\\ \vdots\\ \dfrac{B}{A\supset B}\,(1)\end{array}\\ \vdots\\ \Gamma\vee(A\supset B)\vee\Delta\end{array}$$

$\mathcal{I}$が $\forall I$のときも同様に行なう。

2.3 Remark

Theorem 2.2 の証明において、classical な$\supset I, \neg I, \forall I$の場合にたいする排中律の使用は本質的である。なぜなら、これらからは、排中律（又は排中律と同値な命題）を演繹することができる。それ以外の場合には、変形は NJ の推論で行われる。

3 Critical inference

本節では、５節以降の為の準備として、NDK-deduction に関するいくつかの定義を与える。

3.1 Predecessor

$C(X)$ でXを含む component を表す。推論$\mathcal{I}$に関して d.c.A と d.c.Bが次の関係のいずれかを満たすとき、BはA の predecessor であるという。

1. $\mathcal{I}$が前提が１つの推論のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee C(X) \vee \Delta}{\Gamma \vee C(Y) \vee \Delta}\ \mathcal{I}$$

のとき、

(a) $\mathcal{I}$が$\vee I$で、Bが$\mathcal{I}$で新しく導入される component のとき、Bは predecessor を持たない

(b) $\mathcal{I}$が$\neg I$で、Bが新しく導入される component のとき、Bは predecessor を持たない

(c) (a), (b) のいずれでもないとき、

i. A が $C(X)$ で Bが $C(Y)$

ii. A, Bはそれぞれ前提、結論のΓ(又はΔ) の同じ位置にある component

2. $\mathcal{I}$が$\wedge I$のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee C(X) \vee \Delta \quad \Gamma \vee C(Y) \vee \Delta}{\Gamma \vee C(X \wedge Y) \vee \Delta}\ \mathcal{I}$$

のとき、

(a) A が $C(X)$ 又は $C(Y)$ で B が $C(X \wedge Y)$

(b) A, B はそれぞれ前提、結論の Γ(又は Δ) の同じ位置にある component

3. $\mathcal{I}$ が $\supset E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee X \vee \Delta \quad \Pi \vee X \supset Y \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee Y \vee \Delta \vee \Lambda}\,\mathcal{I}$$

のとき、

(a) A が $X \supset Y$ で B が Y

(b) A, B はそれぞれ前提、結論の $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ の同じ位置にある component。(但し、B が Γ と Π に重なるとき、A は B の Γ に対する component 又は Π に対する component となる。B が Δ と Λ に重なるときも同様。)

4. $\mathcal{I}$ が $\neg E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee X \vee \Delta \quad \Pi \vee \neg X \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee \Delta \vee \Lambda}\,\mathcal{I}$$

のとき、3.(b) と同様に定義する。

5. $\mathcal{I}$ が $\vee E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee (X \vee Y) \vee \Delta \quad \begin{matrix}[X]\\ \vdots \\ D\end{matrix} \quad \begin{matrix}[Y]\\ \vdots \\ D\end{matrix}}{\Gamma \vee D \vee \Delta}\,\mathcal{I}$$

のとき、

(a) A, B はそれぞれ前提、結論の Γ (又は Δ) の同じ位置にある component、もしくはそれぞれ前提、結論の D である。

(b) A が主前提の $X \vee Y$ の X、B がこの推論 $\mathcal{I}$ で discharge される assumption の X。A が Y のときも同様。

(c) B が Γ と D と Δ の２つ以上と重なるとき、A は 3.(b) と同様に定義する。

6. $\mathcal{I}$ が $\exists E$ のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee \exists x F \vee \Delta \quad \begin{matrix}[F]\\ \vdots \\ D\end{matrix}}{\Gamma \vee D \vee \Delta}\,\mathcal{I}$$

のとき、

(a) A, Bはそれぞれ前提、結論のΓ（又はΔ）の同じ位置にある component、もしくはそれぞれ前提、結論のDである。

(b) Aが主前提の$\exists xF$、Bがこの推論$\mathcal{I}$で discharge される assumption のF

(c) BがΓとDとΔの2つ以上と重なるとき、Aは3.(b)と同様に定義する。

predecessor を持たない formula を、initial という。

3.2 String and Path

formula A から始まる predecessor の列を、A の string という。最後の formula が initial である string を、path という。また deduction の path を、その deduction の結論から始まる path と定める。

3.3 Ancestor and Desendant

Cの string でDを含むものがあるとき、CはDの desendant、DはCの ancestor であるという。

3.4 Irrelevant and Essential component

d.c.Cが irrelevant であるとは、このCの ancestor の中に$\vee I$で導入される formula があるときをいう。irrelevant でない d.c. を essential と呼ぶ。

3.5 Critical inference

irrelevant component に作用する推論$\supset I, \forall I$を critical という。

4 The system of NDKE

4.1 Negative dual pair

negative dual pair (n.d.p.) を帰納的に定義する。([2] を参照。)

1. formula$A$ に対して、$(A, \neg A)$ は n.d.p.
2. formula$A$ に対して、$(\neg A, A)$ は n.d.p
3. $(E_i, F_i)(i=1,2)$ が n.d.p. のとき、$(E_1 \wedge E_2, F_1 \vee F_2)$ は n.d.p.
4. $(E_i, F_i)(i=1,2)$ が n.d.p. のとき、$(E_1 \vee E_2, F_1 \wedge F_2)$ は n.d.p.

5. (E, F) が n.d.p. のとき、$(\forall xE, \exists xF)$ は n.d.p.

6. (E, F) が n.d.p. のとき、$(\exists xE, \forall xF)$ は n.d.p.

(E, F) が n.d.p. のとき、E, Fはそれぞれ F, Eの negative dual であるという。

4.2 Excluded middle type axiom

(E, F) が n.d.p. のとき、$E \vee F$を排中律型公理という ([2] を参照。)。

4.3 NDKE and NKE

NDK, NK に排中律型公理を加えてできる体系をそれぞれ NDKE, NKE と呼ぶ。NDKE, NKE に対しても 3.1 から 3.6 と同様の定義を与えることができる。

4.4 Rank

NDKE-deduction Pにたいして、βをPの path とするとき、γ_βでβに沿った critical な推論の数を表し、Pの rank を

$$rank(P) = \sum_{\beta:path} \gamma_\beta$$

で定める。

5 Natural reasoning

前節で定義した critical な推論が不自然な推論であり、そのような推論はどのように解釈すれば正当化できるかを、例をもって見ていく。

NDK-deduction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:1]}{\exists xA}}{\exists xA \vee C} \vee I \qquad \dfrac{[D]}{\exists xA \vee D}}{\exists xA \vee (C \wedge D)}}{\exists xA \vee (A \supset C \wedge D)} (1)- \supset I$$

について考える。この deduction において、$[A:1]$ は $\exists xA$ を導く為の assumption であるが、$\exists xA$ とは無関係に$\vee I$で導入された formula Cから演繹される$C \wedge D$にたいして作用している。

この deduction は次の様に考えることができる。

1. A が真ならば、$\exists xA$ は真

2. A が偽ならば、C, D の真偽に関係なく $A \supset C \wedge D$ は真

この推論１、２を deduction の形で表すと、

$$
\dfrac{A \vee \neg A \qquad \dfrac{\dfrac{[A:2]}{\exists x A}}{\exists x A \vee (A \supset C \wedge D)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:3] \quad [\neg A:4]}{}}{C} \qquad [D]}{C \wedge D}}{A \supset C \wedge D}\,(3)}{\exists x A \vee (A \supset C \wedge D)}}{\exists x A \vee (A \supset C \wedge D)}\,(2,4)
$$

となる。

こうしてみると、classical な $\supset I, \neg I, \forall I$ 以外の推論は自然であると考えることができる。

ここで、NDKE から classical な $\supset I, \neg I, \forall I$ を除いて得られる体系を NDKE* とする。このとき、classical な推論をもつ (NDK-)deduction を NDKE*-deduction へ、なるべくもとの構造を変えない様に変換するアルゴリズムがあり、これを次節で与える。

6 Transformations towards natural reasoning

本節では、（５節で考察した）NDK-deduction から不自然な推論（classical な $\supset I, \neg I, \forall I$）を除くアルゴリズムを与える。(詳細は [3] の７節と８節参照。)

critical でない $\supset I, \forall I$ を除くには、Theorem 2.2 の証明で用いた変換を行なえば良い。

残されたのは、critical な $\supset I, \forall I$ を除くことである。それには次の 6.1 から 6.3 で与えられる変換を行なえば良い。

6.1

P を $\Gamma \vee G \vee \Delta$ （G は irrelevant）への NDKE-deduction とするとき、

1. まず P から G の path を取り除く。

2. これにより、G の ancestor に適用する critical な $\supset I$ により discharge される assumption の集合を $\mathcal{A}$ とすると、$\mathcal{A}$ の元は open assumption である。

3. 1 で得られる図から無駄を除いて、deduction にする。

4. $\mathcal{A}$ の元の conjunction $E \equiv \wedge\{A | A \in \mathcal{A}\}$ の universal closure E'を、3 で得られた deduction の open assumption $A \in \mathcal{A}$ の上に次の様に結合させ、得られた deduction を P'とする。

$$\cfrac{\cfrac{E'}{E}\,\forall E}{\cfrac{\vdots}{A}\,\wedge E}\,\wedge E$$

この P'に対して、$rank(P') < rank(P)$ が成り立つ。

6.2

Pを$\Gamma \vee G \vee \Delta$ (G は irrelevant) への NDKE-deduction とするとき、

1. 6.1.2 における $A \in \mathcal{A}$ に対して、A が discharge される推論の前提の formula を G_Aとする。

2. $A \in \mathcal{A}$ に対して、次の deduction を P_Aとする。

$$\cfrac{\cfrac{[A:a] \quad [\neg A]}{\quad}}{\begin{array}{c} G_A \\ \vdots \\ G \end{array}}$$

3. 6.1.4 における Eに対して、Eの negative dual Fを $F \equiv \vee\{\neg A | A \in \mathcal{A}\}$ とする。よって Fと P_Aを用いて、Fから G への deduction P_G^Fを作ることができる。

4. 次の deduction を P''とする。(但し、F'は Fの existential closure)

$$\cfrac{\begin{array}{c} F' \\ \vdots \end{array} \quad P_G^F}{G}$$

こうして得られた P''は、critical な推論をもたず、結論の G は irrelevant でない。

6.3

途中に$\Gamma \vee G \vee \Delta$ (G は irrelevant) の現れる、formula H への deduction P_Hを考える。$\Gamma \vee G \vee \Delta$への subdeduction Pで、$rank(P) > 0$ となるような一番大きいものをとる。これを P_Gとしよう。

1. 6.1 より、次の様な deduction P'_Gを得る

$$\begin{array}{c}[E']\\ \vdots\\ \Gamma\vee\Delta\end{array}$$

P'_Gから P_Hの一部をコピーして次の deduction P^1_Hを得る。

$$\begin{array}{c}[E']\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma\vee\Delta}{\Gamma\vee G\vee\Delta}\ \#\\ \vdots\\ H\end{array}$$

P_Gの取り方から、上の P^1_Hの#より下における G の desendant には、$\supset I$ の適用がない。ゆえに、$rank(P^1_H) < rank(P_H)$、よって P^1_Hは NDKE*-deduction P^{1*}_Hに変形できる。

2. 6.1 より、次の様な deduction P''_Gを得る

$$\begin{array}{c}[F']\\ \vdots\\ G\end{array}$$

P''_Gより、$\vee I$を用いて次の deduction P^2_Hを得る。

$$\begin{array}{c}[F']\\ \vdots\\ G\\ \vdots\\ \Gamma\vee G\vee\Delta\\ \vdots\\ H\end{array}$$

このとき、$rank(P^2_H) < rank(P_H)$ となり、P^2_Hは NDKE*-deduction P^{2*}_Hに変形できる。

3. 次の deduction を P^*_Hとする。

$$\dfrac{E'\vee F' \quad \begin{array}{c}[E']\\ \vdots\ P^{1*}_H\\ H\end{array} \quad \begin{array}{c}[F']\\ \vdots\ P^{2*}_H\\ H\end{array}}{H}$$

この P^*_Hは我々の求めるものであり、critical な推論をもたない。

6.4 Remark

essential component に適用された classical な$\supset -I, \forall - I$については、Theorem 2.2 の変形を適用する。

6.5 例

ここで２つの例をあげる。

(1) P:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(b):1]}{A(b)\lor A(c)}\lor I}{A(b)\lor(A(b)\supset A(c))}\,(1)}{(A(a)\supset A(b))\lor(A(b)\supset A(c))}}{(A(a)\supset A(b))\lor\forall y(A(b)\supset A(y))}}{(A(a)\supset A(b))\lor\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}}{\forall y(A(a)\supset A(y))\lor\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\lor\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}\;\mathit{Contraction}$$

$P^1 \equiv P^{1*}$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\forall z A(z):1]}{P(b)}}{A(a)\supset A(b)}\\ \vdots \\ \exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\end{array}$$

$P^2 \equiv P^{2*}$:

$$\dfrac{[\exists z\neg A(z):4] \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A(b):2]\quad[A(b):3]}{}}{A(c)}}{A(b)\supset A(c)}\,(3)\\ \vdots\\ \exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\end{array}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}\,(2)$$

P^*:

$$\dfrac{\forall z A(z)\lor\exists z\neg A(z) \quad \begin{array}{c}[\forall z A(z):1]\\ \vdots\, P^{1*}\\ \exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\end{array} \quad \begin{array}{c}[\exists z\neg A(z):4]\\ \vdots\, P^{2*}\\ \exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\end{array}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}\,(1,4)$$

(2) P:

$$\cfrac{\cfrac{[\forall x(F(x)\lor C)]}{F(x)\lor C}}{\forall xF(x)\lor C}$$

P^*:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$C\lor\neg C$}
\AxiomC{$[C:2]$}
\UnaryInfC{$\forall xF(x)\lor C$}
\AxiomC{$[\forall x(F(x)\lor C)]$}
\UnaryInfC{$F(x)\lor C$}
\AxiomC{$[\neg C:1]$}
\dottedLine
\BinaryInfC{$F(x)$}
\UnaryInfC{$\forall xF(x)$}
\UnaryInfC{$\forall xF(x)\lor C$}
\RightLabel{$(2,1)$}
\TrinaryInfC{$\forall xF(x)\lor C$}
\end{prooftree}$$

参考文献

[1] M. Yasugi and K. Ryu, *NDK, A New Classical System,* The Bull. of the Inst. of Computer Science of Kyoto Sangyo Univ., vol.11(1994), 1-25.

[2] 大芝 猛, 自動証明における自然な証明生成への一つの近接, 情報処理学会論文誌, 第35巻(1994), 222-231.

[3] M. Yasugi and M.Nakata, *NDK and Natural Reasoning,* MS(1996), submitted.