数理解析研究所講究録
977巻 1997年 6-12

Two subfactors arising from a non-degenerate commuting square —Tensor categories and TQFT's—

東大数理 佐藤信哉
(Nobuya Sato)

1996年3月の数理研における研究集会「パラグループの理論とその応用」において，私は，次の V. F. R. Jones の問題を解決したことを報告した [S1]．今回の講演はその続きであり，tensor category と 3 dimensional toplogical quantum field theory の観点から問題を眺めてみる．

§1 Commuting square と V. F. R. Jones の問題

V. F. R. Jones の問題とは，次のとおりである．

有限次元 non-degenerate commuting square を考える．

$$\begin{array}{ccc} R_{00} & \subset & R_{01} \\ \cap & & \cap \\ R_{10} & \subset & R_{11} \end{array}$$

そこから縦，横両方向に basic construction を繰り返すことにより，周期2の commuting square の二重列を得る．

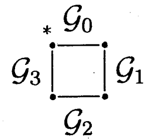
$$\begin{array}{ccccccc} R_{00} & \subset & R_{01} & \subset & R_{02} & \subset \cdots & \subset N = R_{0\infty} \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ R_{10} & \subset & R_{11} & \subset & R_{12} & \subset \cdots & \subset M = R_{1\infty} \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ R_{20} & \subset & R_{21} & \subset & R_{22} & \subset \cdots & \subset M_1 = R_{2\infty} \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ P = R_{\infty 0} & \subset & Q = R_{\infty 1} & \subset & Q_1 = R_{\infty 2} & \subset \cdots & \end{array}$$

これにより，縦方向，横方向それぞれに AFD II_1 factor の Jones tower $P \subset Q \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$, $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ を得る．この時，二つの subfactor $N \subset M$, $P \subset Q$ は何か関係があるか，また，一方が finite depth ならば，もう一方も finite depth であるか．これが，V. F. R. Jones の問題である．はじめの問いに対する解答は，二つの subfactor は，global index が等しいという関係で与えられ，二つ目の問いに対しては，肯定的な解答を得た．ここで，global index とは，$\sum_{{}_N X_N} (\dim_N X)(\dim X_N)$ で与えられる．ただし，Xは subfactor から得られる既約 N-N bimodule を表す．

Paragroup 理論に見られるように，subfactor 理論の背景には tensor category が潜んでいて，それが本質的な役割を果たしていると思われる．したがって，paragroup の不変量としては，この tensor category の不変量を見ることになるので，basic construction に対して不変である必要がある．その一つの例が global index である．これは他の類似の tensor category である量子群の表現論における量子次元の類似の概念となっている．

上述のいずれの問題に対しても，paragroup 理論における flatness が問題解決の key point である [S1]. 今回の講演では，この二つの subfactor のより一般的な関係について，新しい結果 [S2] を得たので，それについて説明したい．そのために，上に述べた Jones の問題を paragroup 理論の言葉で書き直しておく．

$\mathcal{G}_i$ $(i=0,1,2,3)$ を finite, connected, bipartite graphs とする．これらが下の図のように繋がっているとする．また，$\mathcal{G}_0$の even vertices には distinguished vertex $*$があるとし，これらのグラフ上の biunitary connection を Wで表すことにする．



この biunitary connection に対して，string algebra construction を施して，次の有限次元 von Neumann 環の二重増大列を得る．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A_{0,0} & \subset & A_{0,1} & \subset & A_{0,2} & \subset & \cdots & \subset & N = A_{0,\infty} \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
A_{1,0} & \subset & A_{1,1} & \subset & A_{1,2} & \subset & \cdots & \subset & M = A_{1,\infty} \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
A_{2,0} & \subset & A_{2,1} & \subset & A_{2,2} & \subset & \cdots & \subset & M_1 = A_{2,\infty} \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \\
P = A_{\infty,0} & \subset & Q = A_{\infty,1} & \subset & Q_1 = A_{\infty,2} & \subset & \cdots & &
\end{array}
$$

§2 Flatness, parallel transport そして open string bimodules

ここでは主定理の証明に必要ないくつかの道具を紹介する．中でも，特に open string bimodule が重要である．

Flatness

上のように string algebra より構成された AFD II_1 subfactors $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty} \subset A_{2,\infty} \subset \cdots$ の higher relative comutants については次の Ocneanu の compactness argument が成り立つ．

定理 1(Ocneanu's compactness argument) $A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} \subset A_{k,0}$が常に成り立つ．

これに対して，flatness は次のように定義される．

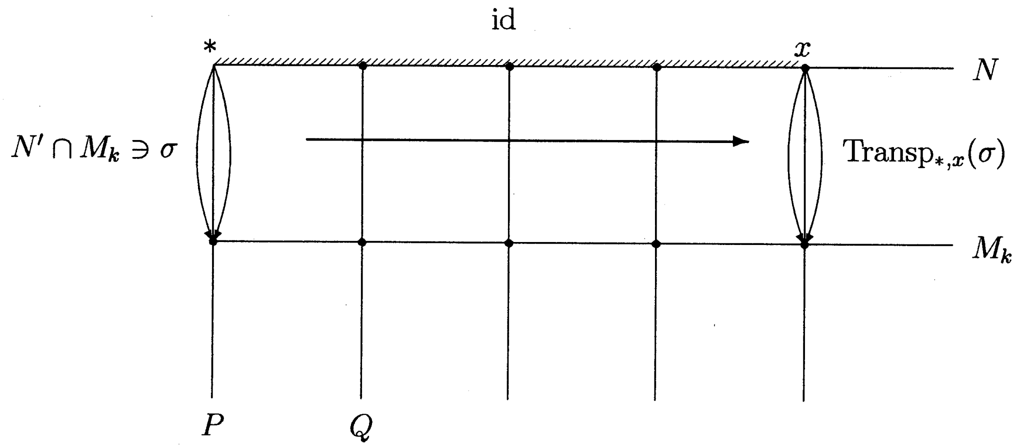
定義 (flatness)

$A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} = A_{k,0}$がすべての kについて成り立つ時，biunitary connection Wは$*$について flat であるという．

以後，このセクションの終わりまで biunitary connection Wは$*$-flat であると仮定する．

Parallel transport

下図のように，$N' \cap M_k$の string σを connection Wによる同一視によって埋め込んで，$id \cdot$(長さ k) の形になる．そこで，次のように parallel transport を定義する．

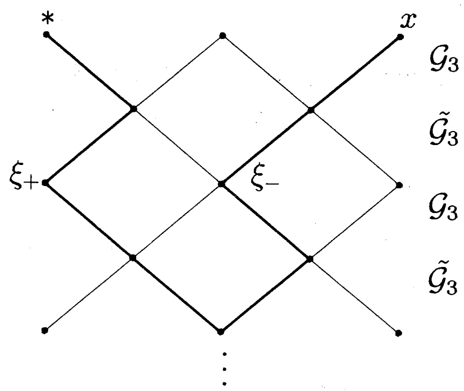


$$\mathrm{Transp}_{*,x}: A_{k,0} \ni \sigma \longrightarrow \sum_{\rho} C_{\sigma,\rho}\rho \in \mathrm{String}_x^{(k)}$$

ここで，$C_{\sigma,\rho}$は flatness によって決まる数であり，$\mathrm{String}_x^{(k)}$は xを始点とする長さ kの string の集合である．$\mathrm{Transp}_{*,x}$は $A_{k,0}$から $\mathrm{String}_x^{(k)}$への中への$*$-isomorphism となる．

特に，$x = *$のとき，flatness から，$\mathrm{Transp}_{*,*}(\sigma) = \sigma$が従う．いいかえれば，$N' \cap M_k$の任意の元は平行移動で不変ということである．これと微分幾何における flatness をかけあわせているのが paragroup 理論における flatness の名前の由来である．

Open string bimodules



次に，グラフ $\mathcal{G}_3$上において，始点がそれぞれ$*$，xである長さ kの path をξ_+，ξ_-とし，同一の終点をもつとする．ペア (ξ_+, ξ_-) 全体を open string と呼び，$\mathrm{OpenString}_{*,x}^{(k)}$と表すことにする．$\mathrm{OpenString}_{*,x}^{(k)}$はその元を基底とする線形空間と考えることができ，また string algebra と同様に埋め込みと compatible な内積をもつので $\mathrm{OpenString}_{*,x}^{(k)}$は Hilbert 空間の増大列を与えることになる．さらに，$\mathrm{OpenString}_{*,x}^{(k)}$には $A_{k,0}$の，左側からの自然な作用と右側からの parallel transport を通しての作用が入る．これらは埋め込みと compatible なので $A(x) := \overline{\cup_k \mathrm{OpenString}_{*,x}^{(k)}}$を内積による完備化を施した Hilbert 空間とすれば，これは

P-P bimoduleとなる．さらに，${}_PA(x)_P$ は既約であることが分かる．これを open string bimoduleという．

Open string bimodule は Ocneanu によって両方の$*$について flat な場合に導入されていたものであり [O]，上の open string bimodule の導入はその拡張になっている．また，open string bimodule は，本質的に surface bimodule[E-K2] と同一のものであることがわかる．

§3 Tensor categoryと 3-dim. TQFT

§1 のように，4 つの finite,bipartite,connected graph とその上の biunitary connection W があるとする．ここから，string algebra 構成法によって，上のように AFD II$_1$ subfactor $N \subset M$, $P \subset Q$ を得る．一方，Jones index 有限で，finite depth な AFD II$_1$ subfactor $N \subset M$から fusion rule 及び quantum $6j$-symbolを得る [E-K1]．このデータから，3 次元多様体の triangulation に基づく，Turaev-Viro 型の topological quantum field theory (TQFT) を構成できることが，A. Ocneanu によって示されている [E-K1]．具体的な例としては，3 次元球面 S^3の TQFT による不変量は global index $[[M : N]]$ の逆数であることが知られている．

上の状況の下で，次の定理が成り立つ．

定理 (Theorem 2.3, [S2])
Wが$*$-flat の時，N-N bimodule のなす quantum $6j$-symbol を持つ tensor category と P-P bimodule のそれとは複素共役である．特に，これらの subfactor から得られる TQFT は複素共役である．

証明の概略.

$A(x)$ を§2 で構成した P-P open string bimoduleとし，$A_c(x)$ を canonical commuting square から構成された N-N open string bimodule とする．Canonical commuting square と元の commuting square を比べてみると Wが$*$-flat であるという仮定より，N^{op}を構成する時に用いられたグラフと Pを構成する際に用いられたグラフが同じである．そこで，次の claim を証明することが key point となる．

$A(x)$ の right P-action は canonical commuting square からくる N^{op}の right action に取り替えることができる．

一方で，$A_c(x)$ の right N-action は，N^{op}の right action の複素共役で与えられることから，N-N bimodule のなす fusion rule algebra と P-Pのそれとは同型であること，また，quantum $6j$-symbol が互いに複素共役であることがわかる． □

上の証明でやっていることは，$J \cdot^* J$により opposite の category に移るということである．一般の場合には次の定理が成り立つ．

定理 (Theorem 2.4, [S2])
上の二つの subfactor $N \subset M$, $P \subset Q$ から得られる TQFT は複素共役である．

証明の概略.

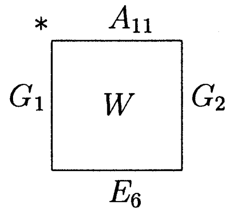
今度は flat ではないので，うまい具合に flat な場合に持ち込まなければならない．実際，flat part を $B_k = A_{0,\infty} \cap A_{k,\infty}$とすれば，compactness argument から，これは $A_{k,0}$に含まれる．$B_\infty = \vee B_k$とすれば，これは AFD II_1 factor になり，$B_\infty \subset P \subset Q$となる．そこで，一つ前の定理に帰着させるために，次の claim を証明することが key point となる．

> $B_\infty \subset Q$ の B_∞-B_∞ bimodule の quantum $6j$-symbol を持つ tensor category は $N \subset M$ の N-N bimodule のそれと複素共役である．

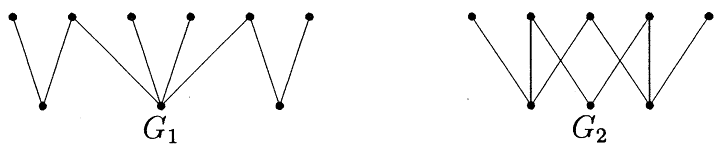
これにより，$B_\infty \subset Q$ の TQFT と $N \subset M$のそれは，互いに複素共役であることがわかる．すると，Ocneanu の TQFT の構成から，$B_\infty \subset Q$ の Q-Q bimodule より得られる TQFT と $N \subset M$の N-N bimodule より得られるそれは，互いに複素共役であることがわかる．一方，global index について，$[[Q : B_\infty]] = [[Q : P]]$ が成立することより，$B_\infty \subset Q$ の Q-Q bimodule から得られる fusion rule algebra と $P \subset Q$ の Q-Q bimodule より得られるそれは，同じであることがわかる．これにより，$P \subset Q$ の Q-Q bimodule より得られる TQFT と $N \subset M$の N-N bimodule より得られる TQFT は，互いに複素共役であることがわかる． □

§4 例と応用

上の定理の典型的な例は，Dynkin diagram E_6と A_{11}から得られる Goodman-de la Harpe-Jones(GHJ) subfactor である [G-H-J]．これは，次の 4 つのグラフから構成され，$*$-flat な biunitary connection が存在することが知られている．



ここで，グラフ G_1，G_2は次で与えられる．



G_1 G_2

§1 のように subfactors $N \subset M$，$P \subset Q$ を構成すると，$P \subset Q$ の principal graph は元の A_{11}であり，$N \subset M$のそれは G_1である．上の定理により，$N \subset M$の N-N bimodule より得られる TQFT は，$P \subset Q$ の P-P bimodule より得られるそれと複素共役であるが，$P \subset Q$ は self anti-isomorphic となっているので，この場合は実は得られる TQFT は実数値になってしまうことがわかる．また，上の定理により左上の頂点において，N-N bimodule のなす quantum $6j$- symbol を持つ tensor category と P-P bimodule のそれは複素共役で

あることがわかる．これは D.Bisch が決めることの出来なかった fusion rule[B] を与えるだけでなく，category も込めている点で，強い主張となっている．

次に，応用についてのべる．Subfactor 理論においても，量子群における quantum double の類似物があり，それは asymptotic inclusion といわれる．これは，与えられた AFD II_1 subfactor から，新しい AFD II_1 subfactor $M \vee (M' \cap M_\infty) \subset M_\infty$を構成する方法である．ただし，ここで，$M_\infty = \vee_{k=-1}^{\infty} M_k$である．与えられた AFD II_1 subfactor が有限群 G を用いて，$N \subset N \times G$ と接合積で表されている場合には，この subfactor に asymptotic inclusion を適用したときの M_∞-M_∞ bimodule の fusion rule algebra が，有限群 G の quantum double を与えることが知られている．上で得た二つの subfactor $N \subset M$, $P \subset Q$ のそれぞれにこの asymptotic inclusion を適用すると，新しい AFD II_1 subfactor $M \vee (M' \cap M_\infty) \subset M_\infty$, $Q \vee (Q' \cap Q_\infty) \subset Q_\infty$ を得る．この時，上の定理の応用として，次の結果を証明することができる．

系 (Corollary 2.5, [S2])

それぞれの fusion graph が連結である時，M_∞-M_∞ bimodule のなす qquantum $6j$-symbol を持つ tensor category と Q_∞-Q_∞のそれとは同型である．

これの意味するところは，有限次元 non-degnerate commuting square から得られる，縦，横の二つの subfactor の quantum double は同じであるということである．

また，この定理は$*$-flat の時には，非常にはっきりしている．というのも，このときは，$M = Q'$, $M' = Q$ となっているため，$Q_\infty = M_\infty$となっている．すなわち，$N \subset M$と $P \subset Q$ が同じ asymptotic inclusion を与えるのである．これが複素共役でなく同型となる理由である．

参考文献

[B] D. Bisch, On the structure of finite depth subfactors, in *"Algebraic methods in operator theory "*, Birkhäuser (1994), 175–194.

[E-K1] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, From subfactors to 3-dimensional topological quantum field theories and back, *Internat. J. Math.* **4** (1995), 537–558

[E-K2] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, On Ocneanu's theory of asymptotic inclusions for subfactors, topological quantum field theories and quantum doubles, *Internat. J. Math.* **6** (1995), 205–228.

[GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe, & V. F. R. Jones, "Coxeter graphs and towers of algebras", MSRI publications 14, Springer, (1989).

[O]A. Ocneanu, Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, (1988), pp. 119–172.

[S1] N. Sato, Two subfactors arising from a non-degenerate commuting square —An answer to a question raised by V. F. R. Jones—, to appear in *Pac. J. Math.*

[S2] N. Sato, Two subfactors arising from a non-degenerate commuting square II —Tensor categories and TQFT's—, to appear in *Internat. J. Math.*