数理解析研究所講究録
977 巻 1997 年 69-75

FREE SHIFT
ON THE REDUCED FREE PRODUCT OF C^*–ALGEBRAS

大阪教育大学　長田 まりゑ (Marie Choda)

C^*-環 又は、von Neumann 環 A が、整数全体 $\mathbb{Z}$ を用いて構成されている時に、$\mathbb{Z}$ 上の変換 $\alpha : n \to n+1$ から 引き起こされる A の変換を、シフト (shift) と呼ぶ。その代表例は、エルゴード理論で現れるベルヌーイ変換である。その非可換版として、n 次正方複素行列環の無限テンソル積で与えられる C^*-環 及び von Neumann 環上の、いわゆる非可換ベルヌーイ変換があり、より一般化された非可換ベルヌーイ変換が、Subfactor theory 及び Sector theory、 そして エントロピー問題の興味から、取り扱われている。より一層きつい非可換性を有するシフトとして、($\mathbb{Z}$ 個の生成元を持つ自由群の群環に代表される) 自由積環上の 変換が在る。それを、自由変換 (Free shift) と呼ぶ。

ここでは、次の様に定義された C^*-環の制限自由積環上の自由変換について、エントロピーに関する結果の報告をする。

A_0 を unital C^*-algebra とし ϕ_0 を A_0 の state とする。$i \in \mathbb{Z}$ に対して、$A_i = A_0$, $\phi_i = \phi_0$ とおく。制限自由積 (reduced free product) $(A, \phi) = (*A_i, *\phi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ は A_i を ϕ_i により 空間 H_i 上 へ 標準的に作用させ, ξ_i をその canonical ベクトルとした時、free product Hilbert space $(H, \xi) = (*H_i, *\xi_i)_{i\in Z}$ 上の C^*-環として、Arvitour ([A]) と Voiculescu ([V]) により独立に定義された。A の state ϕ は$\phi(\cdot) =< \cdot\xi, \xi >$ により定義されている。

$$\mathring{A}_i = \{a \in A_i : \phi_i(a) = 0\}$$

とし、

$$red(A) = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} : a_{i_j} \in \mathring{A}_{i_j}, i_1 \neq \cdots \neq i_n\}$$

と置くと、 $red(A) \subset \mathring{A}$ 且つ $\mathbb{C}1 +$ linear span $red(A)$ は A で稠密となり、変換 α は A 上の $\phi \cdot \alpha = \phi$ を充たす自己同型写像 (free shift) α を引き起こす。

この free shift は、非常に強いエルゴード性をもち、C^*-環のテンソル積や制限自由積との関連で, 他に影響を与える。

以下、A は、制限自由積環 $(A, \phi) = (*A_i, *\phi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ とし、単位元を持つ二つの C^*-環 B と C に対して、β を B の自己同型写像、γ を C の自己同型写像とし、μ を $\mu \cdot \beta = \mu$ を充たす B の state、 ρ を $\rho \cdot \gamma = \rho$ を充たす C の state とする。制限自由積環 $(A * C, \phi * \rho)$ と C とのテンソル積 $(A * C) \otimes B$ を考える。

<u>補題 1</u> ([CN]).

勝手な β と γ に対して、$(A * C) \otimes B$ の automorphism $(\alpha * \gamma) \otimes \beta$ は、常に $\mathbb{Z}$ の outer action を与える。

<u>補題 2</u> ([Ch]).

E_ϕ を $E_\phi(a) = \phi(a)1, (a \in A)$ により定義された A から $\mathbb{C}1$ への conditional expectation とすると、E_ϕ と B 上の identity map id_B との制限自由積 $(E_\phi * id_C)$ が定義できて、$F = (E_\phi * id_C) \otimes id_B$ は $(A * C) \otimes B$ から $C \otimes B$ への conditional expectation となる。

<u>定理 3</u> ([Ch]).

ψ を $(A * C) \otimes B$ の state とするとき、

$$\phi \cdot (\alpha * \gamma) \otimes \beta = \phi$$

である為の必要十分条件は、$C \otimes B$ 上の $\gamma \otimes \beta$-不変な state ω が存在して

$$\psi = \omega \cdot F$$

という形式をしていることである。

上の定理は、特に、$C = \mathbb{C}1$ とした時には、[A : 4.1 Proposition] にあたる。

Connes-Narnhofer-Thirring ([CNT]) は、γ のρ に関するエントロピー $h_\rho(\gamma)$ を von Neumann 環の トレース保存 automorphism に対する Connes-Stϕrmer エントロピー $H(\cdot)$ の拡張として、定義した。Sauvageot-Thouvenot は、Connes-Narnhofer-Thirring エントロピーの類似エントロピー $H_\rho(\gamma)$ を定義した。二つの値 $h_\rho(\gamma)$ と $H_\rho(\gamma)$ は C^*-環 C が、nuclear な時に、一致する ([ST])。

Sauvageot-Thouvenot エントロピー $H_\rho(\gamma)$ は、次の様に定義される。

B が 可換で、$C \otimes B$ 上の state ψ が

$$\psi(c \otimes 1) = \rho(c), \quad (c \in C)$$

を充たす時、対 (ψ, B) を (C, ρ) の *coupling* と呼ぶ。(C, ρ) の *coupling* (ψ, B) に対して、

$$\mu(b) = \psi(b \otimes 1), \quad (b \in B)$$

と置くことにより、B の state μ を得る。β を B の $\psi \cdot \gamma \otimes \beta = \psi$ を満足する automorphism とする。勿論、β は $\mu \cdot \beta = \mu$ を充たす。orthogonal projections $\{p_i \in B : 1 \leq i \leq n, \sum_i p_i = 1\}$ から成る B の有限分割 $\mathcal{P}$ に対して、

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} -\mu(p_i) \log \mu(p_i)$$

かつ

$$h'(\psi, \mathcal{P}) = \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{k-1} \beta^{-i}(\mathcal{P})) - H_\mu(\mathcal{P}) + S(\ \phi \otimes (\mu\mid_{\mathcal{P}})\ ,\ \psi\mid_{A \otimes P}\ )$$

と置く。ただし、$S(\cdot, \cdot)$ は states の 双対エントロピー ([PW], [K]) である。その時、Sauvageot-Thouvenot エントロピー は、

$$H_\phi(\alpha) = \sup h'(\psi, \mathcal{P}),$$

として定義される。ただし、sup は、全ての couplings (ψ, B) と すべての分割 $\mathcal{P}$ とすべての上の様な automorphisms β を動かして、取られる。

定理 3 を使って、次の定理 4 が得られる。

定理 4 ([Ch]).

勝手な C, γ, ρ に対して、Sauvageot-Thouvenout エントロピーは次の関係式を充たす。

$$H_{\phi*\rho}(\alpha * \gamma) = H_\rho(\gamma) = H_{\phi\otimes\rho}(\alpha \otimes \gamma).$$

A, C が nuclear ならば、$A \otimes C$ は、nuclear であるから、次を得る。

系 5

A, C が nuclear ならば、

$$h_{\phi\otimes\rho}(\alpha \otimes \gamma) = h_\rho(\gamma).$$

nuclear 制限自由積環 A の代表例は、Cuntz 環 $\mathcal{O}_\infty$ である。

又定理 4 に於いて、特に、$C = \mathbb{C}1$ とすると、次の結果がでる。

系 6 ([S3、Ch]).

$$H_\phi(\alpha) = 0.$$

エントロピーは、エルゴード的な automorphism に対して、意味を持つ不変量である。automorphism γ は、制限 C^*-接合積 $C \rtimes_\gamma \mathbb{Z}$ の unitary $u(\gamma)$ を生じ $C \rtimes_\gamma \mathbb{Z}$ の automorphism $\mathrm{Ad}\, u(\gamma)$ を引き起こす。一般に、

$$\text{entropy of } \mathrm{Ad}\, u(\gamma) \geq \text{entropy of } \gamma$$

である。この等号が成立するか否かという質問が、[S] により提示されている。特に、γ が 測度空間 X 上の 測度保存エルゴード変換からくる $L^\infty(X)$ の automorphism の場合には、等号が成立することが、Voiculescu [V] により示された。

ここでは、自由シフト α に対して、この等号が成立すること、及び、定理 4 との関係で、Adu 問題を扱う。

そのために、定理 3 の Adu 版の為に、次の定理 7 を得る。

E を $((A*C)\otimes B)\rtimes_{(\alpha*\gamma)\otimes\beta}\mathbb{Z}$ から $(A*C)\otimes B$ の上への conditional expectation とし、

$$\widehat{(\phi*\rho)\otimes\mu} = (\phi*\rho)\otimes\mu\cdot E$$

と置く。

<u>定理 7</u> ([CN]).

$((A*C)\otimes B)\rtimes_{(\alpha*\gamma)\otimes\beta}\mathbb{Z}$ から $C^*(\,C\otimes B, u((\alpha*\gamma)\otimes\beta))$ の上への conditional expectation ϵ で、つぎの条件を充たすものが存在する：

(1) $\widehat{(\phi*\rho)\otimes\mu}\cdot\epsilon = \widehat{(\phi*\rho)\otimes\mu}$

(2) $\epsilon(xu) = F(x)u, \quad (x\in(A*C)\otimes B)$

(3) 任意の $x\in((A*C)\otimes B)\rtimes\mathbb{Z}$ と $\varepsilon>0$ に対して或る 自然数 p と p 個の自然数 $n_1,\cdots,n_p$ が存在して、

$$\|\epsilon(x)-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}^{n_i}(x)\|<\varepsilon$$

を充たす。ただし、

$$\hat{\alpha}(xu((\alpha*\gamma)\otimes\beta)) = ((\alpha*id_C)\otimes id_B)(x)u((\alpha*\gamma)\otimes\beta),\ x\in(A*C)\otimes B.$$

この結果は、定理 3 の の接合積版として接合積上の state を決定する。

定理 4 の 接合積版として、次を得る。

定理 8 ([CN]).

$$H_{\widehat{\phi*\rho}}(\mathrm{Ad}\,u(\alpha*\gamma)) = H_{\hat{\rho}}(\mathrm{Ad}\,u(\gamma)) = H_{\widehat{\phi\otimes\rho}}(\mathrm{Ad}\,u(\alpha\otimes\gamma)).$$

特に、C を trivial algebra $\mathbb{C}1$ とすると、自由シフトに対して、Stϕrmer の問題の等号が得られる：即ち

$$H_\phi(\alpha) = 0 = H_{\hat{\phi}}(\mathrm{Ad}\,u(\alpha)).$$

更に、β を n 点集合の積空間上の Bernoulli shift とし、A が nuclear だとすると、Connes-Narnhofer-Thirring エントロピー ([CNT]) に対して、

$$h_{\widehat{\phi\otimes\mu}}(\mathrm{Ad}\,u(\alpha\otimes\beta)) = h_{\hat{\mu}}(Adu(\beta)) = \log n = h_\mu(\beta) = h_{\phi\otimes\mu}(\alpha\otimes\beta).$$

REFERENCES

[A] D. Avitzour: Free products of C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **271** (1982), 423-435.

[B] E. Bèdos: On the uniqueness of the traces on some simple C^*-algebras, *J. Operator Theory* **30** (1993), 149-160.

[Ch] M. Choda : Reduced free products of completely positive maps and entropy for free products of automorphisms, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.,* **32** (1996), 179-190.

[CN] M. Choda and T. Natume : Reduced C^*-crossed products by free shifts, Preprint, (1996).

[CS] A. Connes and E. Stϕrmer: Entropy of II_1 von Neumann algebras, *Acta Math.,* **134** (1975), 289-306.

[CNT] A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring: Dynamical entropy of C^* algebras and von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.,* **112** (1987), 691-719.

[C] J. Cuntz: Simple C^*-algebras generated by isometries, *Commun. Math. Phys.,* **57** (1977), 173-185.

[K] H. Kosaki : Relative entropy of states: a variational expression, *J. Operator Theory* **16** (1986), 335-348.

[P] R. Powers : Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators, *Duke Math. J.* **42** (1975), 151-156.

[PW] W. Pusz and S. Woronowicz : Form convex functions and the WYDL and other inequalities, *Letter Math. Phys.* **2** (1978), 505-512.

[S1] E. Stϕrmer : Entropy in operator algebras, Preprint, 1992.

[S2] E. Stϕrmer : Entropy of some automorphisms of the II_1 factor of the free group in infinite number of generators, *Invent. Math.* **110** (1992), 63-73.

[S3] E. Stϕrmer : States and shifts on infinite free products of C^*-algebras, Preprint, University of Oslo, 1995

[ST] J-L. Sauvageot and J-P Thouvenot: Une nouvelle définition de l'entropie dynamique des systèmes non commutatifs, *Commun. Math. Phys.* **145** (1992), 411-423.

[V1] D. Voiculescu: Symmetries of some reduced free product C^*- algebras, *Operator Algebras and Their Connection with Topology and Ergodic Theory (Lecture Notes in Math. 1132).* Springer Verlag, 1985, 556-588.

[V2] D. Voiculescu: Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras, *Commun. Math. Phys.* **170** (1995), 249-281.

[VDN] Voiculescu, D. Dykema, K. and Nica, A. : *Free random variables, (CRM Monograph vol. 1). AMS, 1992*