数理解析研究所講究録
978巻 1997年 102-114

Farsighted Stability in Prisoners' Dilemma

東京都立大学経済学部　武藤　滋夫(Shigeo Muto)
東北大学経済学部　鈴木　明宏(Akihiro Suzuki)

1　序論

本論文においては、間接支配の下での安定集合及びChwe[1994]により定義されたlargest consistent setを囚人のジレンマに適用し、どのような結果が得られるかを考察する。本論文の構成は以下の通りである。第2節では安定集合とlargest consistent setを定義する。第3節では各プレイヤーの取りうる戦略が純戦略の場合にそれらを適用する。第4節では混合戦略に拡張した場合の分析を行う。第5節と第6節では2人のプレイヤーが（合意に拘束力はないものの）協調して行動する可能性を許した場合を扱う。第7節は本論文のまとめと今後の研究の方向性について述べる。

2　定義

元のゲームとして、$N=\{1,2\}$をプレイヤーの集合、S_iをプレイヤーiの戦略の集合（$i=1,2$）、各プレイヤーの戦略がそれぞれ$x_1\in S_1$，$x_2\in S_2$のときのプレイヤーiの利得を$u_i(x_1,x_2)$とする2人の戦略形ゲーム$(N,\{S_i\}_{i\in N},\{u_i\}_{i\in N})$を考える。そこで最初に、このゲームの戦略の組の集合$S_1\times S_2$上の支配関係を2種類定義する。

$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)\in S_1\times S_2$とする。$x_j=y_j$のとき$x$は$i$を通して$y$より導かれるといい$y\rightarrow_i x$で表すことにする。$y\rightarrow_i x$かつ$u_i(x)>u_i(y)$（$i,j\in N$，$i\neq j$）であるとき、$i$を通して$x$は$y$を（直接）支配するといい、$x\ \mathrm{dom}_i\ y$で表す。また、そのようなプレイヤー$i$が存在するとき、単に$x$は$y$を（直接）支配するといい、$x\ \mathrm{dom}\ y$で表す。

ある戦略の組の列$x^0(=x),x^1,\cdots,x^m(=y)$とプレイヤーの列$i(1)\ldots.i(m)$で$x^{k-1}\rightarrow_{i(k)}x^k$かつ$u_{i(k)}(y)>u_{i(k)}(x^{k-1})$（$k=1,\cdots,m$）が成り立つものが存在するとき、

x は y を間接支配するといい x inddom y で表す。この間接支配の定義は Harsanyi(1974),Chwe(1994)による。以降、本論文ではこれらの支配関係を用いて戦略の組に関する安定集合，largest consistent set という概念を考える。$(S_1 \times S_2, \mathrm{dom})$ の安定集合の定義は以下の通りである。

定義：集合 $V \subset S_1 \times S_2$ が次の２条件を満足するとき、V は $(S_1 \times S_2, \mathrm{dom})$ の安定集合であるという。

（１）内部安定性：任意の $x, y \in V$ について x dom y は成立しない。

（２）外部安定性：任意の $y \notin V$ について x dom y となるような $x \in V$ が存在する。

この定義において「dom」を「inddom」に変えると $(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$ の安定集合の定義が得られる。又、largest consistent set の定義は以下の通りである。

定義：集合 $K \subset S_1 \times S_2$ が次の２条件を満足するとき、K は consistent set であるという。

（１）任意の $x \in K$ について $x \rightarrow_i x'$ となる全ての $i \in N$ と $x' \in S_1 \times S_2$ を考えると、$x'' = x'$ または x'' inddom x' である $x'' \in K$ の内 $U^i(x'') \leq U^i(x)$ となるものが存在する。

（２）任意の $y \notin K$ について $x \rightarrow_i x'$ となるある $i \in N$ と $x' \in S_1 \times S_2$ が存在して、$x'' = x'$ または x'' inddom x' である任意の $x'' \in K$ に対して $U^i(x'') > U^i(y)$。

そして任意の consistent set K' に対して $K \supset K'$ が成り立つ consistent set K を largest consistent set (LCS)という。

3　囚人のジレンマの安定集合と LCS（純戦略の場合）

この章以降では利得行列が次の表１であらわされる囚人のジレンマを扱う。

1＼2	C	D
C	4,4	0,5
D	5,0	1,1

表１：囚人のジレンマの利得行列

この節では取りうる戦略が純戦略のみの場合を考えることにする。そのため、$S_1 = S_2 = \{C, D\}$である。直接支配に関しては図１で表される。ここでは「→」で支配関係を表していて、例えば「CC→CD」は$CC\,\mathrm{dom}_2\,CD$の意味である。

$$\begin{tikzcd} CC \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & CD \arrow[d, "1"] \\ DC \arrow[r, "2"'] & DD \end{tikzcd}$$

図１：囚人のジレンマにおける純戦略の支配関係（dom）

（１）$(S_1 \times S_2, \mathrm{dom})$の安定集合

一つの戦略の組だけでは他の戦略の組全てを支配することはできない、つまり外部安定性を満たさないので{CC},{CD},{DC},{DD}は安定集合ではない。また、３つ以上の戦略の組からなる集合に関しては、その内のいずれか２つの組について支配関係が成り立つため内部安定性が満たされず、これも安定集合とはならない。よって、後は２つの戦略の組からなる集合を調べればよい。この内、２つの戦略の組に関して片方のプレイヤーの戦略が等しい場合、支配関係が存在してしまう。よって、そのような集合は内部安定性を満たさない。故に、残った集合は{CC,DD}と{CD,DC}の２つになる。この内{CC,DD}についてはDDがCDとDCを支配するので安定集合となる。また、{CD,DC}についてはDDが支配されないため、外部安定性を満たさない。従って、この場合の安定集合は{CC,DD}だけとなる。

（２）$(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$の安定集合

元の個数が３，４の場合は（１）と同様に内部安定性を満たさず、元の個数が１の集合は外部安定性を満たさない。元の個数が２個のものを考えると候補は{CC,DD}と{CD,DC}だけである。CCがDDを支配しないことは明らか。また、CCのとき両プレイヤーの利得は4でDDのときの両者の利得1を上回っているため、DDがCCを間接支配することはない。よって、{CC,DD}は内部安定性を満たす。さらに、DDはCDとDCを支配するから外部安定性も満たし、{CC,DD}

は安定集合となる。しかし、{CD,DC}は DD を支配しないので外部安定性を満たさない。従って、{CC,DD}のみが安定集合である。

（３） largest consistent set

以下のような写像 $f{:}2^{S_1\times S_2}\to 2^{S_1\times S_2}$ を考える。

$$f(X)=\left\{a\in S_1\times S_2\middle|\forall d,i\ \mathrm{s.t.}\ a\to_i d,\exists e\in X\bigl(d=e\,\mathrm{or}\,d\ \mathrm{inddom}\,e\bigr)\ \mathrm{s.t.}\ U^i(a)\geq U^i(e)\right\}$$

すると、この写像 f の不動点は consistent set であり、$S_1\times S_2$ に何回か f を作用させたときの不動点 $f^{(j)}(S_1\times S_2)=f^{(j-1)}(S_1\times S_2)\equiv K$ は LCS である。よって、$f(S_1\times S_2)=\{CC,DD\}$、$f\bigl(f(S_1\times S_2)\bigr)=\{CC,DD\}=f(S_1\times S_2)$。従って、LCS は{CC,DD}である。

以上の結果をまとめると表２のようになる。

$(S_1\times S_2,\mathrm{dom})$ の安定集合	{CC,DD}
$(S_1\times S_2,\mathrm{inddom})$ の安定集合	{CC,DD}
LCS	{CC,DD}

表２：純戦略の場合の安定集合と LCS(1)

4　囚人のジレンマの安定集合と LCS（混合戦略の場合）

この場合、各プレイヤーの戦略集合は $S_1=S_2=[0,1]$ で表される。又、$x_i\in S_i$ でプレイヤー i が C をとる確率を表すことにする。すると戦略の組が $x=(x_1,x_2)$ のとき、プレイヤー i の利得は以下のようになる。

$$u_i(x)=1-x_i+4x_j \qquad (i\neq j)。$$

すると明らかに、協力すると自己の利得が減少し相手の利得が増加する。また、$x=(x_1,x_2)$，$x'=(x_1',x_2')$ とすると $x_i<x_i',x_j=x_j'\Rightarrow x\,\mathrm{dom}_i\,x'$ も明らかである。よって、以下の命題が成り立つ。

命題１：線分 OA を任意の連続な右上がりの線とする（図２参照）。この時、線分 OA 上の点全体の集合を V とすると、V は $(S_1\times S_2,\mathrm{dom})$ の安定集合となる。

証明：外部安定性が成り立つことは上で述べたことより明らかである。次に内部安定性についてだが、この場合 $x_1=x_1'$ か $x_2=x_2'$ が成り立たない限り２点の間

に支配関係は存在しない。よって、内部安定性も満たされる。

従って、集合Vは安定集合である。（証明終）

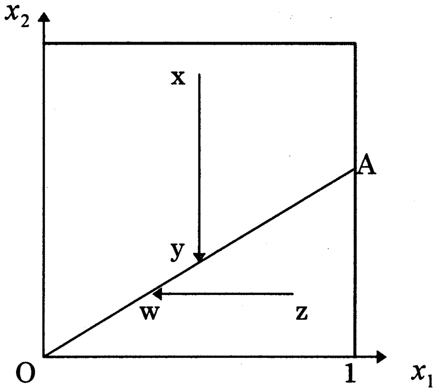

図２：$(S_1 \times S_2, \mathrm{dom})$の安定集合

次に、$(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$の安定集合について考える。ところが上のような集合は既に外部安定性を満たしているため、この形の$(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$の安定集合を得るには内部安定性のみ考えれば良い。

命題２：$O' = (x_1, x_2)$（ただし、x_1, x_2の内少なくとも一方は１）とする。連続でOからO'に向かって両者の利得が増加していく線OO'（図３参照）上の点全体の集合をVとするとVは$(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$の安定集合となる。

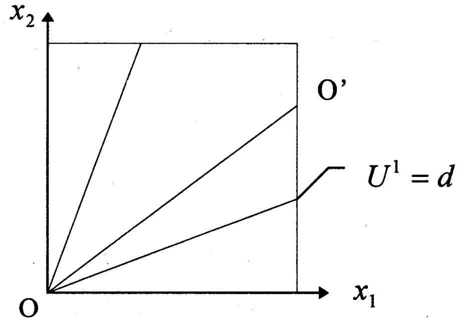

図３：$(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$の安定集合

証明：外部安定性が成り立つことは明らか。OO'上の任意の２点x, x'をとると

直接支配関係は存在しない。一般性を失うことなく $x_1' > x_1$，$x_2' > x_2$ とする（OO' の性質より等号は成り立たない）。更に x' inddom x と仮定する（OO'の性質より逆はありえない）と、$x^{k-1} \to_{i^k} x^k$，$u_{i^k}(x^{k-1}) < u_{i^k}(x')$（$i^k = 1$ または 2，$k = 1,\ldots,m$）となるような戦略の組の列 $x^0(=x), x^1, \ldots, x^m(=x')$ が存在する。この中で最初に $x_1^k \geq x_1'$ または $x_2^k \geq x_2'$ となる点を x^p とすると $x_1^p \geq x_1' \Rightarrow i^{p+1} = 2$，$x_2^p \geq x_2' \Rightarrow i^{p+1} = 1$ が成り立つ。ところが、$u_{i^{p+1}}(x^p) > u_{i^{p+1}}(x')$ が成り立ち x' が x を間接支配することに矛盾する。よって、内部安定性も成り立つ。（証明終）

命題２によれば個人合理的な点はある安定集合に含まれることがわかるが、個人合理的でない点に関しては次の命題が成り立つ。

命題３：任意の $(S_1 \times S_2, \mathrm{inddom})$ の安定集合 V に対して $(0,0) \in V$。また、一方の利得が１未満となる点 x に対して $x \notin V$。

証明：x inddom$(0,0)$ となる x が存在しないことを示せば $(0,0) \in V$ が言える。そこで任意の $x \in S_1 \times S_2$ をとる。x が個人合理的でない、例えば $u_1(x) < 1$ ならば $u_2(x) > u_2(0,0) = 1$ であるから x inddom$(0,0)$ ならば最初に２が動かなければならない。しかし、２がどのような $x' = (0, x_2')$ に動いても $u_2(x') > u_2(x)$ であるから次に１が動く誘因はない。よって x inddom$(0,0)$ とはならない。x が個人合理的である場合は命題２と同様の議論によりやはり x inddom$(0,0)$ とはならない。

逆に個人合理的でない任意の $x = (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$ をとると $u_1(x) < 1$ の場合には $x' = (0, x_2)$ を考えれば $(0,0)$ inddom x である事が分かる。（証明終）

inddom の場合、命題２と３により個人合理的な点が安定集合に含まれ、かつそれだけが安定集合に含まれうることがわかった。これまでは安定集合について考察を行って来たが largest consistent set は以下の命題の通りとなる。

命題４：取りうる戦略が混合戦略のとき LCS は個人合理的な点全体の集合、すなわち $\{x \in S_1 \times S_2 | u_1(x) \geq 1, u_2(x) \geq 1\}$ である。

証明：純戦略の場合と同様に写像 f を考えると

$f(S_1 \times S_2) = \{x \in S_1 \times S_2 | u_1(x) \geq 1, u_2(x) \geq 1\}$，$f(f(S_1 \times S_2)) = f(S_1 \times S_2)$

となることがわかる。

実際、任意の個人合理的でない点$x=(x_1,x_2)$をとる。一般性を失うことなく$u_1(x)<1$とすることができる。$x'=(0,x_2)$を考えると$x\rightarrow_1 x'$である。まず、明らかに$u_1(x')>u_1(x)$。$x''\ \mathrm{inddom}\ x'$となる点x''の内プレイヤー1が動いて達成できる点は間接支配の定義より$u_1(x'')>u_1(x')>u_1(x)$。プレイヤー2のみが動いて達成できる点は$x''=(0,x_2'')$の形のみであるから$u_1(x'')>u_1(x)$。よって、$x\notin f(S_1\times S_2)$。

次に、任意の個人合理的な点$x=(x_1,x_2)$をとり、$x\rightarrow_i x'$となるような任意の$x'\in S_1\times S_2$と$i\in N$を考える。ただし、fの定義より$u_i(x)<u_i(x')$の場合についてのみ考えれば十分である。この場合当然$x\neq(0,0)$となる。すると$x\rightarrow_i x'$, $u_i(x)<u_i(x')$であるから$x_i'<x_i$, $x_{-i}'=x_{-i}$である。この場合、$x_i''=x_i'$, $x_{-i}''=x_i'/4$となるx''をとると$u_i(x'')=1$で、$u_i(x')>1$, $x_i''=x_i'$であるから$x_{-i}''<x_{-i}'$となり$x''\ \mathrm{dom}_{-i}\ x'$。更に$x$が個人合理的な点であるから$u_i(x)\geq u_i(x'')$。よって、$x\in f\left(S_1\times S_2\right)$。以上のことから$f(S_1\times S_2)=\{x\in S_1\times S_2|u_1(x)\geq 1,u_2(x)\geq 1\}$。同様に考えると$f(f(S_1\times S_2))=f(S_1\times S_2)$も確かめられる。（証明終）

5　joint moveの導入（1）―――純戦略の場合―――

これまでは各プレイヤーが単独で動く場合のみを考察してきた。そこで次に、両者が同時に動くことを許した場合について考察する。以下では全ての$i\in P\subset\{1,2\}$に対して$u_i(x)>u_i(y)$が成り立つとき、それを$u_P(x)>u_P(y)$で表すことにする。また、$u_N(x)>u_N(y)$であるとき、xはyを結合支配するといい、$x\ \mathrm{dom}_{12}\ y$で表す。すると、以下の支配関係が得られる。

定義：$x\ \mathrm{dom}_1\ y$, $x\ \mathrm{dom}_2\ y$, $x\ \mathrm{dom}_{12}\ y$のいずれかが成り立つときxはyを提携支配するといい、$x\ \mathrm{c\text{-}dom}\ y$で表す。

定義：ある戦略の組の列$x^0(=x),x^1,\cdots,x^m(=y)$と提携の列$P^1,\cdots,P^m$（$P^k\subset\{1,2\}$、$k=1,\cdots,m$）で$x_j^{k-1}=x_j^k$（$j\notin P^k$）かつ$u_{P^k}(y)>u_{P^k}(x^{k-1})$が成り立つものが存在するとき、$x$は$y$を間接提携支配するといい$x\ \mathrm{c\text{-}indddom}\ y$で表す。

この場合、純戦略における支配関係は図４のようになる。これまでの「dom」,「inddom」をそれぞれ「c-dom」,「c-inddom」に置き換えることで$(S_1 \times S_2, \text{c-dom})$の安定集合，$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合，提携を許した largest consistent set（c-LCS）が定義される。以下ではこれらを用いて前節までと同様の分析を行う。

$$
\begin{tikzcd}
CC \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & CD \arrow[d, "1"] \\
DC \arrow[r, "2"'] & DD \arrow[ul, "12"]
\end{tikzcd}
$$

図４：純戦略の下での支配関係(c-dom)

（１）$(S_1 \times S_2, \text{c-dom})$の安定集合

結合支配を導入しても CC が DD を支配できるようになっただけなので元の個数が１，３，４の場合は安定集合にはならない。結局、{CC,DD}と{CD,DC}の２つが残るが{CD,DC}については DD が支配されないので外部安定性を満たさないし、{CC,DD}については CC が DD を支配してしまうので内部安定性を満たさない。よって、この場合は安定集合は存在しない。

（２）$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合

元の個数が３，４の場合は（１）と同様に安定集合とはならない。元の個数が２個のもので内部安定性を満たすものは{CD,DC}だけであるが、これは DD を支配しないので外部安定性を満たさない。残りは{CC},{CD},{DC},{DD}の４つである。この内、{CD},{DC}が外部安定性を満たさないのは明らか。{DD}は CC を支配しないのでやはり安定集合ではない。最後に{CC}であるが CC が他の全てを支配するからこれが安定集合となる。

（３）提携を許した largest consistent set

３節と同様に写像fを考えると$f(S_1 \times S_2) = \{CC\}$，$f(f(S_1 \times S_2)) = \{CC\}$。よって、c-LCS は{CC}である。

以上の結果をまとめたものが下の表３である。

$(S_1 \times S_2, \text{c-dom})$の安定集合	存在しない
$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合	{CC}
c-LCS	{CC}

表３：純戦略の場合の安定集合とLCS(2)

6　joint moveの導入（２）―――混合戦略の場合―――

ここでは４節と同様に取りうる戦略が混合戦略の場合について議論する。まず、$(S_1 \times S_2, \text{c-dom})$の安定集合について、以下の命題が成り立つ。

命題５：取りうる戦略は混合戦略とし、$A=(0,1), B=(1,0)$とする。このとき２点A,Bを結ぶ右下がりの連続な線（図５参照）を考えると、線AB上の点全体からなる集合は$(S_1 \times S_2, \text{c-dom})$の安定集合である。

証明：外部安定性について。線 AB より上の点xはAB上の点y（$x_1=y_1$）に支配されることは明らか。 AB より下の点$z=(x_1,x_2)$は$w=(x_1',x_2')$に支配される。ただし、$x_2'-x_2=x_1'-x_1$ 。

内部安定性は任意のAB上の点はその右上方や左下方にAB上の異なる点を持たないことより明らか。（証明終）

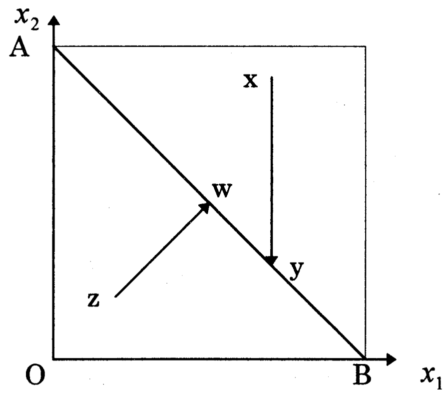

図５：$(S_1 \times S_2, \text{c-dom})$の安定集合

次に、提携を許したlargest consistent setについて考える。前と同様に写像fを考えると$f(S_1 \times S_2)=\{x \in S_1 \times S_2 | u_1(x) \geq 1, u_2(x) \geq 1\}$ となる。実際、４節での議

論より個人合理的でない点は $f(S_1 \times S_2)$ に含まれない。また、任意の個人合理的な点 x に対して $u_N(x') > u_N(x)$ となる x' を考えると、$x'' = (0, x_2')$ は $x'' \,\mathrm{dom}_1\, x$ で $u_2(x) > u_2(x'')$ である。よって、$x \in f(S_1 \times S_2)$。同様の議論によって $f(f(S_1 \times S_2)) = f(S_1 \times S_2)$。従って、以下の命題が得られる。

命題６：取りうる戦略が混合戦略のとき c-LCS は個人合理的な点全体の集合である。

最後に $(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合について考える。

補題１：$O = (0,0)$ 以外の任意の個人合理的な２点は同一の $(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合に存在できない。
証明：相異なる $O = (0,0)$ 以外の任意の個人合理的な２点 x, x' をとる。このとき $x \,\text{c-inddom}\, x'$ または $x' \,\text{c-inddom}\, x$ が成り立てばよい。
(i) $x_1 = x_1'$ または $x_2 = x_2'$ のとき、明らかに $x \,\text{c-inddom}\, x'$ または $x' \,\text{c-inddom}\, x$ が成り立つ。
(ii) $x_i > x_i'$（$\forall i \in N$）のとき。$u_N(x) > u_N(x')$ ならば $x \,\text{c-dom}\, x'$ であるから、ある一方の $i \in N$ について $u_i(x) \le u_i(x')$ となる場合を考える。この場合は $x_i'' = x_i'$, $x_j'' = \dfrac{x_i' - x_i + 4x_j}{4} - \varepsilon$（$\varepsilon$ は十分小さい正の数）となる点 x'' を考えると、$x' \to_j x''$, $x'' \to_{12} x$ でかつ $u_j(x) > u_j(x')$。更に、

$$u_i(x) - u_i(x'') = -x_i + 4x_j + x_i'' - 4x_j'' = -x_i + 4x_j + x_i' - x_i' + x_i - 4x_j + 4\varepsilon$$
$$= 4\varepsilon > 0,$$
$$4(u_j(x) - u_j(x'')) = 4(-x_j + 4x_i + x_j'' - 4x_i'') = -4x_j + 16x_i + x_i' - x_i + 4x_j - 4\varepsilon - 16x_i'$$
$$= 15(x_i - x_i') - 4\varepsilon > 0。$$

よって、$x \,\text{c-inddom}\, x'$。
(iii) $x_i < x_i'$（$\forall i \in N$）のときも (ii) と同様に考えればよい。
(iv) $x_i > x_i'$ かつ $x_j < x_j'$ のとき。(ii) のように $x_j'' = x_j$, $x_i'' = \dfrac{4x_i + x_j' - x_j}{4} - \varepsilon$ となる x'' を考えると $x \,\text{c-inddom}\, x'$。（証明終）

補題２：任意の$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合を$V$，c-LCSを$K$とすると$V \subset K$。
証明： Chwe(1994)を参照。

補題３:任意の個人合理的でない点は$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合に含まれない。
証明：補題２と命題６より明らか。

補題４：任意の$x_1, x_2 \in (1/4,1]$に対して$(x_1,1)$又は$(1,x_2)$１点のみからなる集合は$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合である。
証明：内部安定性は明らかに成り立つから、外部安定性のみ考えれば十分である。そこで、点$A=(1,1)$のみからなる集合を考える。A点以外の場合についても同様。まず、図６の領域OCAB内の任意の点yに対してはAc-dom$y$が成り立つ。次に、AC（$-x_1+4x_2=3$）上かそれより上方の点$x=(x_1,x_2)$については$x'=(x_1,x_2')$が領域OCAB内に入るようにx_2'を定めればAc-inddom$x$。ABより下方の点についても同様。従って、外部安定性も満足する。

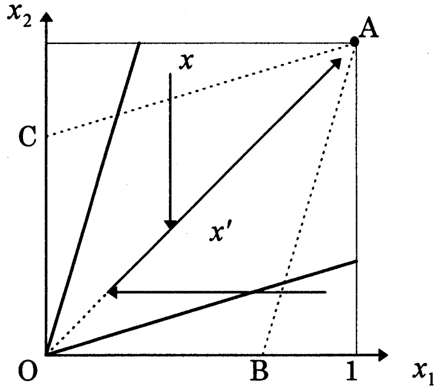

図６：$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合

補題５：集合$\{(0,0),(1,1/4)\}$と$\{(0,0),(1/4,1)\}$は$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$の安定集合である。
証明：$\{(0,0),(1,1/4)\}$ の場合のみ考える。$z=(1,1/4)$とし点$w=(15/16,0)$を考えると$u_2(w)=u_2(z)$である。まず外部安定性であるが、$u_N(z)>u_N(x)$である点xについては明らかに$z\,\text{dom}_{12}\,x$なのでそれ以外の点について考える。$x_1 \in (0,15/16)$となる点 x に対しては $x'=(x_1,0)$ とすると $x \to_2 x'$， $x' \to_{12} z$ で $u_2(z)>u_2(x)$，

$u_N(z) > u_N(x')$ であるから z c-inddom x となる。 $x_1 > 15/16$ の場合には $x_1' = x_1$, $u_N(z) > u_N(x')$ となる点 x' を考えれば z c-inddom x であることがわかる。次に、$x_1 = 0$ となる点 x については $(0,0)\,\mathrm{dom}_2\,x$。$x_2 = 0$ または $U^2(x) \geq U^2(z)$ となる点 x については点 $x' = (0, x_2)$ を考えれば $(0,0)$ c-inddom x となることがわかる。

内部安定性の成立については $u_1(0,0) = u_1(z) = 1$ と任意の x_1 に対して $u_1(0, x_2) \geq 1$ であることよりわかる。（証明終）

命題７：$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合は以下の２種類のみである。
①厳密に個人合理的かつパレート効率的な点１点のみからなる集合,
②集合 $\{(0,0),(1,1/4)\}$ と $\{(0,0),(1/4,1)\}$。
証明：①，②のような集合が安定集合となることは補題４，補題５で証明された。これ以外には安定集合が存在しないことは以下の通り。

個人合理的でない点を含む集合が安定集合でないことは補題３で示した。点 $(0,0)$ と支配関係を持たない点は $U^i(x) = 1$ を満たす点 x であるが、$(0,0)$ 以外にこのような点を２つ以上含む集合は補題１より内部安定性を満たさない。②以外で個人合理的な点を２つ以上含む集合も補題１より内部安定性を満たさない。最後に、パレート効率的でない個人合理的な点１点よりなる集合を $\{x\}$ とする。するとこれは内部安定性を明らかに満たすが、他方 $u_N(x') > u_N(x)$ となる点 x' が存在する。当然、x' は x に支配される事はない。従って、①，②を満たさない集合は安定集合とはなり得ない。（証明終）

7　結論

この分析の結果、純戦略においては間接支配の安定集合と largest consistent set は一致したが混合戦略の場合には異なる結果が得られた。また、無限回繰り返しゲームでの均衡と間接支配の安定集合との関連が見られた。つまり、joint move を含まない場合には全ての個人合理的な点はある安定集合に含まれるという Folk Theorem と類似の結果が得られ、joint move を含む間接支配の安定集合では（裏切る，裏切る）以外ではパレート効率的な点のみが残るという、renegotiation-proof 均衡を繰り返しゲームに適用した場合に得られる結果と非常に類似した結果が得られた。Folk Theorem については van

Damme(1991)を、renegotiation-proof 均衡については Farrell and Maskin(1989) van Damme (1989)を参照。一方、LCS は joint move を含む・含まないのいずれの場合も個人合理的な点全ての集合となり、良い prediction が得られなかった。また、直接支配の安定集合も個人合理的でない点も含まれうるという結果が得られこれも良い prediction とは言えない。最後に今後の研究の方向性としては多人数版の囚人のジレンマなどの性質の類似したゲームへの適用が考えられる。また、Bhaskar(1989),Muto(1993)によって研究されている相互手番のゲームの均衡と間接支配の安定集合との関連についての研究も興味深いと思われる。

参考文献

Bhaskar,V. (1989), "Quick Responses in Duopoly Ensure Pricing," Economics Letters 29,103-107.

Chwe,M.S.-K. (1994),"Farsighted Coalitional Stability, "Journal of Economic Theory 63,299-325.

Farrell,J.P. and Maskin,E. (1989), "Renegotiation in Repeated Games," Games and Economic Behavior 1,327-360.

Harsanyi,J.C. (1974), "An Equilibrium-Point Interpretation of Stable Sets and a Proposed Alternative Definition," Management Science 20,1472-1495.

Muto,S. (1993), "Alternating-Move Preplays and vN-M Stable Sets in Two Person Strategic Form Games," Center for Economic Research discassiuon paper No.9371,Tilburg,The Netherlands.

van Damme,E. (1989), "Renegotiation-Proof Equilibria in Repeated Prisoners' Dilemma," Journal of Economic Theory 47,206-217.

van Damme,E. (1991), "Stability and Perfection of Nash Equilibria," Springer-Verlag.